PRIX ET DISTINCTIONS

Le prix Fermat et ses lauréats

Le prix Fermat 2013 a été attribué à Camillo De Lellis et Martin Hairer, professeurs respectivement à l'université de Zürich et à l'université de Warwick. Rappelons que ce prix récompense des mathématiciens de moins de 45 ans ayant apporté des contributions majeures dans l'un des domaines où s'est illustré Pierre de Fermat : le calcul des variations et les équations aux dérivées partielles, la géométrie analytique, les probabilités et la théorie des nombres. Il est organisé par l'Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT) et financé par la Région Midi-Pyrénées avec le soutien de l'université Paul Sabatier. Notons que cette année, la version « junior » du prix a également été décernée[1].

La cérémonie s'est déroulée à l'Hôtel de Région de Midi-Pyrénées le 22 mai 2014 où M. Tkaczuk représentait la Région et Serge Cohen, directeur de l'IMT, l'université Paul Sabatier et l'IMT. Après la remise des prix proprement dite, dont celle du prix junior, Damien Gayet a donné une conférence sur les Créatures mathaquatiques au cours de laquelle il a brillamment décrit les travaux des lauréats pour un public de profanes[2].

Camillo De Lellis et Martin Hairer ajoutent ainsi leurs noms à la liste prestigieuse des lauréats du prix Fermat, qui fête en 2014 ses 25 ans d'existence (c'est la 13e édition). Les deux textes qui suivent décrivent les contributions qui leur ont valu cette distinction.

Les contributions de M. Hairer

Dominique Bakry

Les travaux de Martin Hairer portent sur de multiples aspects à la frontière entre les équations aux dérivées partielles non linéaires, les probabilités et l'analyse en dimension infinie. Ils concernent plus spécifiquement ce qu'on appelle les équations aux dérivées partielles stochastiques, mais aussi des domaines plus classiques comme la convergence à l'équilibre pour les bains de chaleur (équations d'évolutions non linéaires très dégénérées), [6], la mécanique statistique hors équilibre, les mouvements browniens fractionnaires [1], les problèmes d'homogénéisation, l'algorithmique.

1 Voir à ce sujet la revue *Quadrature* (`www.quadrature.info`).
2 Comme l'auteur de ces lignes.

Dans l'étude des équations aux dérivées partielles stochastiques, le cas linéaire, comme par exemple l'équation de la chaleur

$$\partial_t u = \Delta u + \xi_t$$

où ξ_t un terme de forçage aléatoire, en général un bruit blanc, peut s'étudier à l'aide des outils de l'analyse gaussienne en dimension infinie. Dès que l'on aborde les équations non linéaires, les questions deviennent beaucoup plus difficiles : les problèmes sont souvent mal posés, les solutions sont des distributions avec des régularités très faibles, il n'y a pas d'ellipticité locale, etc. Pour résoudre ces questions, M. Hairer a dû revisiter les outils classiques comme le calcul de Malliavin (c'est-à-dire le calcul des variations sur les espaces gaussiens de dimension infinie), la théorie des chemins rugueux (c'est-à-dire la résolution d'équations différentielles ordinaires dirigées par des signaux non dérivables) [4], entre autres.

Le modèle fini dimensionnel de l'équation de la chaleur avec forçage serait l'étude de l'équation différentielle stochastique $dX_t = AX_t + dB_t$, où A est un opérateur linéaire symétrique. On sait bien que ce type d'équation différentielle, associée aux processus d'Ornstein-Uhlenbeck, a des solutions gaussiennes. On peut alors utiliser l'analyse gaussienne, particulièrement adaptée à la dimension infinie, pour étudier le comportement des lois de ces processus, et par conséquent les solutions de l'équation. Mais dès que l'on sort du domaine linéaire, ce type d'approche est complètement inopérant.

Un des premiers résultats importants de M. Hairer, en collaboration avec J. Mattingly, concerne l'équation de Navier-Stokes 2-d, [5, 7] qu'il étudie de façon plus simple en regardant l'équation scalaire sur la vorticité $\nabla \wedge u$. Les auteurs considèrent le problème périodique associé, et ajoutent un terme de forçage gaussien n'ayant qu'un nombre fini de modes en transformée de Fourier. La question de l'existence et surtout de l'unicité d'une mesure d'équilibre (l'ergodicité) devient assez compliquée, car on a alors affaire à un problème hypo-elliptique en dimension infinie, où un nombre fini de champs de vecteurs doivent engendrer un espace de dimension infinie. Le calcul de Malliavin (ou la théorie de Hörmander) est bien adapté pour ces problèmes hypo-elliptiques, mais clairement insuffisant dans ce cadre infinidimensionnel. Il faut donc revisiter cette théorie de manière plus quantitative. Sur cette question, le principal résultat de ces auteurs est une description complète de la nature arithmétique du support des modes qui permettent d'obtenir l'ergodicité.

Une autre équation d'évolution non linéaire importante est l'équation KPZ, c'est-à-dire : $\partial_t u = \partial_x^2 u + \lambda(\partial_x u)^2 - \infty + \xi$, où ξ est un bruit blanc en espace et en temps, et ∞ est une constante de renormalization qu'il s'agit de comprendre [2]. C'est une équation qui apparaît naturellement lorsqu'on étudie des interfaces aléatoires en mécanique statistique, qui intervient aussi dans les matrices aléatoires. Pour toute solution approchée par régularisation du bruit, on doit, pour faire converger la solution, retrancher à l'équation une quantité qui converge vers l'infini lorsque le paramètre de régularisation converge vers 0. Cette équation est une équation de Hamilton Jacobi avec viscosité et terme de forçage, et la transformation de Hopf-Cole, qui ramène ces équations à des équations linéaires, peut être utilisée. Mais l'irrégularité du bruit rend cette approche quasi impossible, et de plus cette technique est vraiment particulière à ce cas précis. C'est pourquoi M. Hairer utilise une version de la théorie des chemins rugueux développée par T. Lyons, en l'adaptant à son contexte avec des chemins ayant une structure S^1, tout en développant le calcul sur des arbres binaires (qui reflètent le caractère quadratique de l'équation lorsqu'on implante une méthode de point fixe). Cela lui permet de décrire précisément le type de régularité des solutions (en terme d'espaces de Besov) lorsque le terme de forçage est une distribution de régularité précisément contrôlée.

Cela l'a amené à développer une ambitieuse « théorie des structures de régularité » [3], qui permet de remplacer les approximations polynomiales de fonctions par une approche formelle. Cette théorie prend en compte les réécritures des développements par passage d'un point à un autre (et c'est l'action de ce groupe de réécriture qui in fine produira les constantes de renormalisation), ainsi que la façon dont, dans un processus d'approximation, on sera amené à multiplier entre elles, des distributions de régularité données. Cela lui permet d'étudier d'autres types d'équations d'évolution non linéaires, comme l'équation PAM (Parabolic Anderson Model) $\partial_t u = \Delta u + \xi u$, ou l'équation d'évolution associée à la théorie $P(\Phi^4) : \partial_t \Phi = \Delta\Phi - \Phi^3 + \xi$.

Au total, les travaux de M. Hairer constituent un ensemble extrêmement profond d'avancées dans le domaine des équations d'évolution avec termes aléatoires ou très irréguliers, avec des résultats très précis concernant l'existence, l'unicité et la régularité des solutions, combiné avec le développement parallèle d'outils théoriques très généraux et puissants ouvrant la voie à de nombreuses applications.

Références

[1] Baudoin, F., Hairer, M., *A version of Hörmander's theorem for the fractional Brownian motion*, Probability Theory and Related Fields **139** (2007), n° 3-4, 373-395.

[2] Hairer, M., *Solving the KPZ equation*, Annals of Math. 178 (2013), n° 2, pp. 559-664.

[3] Hairer, M., *A theory of regularity structures*, arXiv :1303.5113.

[4] Hairer, M., Maas, J., Weber, H., *Approximating rough stochastic PDEs*, Communication on Pure and Applied Math. **67** (5) (2014), 776-870.

[5] Hairer, M., Mattingly, J. C., *Ergodic properties of highly degenerate 2d stochastic Navier-Stokes equations*, Comptes Rendus Mathématiques **339** (2004), n° 12, 879-882.

[6] Hairer, M., Mattingly, J. C., *Slow energy dissipation in anharmonic oscillator chains*, Communication on Pure and Applied Math. **62** (2009), no 8, 999-1032.

[7] Hairer, M., Mattingly, J. C., Pardoux, E., *Malliavin calculus for highly degenerate 2d stochastic Navier-Stokes equations*, Comptes Rendus Mathématiques **339** (2004), n° 11, 793-796.

The contributions of C. De Lellis

Luigi Ambrosio

Camillo De Lellis made some of the most important achievements of the last years in the Calculus of Variations and in the analysis of Partial Differential Equations. His interests in these fields are multifarious, and show a broad and deep perspective on mathematics, one of the distinctive aspects of De Lellis' research.

One of the recurring themes in his work is the analysis of the singular behavior of solutions to variational problems and partial differential equations. In this note we briefly discuss two spectacular results in De Lellis' recent research (one for each of the fields mentioned above): namely, the ones concerning the Euler system of partial differential equations of incompressible fluid dynamics, and the regularity of generalized minimal surfaces.

Euler's equations for incompressible fluids are very well studied in mathematical physics. Euler derived these equations 250 years ago in his investigations on the dynamics of ideal fluids, and since then this PDE represents a source of open problems and ideas in many different areas of mathematics (such as the partial differential equations, dynamical systems, harmonic analysis, etc.).

De Lellis has investigated the problem of the existence of "special" and "singular" weak solutions. Since the singularities cannot be ruled out in general, and sometimes have a physical meaning, one can consider solutions in the sense of distributions (i.e. integrating the equations against a test function and moving the derivatives on the test function). Earlier in a groundbreaking paper [16] Scheffer proved the first non-uniqueness result for weak solutions to the Euler equations. He proved the existence of a nontrivial weak solution which has compact support in space and time: i.e., there exists a fluid which starts at rest, after some time begins to move, and eventually stops flowing, without any action of external forces!

In collaboration with Laszlo Székelyhidi, De Lellis gave a new surprising proof of this peculiar phenomenon of non-uniqueness of the Euler equations [8], getting solutions with uniformly bounded velocity and linking the existence of these solutions to a suitable variant of Gromov's *h*-principle [12]. This principle pertains to various problems in geometry (the first instance of which is the isometric embedding problem considered by Nash [14]), and it was unexpected that it could have been applied to equations in physics (where the uniqueness of the evolution from given initial conditions is by tacit agreement expected – cf. Gromov's speech at the Balzan Prize [13]).

Rather than being the end of the story, this was only the starting point. In a series of papers in collaboration, still with Székelyhidi as coauthor, De Lellis proved new striking results on the non-uniqueness of weak solutions to Euler's system. In [9] it is shown that there are no reasonable criteria (according to all the previous tentative proposals) to select a unique "admissible" solution. A new surprising step is done in [10], where the authors prove the existence of continuous dissipative solutions (all the wild solutions constructed before were discontinuous). Finally, a further amazing achievement is contained in [11] (see also [2] for an improvement), where it is shown that compactly supported and Hölder continuous solutions can be built, with any exponent less than $\frac{1}{5}$. This is not a technical improvement, but is a substantial progress towards the understanding of the Euler equations and their connection to physics. Indeed, as was first pointed out by Onsager [15], these wild solutions have relevant connections to the theory of turbulence, and Onsager conjectured that solutions can be dissipative if and only if thery are less than $\frac{1}{3}$-Hölder continuous in space (the necessary part of the conjecture has been solved by Eyink and Constantin, E and Titi). This series of results by Székelyhidi and De Lellis is perhaps one of the most significant of the last years in the theory of partial differential equations.

As for the second class of remarkable recent results by C. De Lellis, we mention his achievements in the analysis of singularities of minimizing currents. Minimal surfaces are a very classical area in the calculus of variations and in the geometric analysis. They have been studied for several centuries, and have revealed to be a useful tool and a prototypical example in many other areas of mathematics, such as general relativity and differential geometry.

A fruitful and successful context for the study of minimal surfaces is the *Geometric Measure Theory*, a novel discipline founded in the 50's by the contributions of many distinguished mathematicians (see the monograph by H. Federer for a comprehensive introduction). Using the techniques in geometric measure theory it was indeed possible to find a general solution to the *Plateau problem* (that of finding a least area surface among those with a fixed boundary), already considered by Lagrange in the 18^{th} century and first solved only around 1930 by J. Douglas and T. Rado (the former winning the first Fields medal for such achievement).

The study of the regularity of the generalized solutions to the Plateau problem, called *minimizing currents*, has constituted one of the most challenging problems in the field, and in this respect C. De Lellis has achieved very important results. It is a well-known fact that the qualitative behavior of such solutions changes drastically between the case of hypersurfaces, i.e. currents of codimension 1, and the case of higher codimension. Indeed a new, yet not completely understood phenomenon occurs in the latter case, namely the appearance of *branch points*. There are very few results in this regard, the most remarkable one being the monumental monograph by F. Almgren [1]. This paper, known nowadays as *Almgren's big regularity paper* (because of its almost one thousand pages), appeared in the early '80s but was published only posthumous, remaining mostly unexplored for 30 years, although it contains the most important result in the field (see also the recent interests in this regard, cf. for instance the work by Taubes [18]).

In a series of papers in collaboration with E. Spadaro [3]-[7], C. De Lellis revisits and extends the work of [1], giving a new and self-contained proof of the regularity of minimizing integral currents up to a singular set of codimension at least 2. In particular, he contributed to the non-parametric theory of multiple valued functions [3], found new intrinsic integrability properties [5], and succeeded in constructing a *center manifold* in [6], i.e. an average of the sheets of the current, which is perhaps the most difficult part of Almgren's program developed in his big regularity paper. These achievements shed light on many fundamental aspects of the regularity of minimizing currents, which were buried in Almgren's big regularity paper, opening the road for new future developments.

References

[1] Almgren, F., *Almgren's big regularity paper*. Volume 1 of World Scientific Monograph Series in Mathematics. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, (2000).

[2] Buckmaster, T.; De Lellis, C.; Székelyhidi, L. Jr., Transporting microstructure and dissipative Euler flows. Preprint (2013).

[3] De Lellis, C.; Spadaro, E., Q-valued functions revisited. Mem. Amer. Math. Soc., 211(991):vi+79, (2011).

[4] De Lellis, C.; Spadaro, E., Multiple valued functions and integral currents. To appear in Ann. Scuola Norm. Sup. (2014).

[5] De Lellis, C.; Spadaro, E., Regularity of area-minimizing currents II: center manifold. Preprint (2013).

[6] De Lellis, C.; Spadaro, E., Regularity of area-minimizing currents I: gradient L^p estimates. Preprint (2013).

[7] De Lellis, C.; Spadaro, E., Regularity of area-minimizing currents III: blowup. Preprint (2013).

[8] De Lellis, C.; Székelyhidi, L. Jr., The Euler equations as a differential inclusion. Ann. of Math. (2) 170 (2009), n° 3, 1417-1436.

[9] De Lellis, C.; Székelyhidi, L. Jr., On admissibility criteria for weak solutions of the Euler equations. Arch. Ration. Mech. Anal. 195 (2010), n° 1, 225-260.

[10] De Lellis, C.; Székelyhidi, L. Jr., Dissipative continuous Euler flows. Invent. Math. 193 (2013), n° 2, 377-407.

[11] De Lellis, C.; Székelyhidi, L. Jr., Dissipative Euler Flows and Onsager's Conjecture. To appear in J. Eur. Math. Soc. (2014).

[12] Gromov, M., *Partial differential relations.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 9. Springer-Verlag, Berlin, (1986). x+363 pp.

[13] Gromov, M., Local and global in geometry, Balzan Prize (1999).

[14] Nash, J., C^1 isometric imbeddings. Ann. of Math. (2) 60, (1954), 383-396.

[15] Onsager, L., Statistical hydrodynamics, Nuovo Cimento (9), 6 Supplemento, 2(Convegno Internazionale di Meccanica Statistica) (1949), 279-287.

[16] Scheffer, V., An inviscid flow with compact support in space-time. J. Geom. Anal. 3 (1993), n° 4, 343-401.

[17] Shnirelman, A., On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation. Comm. Pure Appl. Math. 50 (1997), n° 12, 1261-1286.

[18] Taubes, C., Seiberg Witten and Gromov invariants for symplectic 4-manifolds. Edited by Richard Wentworth. First International Press Lecture Series, 2. International Press, Somerville, MA, (2000). vi+401 pp.