

# LIVRES

---

---

## **Algebraic Geometry and Arithmetic Curves**

QING LIU

Oxford University Press, 2006 (2<sup>e</sup> édition). 600 p. ISBN : 978-0199-2024-92. \$85

---

Les quelque 600 pages de cet ouvrage sont une introduction à la géométrie algébrique avec en ligne de mire la théorie des surfaces arithmétiques et notamment le théorème de réduction semi-stable. Le point de vue adopté est résolument celui des schémas, introduits par Grothendieck il y a plus de 50 ans. Au contraire des textes classiques de Hartshorne ou Mumford, l'auteur n'a pas souhaité faire la transition depuis l'ancienne théorie des variétés, promouvant implicitement l'idée que la géométrie algébrique est la théorie des schémas. Quoiqu'ardu, ce présupposé s'avère d'autant plus nécessaire lorsque l'on vise des applications à la géométrie arithmétique dont le théorème de réduction semi-stable de Deligne-Mumford est certainement l'une des pierres angulaires.

Le premier quart du livre fonde la théorie : définition des schémas, dimension, morphismes, propriétés locales (platitude, régularité, lissité) et globales (propreté). Précédé d'un chapitre de « rappels » d'algèbre commutative, quasiment tout ce qui est affirmé y est démontré en détail et devrait être accessible à un (bon) étudiant de master. Ces quatre premiers chapitres se closent par une démonstration élémentaire (non cohomologique) de quelques incarnations du *Main theorem* de Zariski.

Le quart suivant est plus technique. Il débute (chapitre 5) par l'introduction des faisceaux cohérents et leur cohomologie de Čech. L'auteur renvoie à plusieurs reprises à l'article fondateur *Faisceaux algébriques cohérents* de Serre. Je regrette un peu le caractère incomplet qui en résulte : l'assertion (p. 185) que la cohomologie de Čech se prête à des calculs explicites est étayée par une référence au calcul (p. 195) de la cohomologie du faisceau  $\mathcal{O}(n)$  sur l'espace projectif où ce calcul est ou bien relégué en exercice, ou bien jugé trop technique pour être présenté. En outre, dans cette approche, l'algèbre homologique « grothendieckienne » est un peu laissée pour compte.

Le chapitre 6 définit les différentielles de Kähler et aborde l'étude de quelques classes de morphismes (lisses, l.c.i). Il se termine par une introduction à la dualité en théorie des faisceaux cohérents en se limitant au cas  $f_* / R^r f_*$ ,  $r$  étant un entier majorant la dimension des fibres d'un morphisme propre  $f : X \rightarrow Y$  de schémas noéthériens. Le lien entre dualisant et formes différentielles relatives est énoncé mais non démontré (le cas particulier des intersections complètes de l'espace projectif fait l'objet d'un exercice).

Le chapitre suivant débute par les premières propriétés des diviseurs de Cartier et de Weil sur un schéma. Ces considérations sont appliquées au théorème de Riemann-Roch sur une courbe algébrique et à ses conséquences sur la géométrie des courbes algébriques. Il se conclut par une étude assez détaillée du groupe de Picard d'une courbe singulière comparé à celui de sa normalisée.

Les trois derniers chapitres de ce livre en occupent près de la moitié des pages et exposent des résultats nettement plus avancés.

Les chapitres 8 et 9 sont consacrés aux surfaces, c'est-à-dire aux schémas de dimension 2. Parmi celles-ci figurent bien sûr les surfaces sur un corps, mais aussi, et c'est l'un des intérêts de ce livre, les « surfaces arithmétiques » qui sont fibrées sur un schéma de Dedekind. Liu en présente d'abord leur géométrie birationnelle (éclatements, désingularisation, existence de contraction ; la notion de schéma excellent est introduite), puis se concentre sur les surfaces régulières fibrées sur un anneau de Dedekind (forme d'intersection, contractions, modèles minimaux).

Le dernier chapitre explique le théorème de réduction semi-stable de Deligne et Mumford. Soit  $X$  une courbe projective lisse sur le corps  $K$  des fractions d'un anneau de valuation discrète  $R$  (analogue arithmétique d'un disque époiné) ; un modèle de  $X$  sur  $R$  est une surface, disons régulière,  $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } R$  (l'analogue d'un prolongement au-dessus du disque tout entier) ; on dit qu'il est semi-stable si la fibre spéciale  $\mathcal{X}_s$  (l'analogue de la fibre centrale) est un diviseur à croisements normaux dont toutes les composantes ont multiplicité 1 (plus une condition combinatoire sur les composantes qui sont des courbes rationnelles). Le théorème de réduction semi-stable affirme l'existence de tels modèles, quitte à effectuer une extension finie de  $K$  (l'analogue d'un revêtement ramifié du disque).

Liu expose d'abord la démonstration dans le cas relativement élémentaire où le corps résiduel est de caractéristique 0 – un calcul explicite prouve que le revêtement ramifié de degré égal au ppcm des multiplicités des composantes de la fibre spéciale convient.

Le cas général est bien plus délicat et Liu donne les grandes lignes de la preuve d'Artin et Winters qui repose sur la comparaison des groupes de Picard de  $X$ , du modèle  $\mathcal{X}$  et de la fibre spéciale  $\mathcal{X}_s$ . Il s'avère que pour tout nombre premier assez grand  $\ell$ ,  $\text{Pic}(\mathcal{X}_s)[\ell]$  s'identifie à un sous-groupe de  $\text{Pic}(X)[\ell]$ , le quotient étant un  $\mathbf{Z}/\ell$ -vectoriel de dimension majorée par le nombre de Betti d'un graphe construit à l'aide de la combinatoire de la fibre spéciale. On en déduit alors que le *rang unipotent* du groupe  $\text{Pic}(\mathcal{X}_s)$  est nul puis que  $\mathcal{X}$  est semi-stable pour peu que  $\text{Pic}(X)[\ell]$  soit d'ordre  $\ell^{2g}$ ,  $g$  étant le genre de  $X$ .

Même si les arguments combinatoires qui conduisent à cette majoration (élémentaires mais très délicats) ne sont qu'esquissés dans ce livre, c'est à ma connaissance la seule présentation détaillée de ce théorème dans une monographie. Le chapitre se termine par quelques exemples de constructions de modèles semi-stables, essentiellement sans démonstration.

Chaque chapitre est accompagné de très nombreux exercices, mais dont certains, suivant l'exemple de Hartshorne, sont utilisés dans le corps du texte. Ils me semblent cependant plus accessibles que ceux de ce dernier livre et sont en tout cas plus détaillés.

En conclusion, Qing Liu a réussi dans ce livre un double tour de force : proposer d'une part une introduction accessible, moderne et autonome, aux rudiments de la géométrie algébrique des schémas, et d'autre part une présentation détaillée d'un théorème fondamental de la géométrie arithmétique contemporaine. Belle réussite !

Antoine Chambert-Loir,  
Université Rennes I

---

**Integer Points in Polyhedra**

ALEXANDER BARVINOK

European Mathematical Society, 2008. 199 p. ISBN : 978-3-03719-052-4. 34 €

---

L'ouvrage d'Alexander Barvinok reprend le cours qu'il a donné à l'ETH de Zürich et à l'université de Michigan dont il est professeur. Barvinok est l'un des meilleurs spécialistes mondiaux de la combinatoire et de l'algorithmique des polyèdres entiers.

L'objet de ce fascicule est l'analogie discret de la théorie des polyèdres de l'espace euclidien. Étant donné un réseau – pour simplifier le réseau entier de l'espace euclidien – on considère les polyèdres et les polytopes (polyèdres compacts) dont les sommets appartiennent au réseau.

La question principale qui est l'objet de l'étude combinatoire discrète des polytopes est le calcul aussi explicite que possible du volume et de son analogue discret, le nombre de points du réseau appartenant au polytope.

L'auteur commence par l'étude géométrique des polytopes : faces, décomposition en polyèdres entiers plus simples, cônes tangents, dualité...

Puis il introduit l'algèbre des polyèdres qui permet de faire correspondre aux propriétés géométriques étudiées des interprétations algébriques. Par exemple un rôle important dans l'étude algébrique est donné à la notion de valuation qui s'interprète comme fonction sur l'algèbre des fonctions caractéristiques des polytopes. La construction permet par exemple d'étendre la notion de volume des polytopes au cas de polyèdres non bornés. Dans une seconde partie, Barvinok expose l'essentiel de la théorie des réseaux et les théorèmes fondamentaux de la géométrie des nombres, selon Minkowski un pur joyau des mathématiques, et l'algorithme de réduction des bases dû à Lenstra et Lovasz.

Enfin Barvinok développe l'étude du nombre de points entiers dans un polytope à sommets entiers en introduisant le polynôme d'Ehrhart (qui compte le nombre de points dans les dilatés du polytope), démontre le théorème de Brion-Lawrence qui donne un sens précis à la décomposition d'un polytope en somme de cônes dans l'algèbre polyédrale et étudie des cas particuliers intéressants (comme le cas des polytopes totalement unimodulaires).

Parmi les développements récents prometteurs on signalera l'introduction de méthodes probabilistes – une fois de plus – pour calculer des approximations du nombre de points entiers dans un polytope, ou son volume, en particulier dans le cas de grandes dimensions (A. Barvinok, J. Artigan, ArXiv Mathematics, juillet 2009).

Le sujet est particulièrement adapté pour un cours de niveau assez élémentaire introductif à la géométrie entière et ouvre vers de multiples développements. C'est aussi une nouvelle preuve de la fragilité de la division mathématiques pures, mathématiques appliquées.

Jean-Michel Kantor,  
Institut Mathématique de Jussieu  
Université Paris-Diderot

---

**The Monster group and Majorana involutions**

A. A. IVANOV

Cambridge University Press, 2009. 252 p. ISBN : 978-0-521-88994-0. \$90

---

Les groupes finis simples sont les objets de base en théorie des groupes finis un peu comme les nombres premiers en théorie des nombres. Le projet gigantesque de la classification des groupes finis simples, achevé en 1980, montre qu'ils se regroupent en familles plus ou moins comprises mis à part 26 d'entre eux que l'on appelle les groupes sporadiques. La cardinalité de ces derniers varie entre 7920 (groupe de Mathieu  $M_{11}$  découvert en 1860) et  $\sim 10^{54}$  (le groupe de Fischer-Griess, appelé aussi le Monstre). Ce dernier joue un rôle particulier puisque tous les groupes sporadiques (exceptés 6) se retrouvent dans celui-ci. L'existence du Monstre a été conjecturée indépendamment par B. Fischer et R. Griess en 1973. Diverses conjectures sur sa structure ont permis de calculer sa gigantesque table des caractères (194 caractères irréductibles) avant même de prouver son existence. En 1979, J. Thompson montre l'« unicité » du Monstre et en 1980, R. Griess démontre par un tour de force son existence. Le fait que le Monstre n'ait pas de représentation matricielle de dimension inférieure à 196883 rend son étude difficile. Il a suscité beaucoup d'intérêt depuis sa découverte notamment pour ses liens avec les formes modulaires, les algèbres de Kac-Moody et les TQFT (*topological quantum field theory*). Enfin rappelons que R. Borcherds a été récompensé par la médaille Fields pour ses travaux sur le Monstre et les algèbres de Kac-Moody.

En dépit de l'intérêt qu'on peut avoir pour ce groupe depuis presque quarante ans, ce livre est sans doute un des premiers ouvrages qui contienne une construction rigoureuse et une preuve de son unicité. Ici l'auteur définit le Monstre comme la *complétion universelle* de ce qu'il appelle un *amalgame monstrueux*. Un amalgame de rang  $n$  est la donnée d'un ensemble fini  $H$  et de sous-ensembles  $G_1, \dots, G_n$  munis de structures de groupe  $*_1, \dots, *_n$  tels que  $H = \bigcup_i G_i$  et  $*_i, *_j$  soient compatibles sur  $G_i \cap G_j$ . Une complétion de l'amalgame  $\mathcal{A} = \{G_1, \dots, G_n\}$  est une application  $\varphi$  de  $H$  dans un groupe  $G$  dont l'image engendre  $G$  et qui restreinte à  $G_i$  soit un homomorphisme de groupe. Nous avons alors la notion de complétion universelle  $U(\mathcal{A})$  et  $\mathcal{A}$  admet une complétion injective si et seulement si  $H \rightarrow U(\mathcal{A})$  est injective. Un amalgame monstrueux est un certain amalgame  $\mathcal{M} = \{G_1, G_2, G_3\}$  qui vérifie entre autres les propriétés suivantes. Si  $Q_i$  est la notation pour le plus grand 2-sous-groupe normal de  $G_i$  et si  $G_{ij} := G_i \cap G_j$ , alors  $Q_1$  est un groupe extraspécial d'ordre  $2^{25}$ , le quotient  $G_1/Q_1$  est le groupe fini simple de Conway  $Co_1$  (qui s'obtient comme quotient par  $Z_2$  du groupe d'automorphismes du réseau de Leech  $\Lambda$ ) tandis que  $G_2/Q_2 \simeq Sym_3 \times M_{24}$  où  $M_{24}$  est un groupe de Mathieu et  $G_3 = \langle G_{13}, G_{23} \rangle$ ,  $G_{13} = N_{G_1}(Z_3)$ ,  $G_{23} = N_{G_2}(Z_3)$  où  $Z_3$  est la pré-image d'un certain sous-groupe de  $\Lambda/2\Lambda$  par un certain homomorphisme  $\chi : Q_1 \rightarrow \Lambda/2\Lambda$  de noyau  $Z_1$  tel que l'isomorphisme  $Q_1/Z_1 \simeq \Lambda/2\Lambda$  soit  $Co_1$ -équivariant.

Dans le premier chapitre, l'auteur fait des rappels nécessaires qui lui permettront entre autres de construire un amalgame monstrueux et de démontrer qu'il n'en existe pas d'autre. En particulier, il fait des rappels sur le code de Golay  $C_{12}$ , son groupe d'automorphismes  $M_{24}$ , les modules de Todd  $C_{11}$ ,  $C_{11}^*$ , les groupes extraspéciaux  $2_\epsilon^{1+2n}$  et leurs extensions, le réseau de Leech et le groupe de Conway  $Co_1$ . Il classe entre autres un certain type d'extensions du groupe extraspécial

$2_+^{1+22}$  par  $M_{24}$ .

Dans le deuxième chapitre, il donne la définition formelle d'un amalgame monstrueux puis en construit un explicitement. Il commence par regarder les possibilités pour  $G_1$  vérifiant les deux conditions  $G_1/Q_1 \simeq Co_1$  et  $Q_1 \simeq 2_+^{1+24}$  plus l'hypothèse sur  $\chi$ . Il obtient deux candidats possibles puis continue avec les autres groupes  $G_2, G_{12}, \dots$  de l'amalgame. La construction est laborieuse et prend une quarantaine de pages. De par sa construction qui consiste à analyser toutes les possibilités, il montre qu'il en existe un seul. À ce stade, le Monstre  $M$  est défini comme étant la complétion universelle de l'unique amalgame monstrueux.

Dans le troisième chapitre, il montre l'existence d'une complétion injective de l'amalgame monstrueux dans le groupe des automorphismes linéaires d'un espace vectoriel  $\Pi$  de dimension 196883. Pour cela il commence d'abord par construire une représentation injective  $\varphi$  de l'amalgame  $\{G_1, G_2\}$  dans  $GL(\Pi)$ . La construction se fait par induction en 6 étapes et conduit en fait à la plus petite représentation injective de  $\{G_1, G_2\}$ . La technique utilisée peut s'adapter à d'autres situations. Elle avait été utilisée par l'auteur précédemment pour construire une représentation de dimension 1333 d'un amalgame de rang 2 provenant du groupe de Janko  $J_4$ . Pour étendre cette représentation à  $\mathcal{M}$  tout entier il montre ensuite que  $G_3$  est isomorphe au sous-groupe de  $GL(\Pi)$  engendré par  $\varphi(G_{13})$  et  $\varphi(G_{23})$ , ce qui lui prend la moitié du chapitre. L'ensemble de ce chapitre est assez technique. Puisque maintenant nous savons que la complétion universelle est injective, nous pouvons identifier  $\mathcal{M}$  avec le sous-amalgame correspondant du Monstre  $M$  et les groupes  $G_1, G_2$  et  $G_3$  sont alors considérés comme des sous-groupes de  $M$ .

Le but du chapitre 5 est de mettre un produit commutatif  $\star$  (qui ne sera pas associatif) sur  $\Pi$  invariant par l'action du Monstre. Pour cela l'auteur a besoin d'enrichir l'amalgame  $\mathcal{M}$  en y ajoutant des sous-groupes de  $M$ . C'est ce qu'il fait dans le chapitre 4. Il étudie aussi la géométrie des classes à droite associée à un amalgame enrichi  $\{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}$  où les éléments de type  $i$  sont les classes à droite de  $G_i$  et deux éléments de type  $i$  et  $j$  sont incidents si leur intersection est une classe de  $G_i \cap G_j$ .

Dans le sixième chapitre, il étudie le groupe d'automorphismes  $A$  de l'algèbre de Griess  $(\Pi, \star)$  définie dans le chapitre 5. Soit  $\psi : M \rightarrow GL(\Pi)$  l'homomorphisme déduit de la représentation de l'amalgame  $\mathcal{M}$  dans  $GL(\Pi)$ . Le principal résultat technique du chapitre est que le groupe  $\psi(G_1)$  coïncide avec le stabilisateur dans  $A$  de  $\psi(Z_1)$ . Cette identité est le point clé pour montrer la finitude et la simplicité de  $\psi(M)$  et donc que  $\psi(M)$  est le Monstre au sens de la définition classique, *i.e.*, que  $\psi(M)$  est un groupe non-abélien fini simple tel que le centralisateur d'une involution coïncide avec le groupe  $G_1$ .

Le chapitre 7 est dédié à l'étude de certains sous-groupes importants du Monstre.

Dans le chapitre 8, l'auteur axiomatise la notion d'involution de Majorana et de vecteur axial associé. Il montre que les involutions de type 2A du Monstre agissant sur l'algèbre  $\Pi \oplus \Pi_1$ , où  $\Pi_1$  est un  $M$ -module trivial de dimension 1, sont des involutions de Majorana. En particulier, on peut décrire simplement leur action en termes des vecteurs axiaux correspondants. Les sous-algèbres engendrées par des paires de vecteurs axiaux (algèbres de Majorana) ont été calculées par S. Norton : il y a 9 types de classes d'isomorphismes, chaque type correspondant à une des 9 classes de conjugaison de  $M$  contenant un produit de deux involutions de type

2A. D'après l'auteur, le fait que le Monstre soit engendré par des involutions de Majorana devrait dominer les investigations futures.

Enfin dans le chapitre 9, l'auteur montre que  $\psi(M)$  est en fait isomorphe à la complétion universelle  $M$  de  $\mathcal{M}$ . Pour cela, il utilise le fait que la géométrie des classes associée avec le plongement de  $\mathcal{M}$  dans  $\psi(M)$  est simplement connexe.

À mon avis le livre s'adresse avant tout à des gens qui travaillent sur les groupes finis (étudiants en thèse ou spécialistes) : il contient des résultats qui n'étaient pas dans la littérature, ce qui intéressera les spécialistes, et il est suffisamment bien écrit et complet pour être lu par des étudiants en théorie des groupes finis.

Emmanuel Letellier,  
Université de Caen Basse-Normandie