EN HOMMAGE À HENRI CARTAN

(SUITE)

Dans la famille Cartan, je demande... la sœur

Michèle Audin[1]

Il est question ici de familles bien connues, de scientifiques bien connus, et de quelques femmes scientifiques, la plupart peu connues, dont deux, assez mal connues, appartiennent à la famille Cartan.

Famille Cartan, familles...

Le fils, le père, le grand-père

De la famille Cartan, si l'on est mathématicien, on connaît en général le fils, Henri Cartan (1904–2008), sa participation à Bourbaki, son séminaire, ses livres, notamment celui [2] sur les fonctions analytiques, et le père, Élie Cartan (1869–1951), ses algèbres, sa géométrie des espaces de Riemann, ses spineurs... On a parfois entendu parler du grand-père, le maréchal-ferrant de Dolomieu.

Les frères, le beau-père

Il arrive que l'on sache aussi qu'Henri Cartan avait un frère musicien, le compositeur Jean Cartan (1906–1932), un élève de Paul Dukas et Albert Roussel, mort de la tuberculose à l'âge de 25 ans, et un frère physicien, Louis Cartan, (1909–1943), arrêté en 1942 pour faits de résistance et décapité par les Allemands en décembre 1943.

Certains vont même jusqu'à savoir qu'Henri Cartan était le gendre de Pierre Weiss (1865–1940), un physicien de la mouvance scientifique de Paul Langevin et Aimé Cotton, bien connu pour ses travaux sur le magnétisme.

La belle-mère

Eh bien, dans cette famille, il y avait aussi des femmes. Bien sûr, dira-t-on, puisqu'il y a des fils, des beaux-pères... Avant de laisser de côté la belle-famille d'Henri Cartan, notons au passage, dans ce jeu des sept familles, la présence sur une photographie, aux côtés d'Élie Cartan, pendant la première guerre mondiale, de Madame Weiss, dont la fille Nicole deviendrait l'épouse d'Henri Cartan[2]. On voit sur la figure 1 un détail d'une photographie, prise en 1916, à l'hôpital 103,

[1] Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, Strasbourg

[2] Jane Weiss, née Rancès, une artiste, est morte deux ans après la naissance de sa fille. Pierre Weiss s'est remarié avec une sévrienne, agrégée de physique, Marthe Klein (reçue au concours d'entrée à Sèvres en 1905, et (première) à l'agrégation féminine de physique en 1908).

alias École normale supérieure, que commandait le sergent Élie Cartan. On le voit ici avec quelques infirmières, dont la première en partant de la gauche est Jane Weiss et la première en partant de la droite est Marguerite Borel, tout à la fois la fille de Paul Appell[3], l'épouse d'Émile Borel, et l'écrivaine Camille Marbo[4].

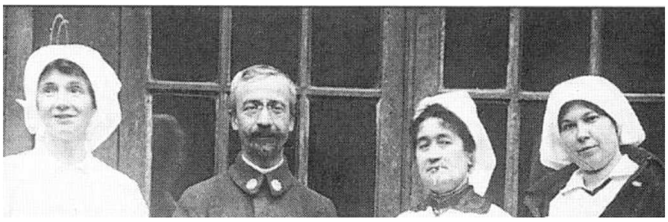

FIG. 1. Photo de familles

Laissons de côté les belles-familles. Et concentrons-nous sur la famille Cartan et ses filles, et même sur ses filles mathématiciennes. Car il y en a.

Anna Cartan (1878–1923)

Annette (Anna) Cartan, la petite sœur d'Élie Cartan, est née le 15 mai 1878, neuf ans après son frère, quatrième de la fratrie. Une jeune femme déterminée et courageuse. Elle quitte Dolomieu pour des études de mathématiques, elle entre à l'École de Sèvres en 1901.

Cette année-là, les sévriennes scientifiques sont quatre, Madeleine Routaboul (Besseteaux), Anna Cartan, Eugénie Feytis (Cotton) et Marthe Baillaud (Privat).

On voit ici les quatre élèves autour de leur professeur de physique... dont je suppose que tous les lecteurs l'ont reconnue. Debout, à gauche Marthe et à droite Anna ; assises et encadrant Marie Curie, à gauche Madeleine et à droite Eugénie.

Parmi les professeurs qui enseignaient à l'École de Sèvres en ce temps-là, on note, outre Marie Curie, Jean Perrin et Paul Langevin, qui enseignaient la physique, Jules Tannery, qui enseignait les mathématiques. C'est un professeur qu'Anna Cartan devait apprécier ; la notice qu'elle écrivit sur lui dans le *Bulletin des anciennes élèves de Sèvres* est d'ailleurs citée dans la préface d'Émile Borel pour le livre posthume [6] de Tannery.

Marthe et Madeleine

De Madeleine, je ne sais rien sinon qu'elle est morte en 1906, on ne la trouve même pas dans les listes de lauréats de l'agrégation. Eugénie et Marthe passeront l'agrégation de physique en 1904.

Marthe Baillaud est, elle aussi, une petite sœur, dans une grande famille d'astronomes[5]. Elle était d'ailleurs la nièce de Jules Tannery : un tout petit monde.

[3] Dans ce jeu des sept familles, signalons aussi que la mère de Marguerite Borel était une nièce de Joseph Bertrand (sur ce mathématicien et ses réseaux sociaux, voir [8]).

[4] Dont on pourra consulter le livre de souvenirs [5].

[5] Son père, Benjamin Baillaud 1848–1934), a été directeur de l'Observatoire de Paris, deux de ses frères, Jules et René, ont été eux aussi des astronomes. Elle a épousé Jean Privat, un médecin... et le fils du libraire toulousain qui publiait les catalogues de l'Observatoire de Paris depuis que Benjamin Baillaud en était le directeur.

FIG. 2. À Sèvres, le professeur et ses élèves

Eugénie Cotton

Eugénie Feytis deviendra physicienne et l'épouse d'Aimé Cotton (déjà mentionné dans cet article). D'après les traditions familiales, c'est d'ailleurs grâce aux Weiss (Pierre et Jane) qu'ils se sont mariés. Échange de bons procédés, après la mort de Jane Weiss, c'est grâce aux Cotton (Aimé et Eugénie) que Pierre et Marthe Weiss se sont mariés. Celle-ci, mentionnée dans la note 2 était une amie d'Eugénie (et de Marie Curie).

« Madame Cotton » sera plus tard directrice de l'École de Sèvres. C'est elle qui décidera de mettre ses élèves au même niveau que les garçons de la rue d'Ulm, en leur donnant de jeunes professeurs (comme Jacqueline Ferrand et André Lichnerowicz) en mathématiques, et en les envoyant suivre les cours de l'université. Elle sera révoquée par Vichy : la « famille » Langevin-Cotton n'était pas en odeur de sainteté pendant l'Occupation[6].

Anna

Quant à Anna Cartan, c'est l'agrégation de mathématiques qu'elle a passée, en 1904 elle aussi. Et elle est devenue professeur de lycée, à Poitiers (1904–1906), puis Dijon (1906–1908), après quoi elle a bénéficié d'une bourse Albert Kahn « autour du monde[7] » pour l'année 1908–1909, elle en a profité pour visiter un certain

[6] Sympathisants communistes, Eugénie et son mari avaient, avant la guerre, aidé des réfugiés allemands et les républicains espagnols. Académicien des sciences, Aimé Cotton a été arrêté deux fois pendant l'Occupation.

[7] Sur les voyages effectués grâce à ces bourses, voir l'article [3].

nombre de pays et d'institutions, elle est même allée aux États-Unis, à Cuba, au Mexique et au Québec, ce qui n'était pas complètement évident en ce temps-là[8].

Elle est ensuite revenue à Dijon où elle est restée jusqu'en 1916. Elle a été nommée au lycée Jules Ferry à Paris, puis à Sèvres (l'école d'application annexée à l'École de Sèvres) en 1920. Elle a écrit plusieurs livres scolaires pour les élèves de la 6^e à la 3^e. Si l'on détaille la liste de ses ouvrages, on trouve :

– Arithmétique et géométrie. Première année. Enseignement secondaire des jeunes filles. En 1912 et 1921.

– Arithmétique. Enseignement secondaire des jeunes filles. Deuxième année. En 1913 et 1918.

Mais on trouve aussi

– Arithmétique. Enseignement secondaire, garçons et jeunes filles. Classes de 4^e et de 3^e. 1928 et 1931.

– Arithmétique. Enseignement secondaire, garçons et jeunes filles. Classes de 6^e et de 5^e. 1926.

Ces deux-là sont signés par Anna Cartan et Élie Cartan. Entre temps, les programmes des classes secondaires des garçons et des filles ont été unifiés, les manuels d'Anna Cartan devaient être assez appréciés pour être réédités, mais il est probable qu'il fallait un nom d'auteur masculin pour que le livre soit utilisé dans les lycées de garçons, de plus Anna Cartan était déjà décédée.

Anna Cartan est morte d'un cancer en 1923.

FIG. 3. Anna et Hélène Cartan, vers 1920

[8] Les archives d'Ellis Island se souviennent de son arrivée à New York le 8 mars 1909, sur le Celtic, elle venait de Londres et avait pris le bateau à Liverpool. Outre New York, elle est allée aux États-Unis à Saint-Louis, Chicago, Boston et aux chutes du Niagara.

Hélène Cartan (1917–1952)

Hélène Cartan, la petite sœur d'Henri Cartan, est née le 12 octobre 1917, treize ans après son frère Henri, huit ans après le plus jeune de ses frères, Louis, quatrième de sa fratrie comme sa tante Anna. La photographie de la figure 4 montre, debout de gauche à droite, le père (Élie), le fils aîné (Henri), la mère (Marie-Louise), et assis, les plus jeunes enfants, de gauche à droite Louis, Hélène et Jean.

FIG. 4. Les enfants d'Élie Cartan... et de Marie-Louise (Bianconi) Cartan

Comme ses frères, Hélène Cartan était musicienne et une excellente pianiste.

Elle est entrée à l'École normale supérieure (rue d'Ulm) en 1937. En ce temps-là, juste avant les réformes entreprises pas Eugénie Cotton et dont il a été question ci-dessus, les études étaient assez différentes à Ulm et à Sèvres, et personne n'avait encore réussi à interdire aux jeunes femmes de passer le concours d'entrée à l'ENS[9]. Elle était liée, par exemple, avec Jacqueline Ferrand, qui se souvient :

9 Parmi les premières femmes élèves de cette école, notons, sans exhaustivité, Marie-Louise Dubreil-Jacotin, dès 1926, une mathématicienne, Suzanne Roubaud-Molino, en 1927, une angliciste (qui sera aussi la mère du poète et mathématicien Jacques Roubaud), encore des mathématiciennes, Marie-Hélène Schwartz (fille de Paul Lévy et épouse de Laurent Schwartz, familles...) en 1934, Jacqueline Ferrand en 1936.

> *Nous habitions le même quartier, elle boulevard Jourdan, moi boulevard Brune, nous prenions le bus ensemble. Elle était très étourdie. Elle prenait la voiture de son père, l'oubliait et revenait en bus.*

Hélène Cartan a passé l'agrégation de mathématiques trois ans après, en 1940... Sa troisième année d'école a été gâchée par la guerre, comme me l'a dit Jacqueline Ferrand. Tous ses camarades garçons de l'ENS étant mobilisés, c'est l'agrégation féminine qu'elle a dû passer, avec les Sévriennes : la guerre, l'armistice en juin 1940, les seuls concours organisés ont été les agrégations féminines. Hélène a été reçue, bien sûr, première.

FIG. 5. Hélène Cartan en 1938

Et elle est devenue professeur de lycée. Elle a enseigné en particulier au lycée de Besançon. Ce qui ne l'a pas empêchée de commencer un travail de recherche et de publier son premier résultat comme note aux *Comptes rendus* [1]. Il s'agit d'une caractérisation du cercle parmi les espaces topologiques : un espace topologique E tel que E moins un point est connexe, E moins deux points ne l'est pas et, soit E est compact, soit E est localement connexe et contient un ensemble non dénombrable, est homéomorphe à un cercle. La note a été présentée à l'Académie des sciences par Élie Cartan, en 1942.

La photographie date de 1938 et montre une jeune femme heureuse. La suite de son histoire est plus tragique. Hélène Cartan a en effet contracté une forme très grave de tuberculose, la tuberculose *miliaire :* le bacille est disséminé dans tout l'organisme, c'est une maladie très contagieuse. Le risque de contagion a interdit à Hélène d'enseigner, et a sévèrement limité sa vie de famille (rappelons qu'un de ses frères, Jean, avait déjà succombé à la tuberculose en 1932).

Elle a passé beaucoup de temps dans des sanatoriums, à Pierrefontaine non loin de Besançon, à Saint-Hilaire du Touvet, près de Grenoble. On trouve par exemple mention d'elle et de sa maladie dans une lettre de Georges de Rham à Henri Cartan, en 1947 : de Rham, qui a un frère médecin à Leyzin, propose son aide au cas où Hélène voudrait venir à Leyzin.

La situation d'Hélène était certainement de plus en plus déprimante, au fur et à mesure que les années passaient. Un jour de 1952, elle est sortie se promener et a disparu pendant plusieurs jours, jusqu'à ce que son corps soit retrouvé dans la rivière Isère.

L'association des anciens élèves de l'ENS lui a consacré quelques lignes à la suite de la notice nécrologique sur son père, Élie Cartan, mort en mai 1951.

Remerciements

Principalement

– à Jacqueline Ferrand, qui m'a raconté ses souvenirs d'Hélène Cartan (le 1er octobre 2008),

– et... à deux sœurs de la famille Cartan, Françoise Adam et Suzanne Cartan, deux des filles d'Henri Cartan, pour les renseignements qu'elles m'ont donnés, les photographies reproduites ici et leurs encouragements.

Les renseignements sur les astronomes viennent du dictionnaire [7], dont je remercie Philippe Véron de m'avoir envoyé le fichier. Je remercie Rebecca Rogers pour m'avoir communiqué une copie de l'article [3].

Références

[1] H. Cartan – « Sur une caractérisation topologique de la circonférence », *C. R. Acad. Sci. Paris* **214** (1942), p. 23–25.

[2] H. Cartan – *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Enseignement des sciences, Hermann, Paris, 1961.

[3] L. Efthymiou – « Récits de voyage Quatre enseignantes à la Belle Époque », *Clio* **28** (2008), p. 133–144.

[4] H. Gispert – *La France mathématique*, Cahiers d'histoire & de philosophie des sciences, vol. 34, Société française d'histoire des sciences et des techniques, Paris, 1991.

[5] C. Marbo – *À travers deux siècles – Souvenirs et rencontres (1883–1967)*, Grasset, Paris, 1968.

[6] J. Tannery (éd.) – *Science et philosophie*, Librairie Félix Alcan, Paris, 1924.

[7] P. Véron – « Dictionnaire biographique des astronomes français (1850-1950) », non publié, 2004.

[8] M. Zerner – « Joseph Bertrand », [4], p. 298–322.

Le calcul de l'homologie des espaces d'Eilenberg-Mac Lane par Henri Cartan

François-Xavier Dehon[1]

Nous présentons et tentons de replacer dans son contexte le calcul par Henri Cartan de l'homologie des espaces d'Eilenberg-Mac Lane résumé dans [Ca1] et exposé en détail dans le Séminaire Cartan en 1954-55 [Ca2].

1. Complexes de chaînes, groupes d'homologie, groupes d'homotopie

Nombre des notions liées à ce calcul émergèrent dans les années 1930.

L'homologie des espaces topologiques d'abord, comme suite de groupes abéliens, même si certains invariants liés à ces groupes (leur rang, les coefficients de torsion) furent définis et calculés plus tôt dans le cadre des complexes simpliciaux (Poincaré [P], cf. [H-S]). Eilenberg [E], reprenant les travaux de Lefschetz, publie en 1943 la définition de l'homologie singulière d'un espace telle que nous la connaissons aujourd'hui (voir par exemple [SC1]) : à chaque espace topologique X est associé un complexe de groupes abéliens

$$\mathsf{C}_*(X) = (\mathsf{C}_n(X), d_n)_{n\geqslant 0}$$

formé d'une suite de groupes abéliens $\mathsf{C}_n(X)$ et d'homomorphismes $d_n : \mathsf{C}_n(X) \to \mathsf{C}_{n-1}(X)$, $n \geqslant 1$, tels que la composée $d_n \circ d_{n+1}$ est nulle. Le complexe $\mathsf{C}_*(X)$ défini par Eilenberg est appelé le complexe des chaînes singulières de X. Le n-ième groupe d'homologie (singulière) de X est le quotient $\mathrm{Ker}(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1})$, noté $\mathsf{H}_n(X)$.

Cette définition possède des variantes : l'homologie de X à coefficients dans un groupe abélien Λ, notée $\mathsf{H}_*(X;\Lambda)$, lorsqu'on remplace le complexe $\mathsf{C}_*(X)$ par $\mathsf{C}_*(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\Lambda$; la cohomologie de X à coefficients dans Λ, notée $\mathsf{H}^*(X;\Lambda)$, lorsqu'on remplace $\mathsf{C}_*(X)$ par le complexe des groupes d'homomorphismes $\mathrm{Hom}(\mathsf{C}_*(X),\Lambda)$.

À chaque application continue $X \to Y$ est associée une suite d'homomorphismes $\mathsf{C}_n(X) \to \mathsf{C}_n(Y)$ commutant avec les opérateurs d_n, donc induisant une suite d'homomorphismes $\mathsf{H}_n(X) \to \mathsf{H}_n(Y)$ et cette association est compatible avec la composition des applications : le complexe des chaînes singulières et son homologie sont fonctoriels en l'espace X. L'homologie d'un espace est par ailleurs un invariant homotopique : deux applications continues homotopes (*i.e.* l'une est une déformation continue de l'autre) induisent les mêmes homomorphismes entre les groupes d'homologie.

On dispose de morphismes canoniques

$$\mathsf{H}_*(X) \otimes \mathsf{H}_*(Y) \to \mathsf{H}_*(X \times Y)$$

et

$$\mathsf{H}^*(X) \otimes \mathsf{H}^*(Y) \to \mathsf{H}^*(X \times Y)$$

[1] Université de Nice, Laboratoire J.A. Dieudonné.

(le produit tensoriel est pris au sens gradué). Pour tout espace X, le second morphisme et l'application diagonale $X \to X \times X$ induisent une structure d'algèbre graduée commutative sur la cohomologie de X. Toute structure multiplicative sur X induit en vertu du premier morphisme une structure d'algèbre sur l'homologie de X.

Notons enfin que la graduation de l'homologie est liée à la suspension des espaces : la suspension ΣX d'un espace X muni d'un point base x_0 est le quotient du produit $S^1 \times X$ par le bouquet $S^1 \vee X$. L'espace ΣX est connexe et on dispose pour tout $n \geqslant 0$ d'un isomorphisme canonique entre $\mathrm{H}_{n+1}(\Sigma X)$ et le conoyau de l'application $\mathrm{H}_n(\{x_0\}) \to \mathrm{H}_n(X)$. On dit que l'homologie commute à la suspension.

Les groupes d'homotopie supérieurs $(\pi_n(X))_{n\geqslant 2}$ d'un espace X muni d'un point base furent introduits par Hurewicz vers 1935 comme généralisation du groupe fondamental $\pi_1(X)$ de Poincaré. Le groupe $\pi_n(X)$ est l'ensemble des classes d'homotopie d'applications pointées de la sphère S^n dans X (relativement au point base choisi sur X) muni d'une multiplication généralisant la composition des chemins (voir par exemple [SC2]). À l'opposé des groupes d'homologie ils sont difficilement calculables. Hurewicz construit l'homomorphisme $\pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ qui à une classe d'homotopie d'applications $S^n \to X$ associe l'image par l'application induite en homologie du générateur privilégié de $\mathrm{H}_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$. Cet homomorphisme est un isomorphisme si n est supérieur ou égal à 2 et si $\pi_k(X)$ est nul pour $k < n$. Ainsi on a $\pi_n(S^n) \simeq \mathrm{H}_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$. En 1950 on savait également déterminer les groupes $\pi_{n+1}(S^n)$ mais guère plus.

Les groupes d'homotopie des sphères sont encore loin d'être connus aujourd'hui mais Cartan et Serre [C-S] ont révolutionné le sujet en 1952 avec la suite spectrale d'un espace fibré et le calcul de l'homologie des espaces d'Eilenberg-Mac Lane. Nous exposons ci-dessous le calcul de Cartan à la suite des travaux d'Eilenberg et Mac Lane.

2. Complexes et espaces d'Eilenberg-Mac Lane

Les espaces d'Eilenberg-Mac Lane naissent avec l'homologie des groupes (cf. [ML]) : on savait depuis Hurewicz (1936) que les groupes d'homologie d'un espace connexe X dont les groupes d'homotopie $\pi_n(X)$ sont nuls pour $n \geqslant 2$ ne dépendent que du groupe fondamental $\pi_1(X)$. En 1942 Hopf donne une formule décrivant le deuxième groupe d'homologie d'un tel espace en fonction de son groupe fondamental.

Trois ans plus tard Eilenberg et Mac Lane [EML1] explicitent un complexe de groupes abéliens $K_*(\pi)$ dont l'homologie est celle de tout espace connexe par arc dont le groupe fondamental est π et dont les autres groupes d'homotopie sont nuls. Le complexe de groupes abéliens $K_*(\pi)$ est décrit algébriquement par ce qu'on appelle la résolution bar de l'algèbre $\mathbb{Z}[\pi]$ (nous revenons plus loin sur la résolution bar). Son homologie sera appelée l'homologie du groupe π.

Sous l'hypothèse que π est commutatif, les auteurs généralisent leur construction et explicitent un complexe $K_*(\pi, n)$, $n \geqslant 2$, dont l'homologie est celle d'un espace connexe par arc dont les groupes d'homotopie sont nuls sauf le n-ième qui vaut π. De tels espaces seront appelés par la suite espaces d'Eilenberg-Mac Lane et notés $K(\pi, n)$ même si seul leur type d'homotopie est déterminé de façon unique.

3. Motivations

L'homologie ou la cohomologie permettent de donner le reflet algébrique d'un problème topologique ou géométrique, ceci d'une façon d'autant plus efficace que l'homologie d'un espace a une structure algébrique riche tout en restant raisonnablement calculable. Alors qu'en 1945 les espaces $K(\pi, n)$ et leurs modèles algébriques ne sont que des généralisations du cas $n = 1$, on comprend dans les années 1950 par une théorie de l'obstruction que les classes d'homotopies d'applications d'un espace X dans un espace $K(\pi, n)$ sont naturellement en bijection avec les éléments du n-ième groupe de cohomologie de X à coefficients dans π. Serre [Se] en déduit que les éléments du groupe de cohomologie $\mathrm{H}^m(K(\pi, n), \pi')$, qu'on peut relier par une formule de coefficients universels à l'homologie entière de $K(\pi, n)$, sont en bijection avec les opérations cohomologiques $\mathrm{H}^n(X, \pi) \to \mathrm{H}^m(X, \pi')$ naturelles en X (on reconnaît aujourd'hui le lemme de Yoneda). De telles opérations commutant de plus à la suspension ont été construites par Steenrod [St] pour $\pi = \pi' = \mathbb{Z}/2$. Le calcul de l'homologie des espaces $K(\pi, n)$ permet d'une part d'obtenir exhaustivement les opérations cohomologiques, d'autre part d'obtenir les relations entre leurs composées.

Voici deux exemples spectaculaires de questions géométriques résolues via l'homologie :

Hopf [Ho1] montre en 1927 qu'une variété différentiable M admet un champ de vecteurs ne s'annulant pas seulement si la somme alternée des dimensions des groupes d'homologie de M à coefficients dans $\mathbb{Q}$ est nulle.

Dans les années 1930 Hopf [Ho2] s'intéresse également aux structures multiplicatives sur la sphère S^n. À toute application $S^n \times S^n \to S^n$ Hopf associe une application $f : S^{2n+1} \to S^{n+1}$ et un entier $\gamma(f)$ qu'on peut décrire comme suit (voir par exemple [SC3]) : les groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de la cofibre de l'application f sont canoniquement isomorphes à $\mathbb{Z}$ en degré 0, $n + 1$ et $2n + 2$. Le carré, pour la structure multiplicative de la cohomologie, du générateur de degré $n + 1$ est un multiple entier du générateur de degré $2n + 2$. Cet entier est $\gamma(f)$ et est appelé l'invariant de Hopf de f. Si la multiplication $S^n \times S^n \to S^n$ admet un élément neutre alors l'invariant de Hopf associé est 1 ; autrement dit l'algèbre de cohomologie de la cofibre mentionnée ci-dessus est l'algèbre de polynômes tronquée $\mathbb{Z}[x]/x^3$ où x est un générateur de degré $n+1$.

Plusieurs questions ont motivé Hopf dans la recherche d'applications d'invariant de Hopf non nul : d'une part cela fournissait des exemples d'applications entre sphères de dimensions différentes qui ne soient pas homotopiquement triviales ; la fibration de Hopf $S^3 \to S^2$ en est le premier. D'autre part l'existence d'une structure multiplicative avec élément neutre sur la sphère S^n est directement conséquence de la parallélisabilité de la sphère S^n (l'existence d'un champ de n vecteurs sur S^n qui forment en tout point une base de l'espace tangent). La parallélisabilité de la sphère S^n est elle-même une conséquence directe de l'existence d'un produit bilinéaire (non nécessairement associatif) sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que tout vecteur non nul admette un inverse à gauche et à droite (algèbres à division). On connaissait depuis le milieu du 19e siècle le corps des réels, des nombres complexes, des quaternions et l'algèbre des octonions de Cayley comme algèbres à division, mais il a fallu attendre les calculs par Bott des groupes d'homotopie du groupe orthogonal infini $\varinjlim O(n, \mathbb{R})$ (la fameuse périodicité de Bott) pour que soit prouvé le fait qu'il n'y en a pas d'autre ([B-M]).

Adem ([Ade], 1952) a montré en utilisant les relations sur les opérations de Steenrod qui portent son nom que l'algèbre $\mathbb{F}_2[x]/x^3$ avec x de degré $n+1$ ne peut être la cohomologie modulo 2 d'un espace que si $n+1$ est une puissance de 2. Adams ([Ada], 1960) a montré que les seuls entiers n possibles sont $0, 1, 3$ et 7. Ces deux résultats sont intimement liés au calcul de l'homologie stable des espaces d'Eilenberg-Mac Lane $K(\mathbb{Z}/2, n)$.

Enfin nous avons déjà mentionné l'importance de la détermination des groupes d'homologie des espaces $K(\pi, n)$ dans le programme révolutionnaire de Cartan-Serre [C-S] pour le calcul des groupes d'homotopie des sphères. Dans ce programme les espaces $K(\pi, n)$ jouent un rôle dual à celui joué par les sphères S^n dans la décomposition cellulaire d'un espace. Le programme est mis en perspective avec ses développements ultérieurs dans l'allocution d'Adams au colloque de 1974 en l'honneur d'Henri Cartan ([Ada2]).

4. L'approximation des complexes $K_*(\pi, n)$ par Eilenberg et Mac Lane : structure de dg-algèbre commutative et construction bar itérée

On sait dans les années 1930 que l'homologie à coefficients dans un corps du produit de deux espaces est canoniquement isomorphe au produit tensoriel au sens gradué des homologies (formule de Künneth), de sorte que l'homologie rationnelle d'un groupe topologique ou plus généralement d'un espace de lacets a une structure naturelle de $\mathbb{Q}$-algèbre graduée. Il faut cependant attendre Lefschetz (1942) et surtout Eilenberg-Zilber (1953) pour avoir une version satisfaisante de cet isomorphisme au niveau des complexes de chaînes : Eilenberg et Zilber explicitent un morphisme

$$\mathrm{C}_*(X) \otimes \mathrm{C}_*(Y) \to \mathrm{C}_*(X \times Y)$$

compatible avec l'échange de X avec Y et induisant un isomorphisme en homologie. Si X est muni d'une multiplication $X \times X \to X$ associative avec élément neutre, son complexe de chaînes hérite d'une structure de $\mathbb{Z}$-algèbre différentielle graduée. Nous dirons pour suivre la terminologie de Cartan que $\mathrm{C}_*(X)$ est une dg-algèbre sur l'anneau $\mathbb{Z}$. Si la multiplication sur X est de plus commutative alors la dg-algèbre $\mathrm{C}_*(X)$ est commutative au sens gradué (Cartan utilise le terme *anticommutatif*).

L'homologie entière d'un espace $K(\pi, n)$ a naturellement une structure de $\mathbb{Z}$-algèbre graduée puisqu'un tel espace est équivalent homotopiquement à l'espace de lacets d'un espace $K(\pi, n+1)$. Les méthodes simpliciales développées par Eilenberg et Zilber permettent à Eilenberg et Mac Lane en 1952 [EML2] de décrire le complexe $K_*(\pi, n)$ avec une structure de dg-algèbre commutative. (Précisément ils définissent $K_*(\pi, n)$ comme le complexe de groupes abéliens sous-jacent à l'algèbre d'un groupe abélien simplicial.)

Eilenberg et Mac Lane associent par ailleurs à toute dg-algèbre A_* le complexe total, noté $\bar{\mathsf{B}}(A_*)$, du complexe normalisé de la résolution « bar » simpliciale de A_*

$$\cdots A_*^{\otimes 2} \rightleftarrows A_* \,.$$

Ils montrent que si A_* est commutative au sens gradué, la structure de dg-algèbre de A_* induit une structure de dg-algèbre sur $\bar{\mathsf{B}}(A_*)$ (la commutativité est cruciale). Ils construisent ensuite un morphisme de dg-algèbres

$$\bar{\mathsf{B}}^{\circ n}(\mathbb{Z}[\pi]) \to K_*(\pi, n)$$

de source la construction bar itérée n-ième de l'algèbre du groupe π vue comme dg-algèbre concentrée en degré 0, induisant un isomorphisme en homologie. Cette approximation du complexe $K_*(\pi, n)$ leur permet de calculer les groupes $\mathsf{H}_{n+k}(K(\pi, n))$ pour des petites valeurs de k ([EML3]).

5. Le calcul de Cartan

Cartan introduit d'abord un mime algébrique de la notion de fibration principale : la notion de construction sur les dg-algèbres.

On fixe un anneau commutatif Λ. Une dga-algèbre sur Λ est un complexe de Λ-modules A_* muni d'un morphisme de complexes $A_* \otimes_\Lambda A_* \to A_*$ qui en fait une Λ-algèbre graduée, et d'une augmentation $A_* \to \Lambda$ qui est un morphisme de dg-algèbres (où Λ est vu comme dg-algèbre concentrée en degré 0). Un dga-module sur A_* est un complexe de Λ-modules M_* muni d'un morphisme de complexes $A_* \otimes_\Lambda M_* \to M_*$ qui en fait un A_*-module gradué, et d'une augmentation $M_* \to \Lambda$ qui est un morphisme de dg-modules sur A_*. La différentielle sur M_* induit une différentielle sur le Λ-module gradué augmenté $\Lambda \otimes_{A_*} M_*$.

Une construction est la donnée d'une dga-algèbre A_* sur Λ et d'un dga-module M_* sur A_* tel que M_* est acyclique comme complexe augmenté de Λ-modules. On dit que A_* est l'algèbre initiale de la construction (A_*, M_*).

Le prototype de construction est donné par le complexe des chaînes singulières d'un espace fibré principal : si G est un groupe topologique opérant sur un espace X de façon principale alors le complexe de chaînes $\mathsf{C}_*(G)$ est une dga-algèbre sur $\mathbb{Z}$, l'augmentation étant induite par l'unique application de G dans le point. L'action $G \times X \to X$ fait du complexe de chaînes $\mathsf{C}_*(X)$ un dga-module sur $\mathsf{C}_*(G)$. On dispose du morphisme de complexes

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathsf{C}_*(G)} \mathsf{C}_*(X) \to \mathsf{C}_*(X/G)$$

lequel induit un isomorphisme en homologie. Si l'espace X est contractile alors le quotient X/G a canoniquement le type d'homotopie de l'espace classifiant BG et le couple $(\mathsf{C}_*(G), \mathsf{C}_*(X))$ est une construction. Le quotient $\mathbb{Z} \otimes_{\mathsf{C}_*(G)} \mathsf{C}_*(X)$ est une approximation du complexe de chaînes de BG au sens qu'on dispose d'un morphisme

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathsf{C}_*(G)} \mathsf{C}_*(X) \to \mathsf{C}_*(BG)$$

induisant un isomorphisme en homologie.

Cartan donne un théorème de comparaison entre constructions : soient (A_*, M_*), (A'_*, M'_*) deux constructions et $f : A_* \to A'_*$ un morphisme de dga-algèbres. On suppose que M_* est libre comme A_*-module gradué. Alors il existe un morphisme de dga-modules $g : M_* \to M'_*$ compatible avec f et le morphisme induit

$$\bar{g} : \Lambda \otimes_{A_*} M_* \to \Lambda \otimes_{A'_*} M'_*$$

ne dépend à homotopie près que de f. Le morphisme induit en homologie par $\bar{g}$ est ainsi uniquement déterminé. Si on suppose de plus que M'_* est libre comme A'_*-module gradué et l'une des hypothèses suivantes :

(1) f est un isomorphisme,

(2) on a $\mathrm{H}_0(A'_*) \simeq \Lambda$ et $\mathrm{H}_*(f)$ est un isomorphisme,

alors $\bar{g}$ induit un isomorphisme en homologie. Cette dernière propriété est obtenue par un théorème de comparaison de suites spectrales dû à Moore.

Soit A_* une dga-algèbre commutative (au sens gradué). Une construction (A_*, M_*) est multiplicative si M_* est muni d'une structure de A_*-algèbre graduée commutative compatible avec la différentielle et l'augmentation. Le quotient $\Lambda \otimes_{A_*} M_*$ hérite alors d'une structure de dga-algèbre commutative sur Λ.

La construction bar s'inscrit dans les constructions de Cartan : il existe sur le A_* module gradué $\mathrm{B}(A_*) := A_* \otimes_\Lambda \bar{\mathrm{B}}(A_*)$ une différentielle faisant de $\mathrm{B}(A_*)$ un dga-module sur A_* et telle que le quotient $\Lambda \otimes_{A_*} \mathrm{B}(A_*)$ s'identifie à $\bar{\mathrm{B}}(A_*)$ comme complexe augmenté de Λ-modules. La construction bar $(A_*, \mathrm{B}(A_*))$ est spéciale au sens que pour toute construction (A'_*, M'_*) et pour tout morphisme $A'_* \to A_*$ de dga-algèbres il existe un unique morphisme de dga-modules $M'_* \to \mathrm{B}(A_*)$ envoyant le facteur direct $\Lambda \otimes_{A'_*} M'_*$ de M'_* sur le facteur direct $\bar{\mathrm{B}}(A_*)$ de $\mathrm{B}(A_*)$ (un tel morphisme est dit spécial). Cette unicité et la fonctorialité de $A_* \mapsto \mathrm{B}(A_*)$ montrent que la construction bar $(A_*, \mathrm{B}(A_*))$ est multiplicative lorsque A_* est une dga-algèbre commutative. Le quotient $\Lambda \otimes_{A_*} \mathrm{B}(A_*) = \bar{\mathrm{B}}(A_*)$ hérite alors d'une structure de dga-algèbre commutative sur Λ. L'unicité implique également que si (A'_*, M'_*) est une construction multiplicative et $f : A'_* \to A_*$ un morphisme de dga-algèbres alors l'unique morphisme spécial $M'_* \to \mathrm{B}(A_*)$ est multiplicatif. Il induit en particulier un morphisme de dga-algèbres

$$\Lambda \otimes_{A'_*} M'_* \to \Lambda \otimes_{A_*} \mathrm{B}(A_*) = \bar{\mathrm{B}}(A_*)\ .$$

Soit A_* une dga-algèbre commutative. Une construction multiplicative itérée d'algèbre initiale A_* est une suite $(A^{(n)}_*, M^{(n)}_*)$ de constructions multiplicatives avec $A^{(0)}_* = A_*$ et pour tout $n \geqslant 1$ un isomorphisme de dga-algèbres $\Lambda \otimes_{A^{(n)}_*} M^{(n)}_* \simeq A^{(n+1)}_*$. La construction bar permet d'obtenir une telle suite avec $A^{(n)}_* = \bar{\mathrm{B}}^{\circ n}(A_*)$. D'après ce qui précède l'identité de A_* se prolonge de façon récursive et unique en une suite de morphismes spéciaux $M^{(n)}_* \to \mathrm{B}(\bar{\mathrm{B}}^{\circ n}(A_*))$ lesquels induisent des morphismes $A^{(n+1)}_* \to \bar{\mathrm{B}}^{\circ n+1}(A_*)$. Si chaque $M^{(n)}_*$ est libre comme $A^{(n)}_*$-module gradué et si $\mathrm{H}_0(A^{(1)}_*) = \Lambda$ alors le théorème de comparaison mentionné plus haut montre que chaque morphisme $A^{(n)}_* \to \bar{\mathrm{B}}^{\circ n}(A_*)$ induit un isomorphisme en homologie. Ainsi fixons pour A_* l'algèbre $\mathbb{Z}[\pi]$ d'un groupe abélien π, vue comme dga-algèbre concentrée en degré 0 : $A_* = K_*(\pi, 0)$. On peut approcher la construction bar itérée $\bar{\mathrm{B}}^{\circ n}(A_*)$ et donc le complexe de chaînes d'un espace $K(\pi, n)$ par toute construction multiplicative itérée d'algèbre initiale A_*, pourvu que chaque $M_*^{(n)}$ soit libre comme $A_*^{(n)}$-module gradué.

Tout l'intérêt de la notion de construction multiplicative vient de ce qu'on peut souvent exhiber une construction multiplicative d'algèbre initiale A_* plus économique que la construction bar $(A_*, \mathrm{B}(A_*))$. Ceci est particulièrement fructueux lorsqu'on prend pour Λ le corps à p éléments, où p est un nombre premier fixé, et pour A_* l'algèbre d'un groupe π isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou au groupe cyclique $\mathbb{Z}/p^\alpha$ pour un $\alpha > 0$: Cartan exhibe une construction multiplicative itérée $(A_*^{(n)}, M_*^{(n)})$ d'algèbre initiale $\mathbb{Z}[\pi]$ telle que la différentielle est nulle sur chaque $A_*^{(n)}$, ce qui est loin d'être le cas pour la construction bar itérée $\bar{\mathrm{B}}^{\circ n}(\mathbb{Z}[\pi])$. Chaque construction $(A_*^{(n)}, M_*^{(n)})$ est donc minimale et $A_*^{(n)}$ est isomorphe comme $\mathbb{F}_p$-algèbre graduée à l'homologie modulo p de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(\pi, n)$.

Les constructions $(A_*^{(n)}, M_*^{(n)})$ de Cartan sont obtenues inductivement comme suit.

Pour un entier $m \geqslant 1$, on note $E(2m-1)$ le quotient de la $\mathbb{F}_p$-algèbre graduée commutative libre en un générateur x de degré $2m-1$ par la relation $x^2 = 0$ (cette relation est automatique si $p > 2$). On note $P(2m)$ le quotient de la $\mathbb{F}_p$-algèbre graduée commutative libre en des générateurs $x_1, x_2, \ldots$, où chaque x_k est de degré $2mk$, par les relations

$$x_k x_l = \frac{(k+l)!}{k!\, l!} x_{k+l}$$

($E(2m-1)$ est l'algèbre extérieure en un générateur de degré $2m-1$ et $P(2m)$ est l'algèbre à puissances divisées libre en un générateur de degré $2m$). On note enfin $Q(2m)$ l'algèbre de polynômes tronquée $\mathbb{F}_p[x]/x^p$ où x est de degré $2m$. L'algèbre graduée $P(2m)$ est isomorphe au produit tensoriel d'algèbres graduées $\bigotimes_{k\geqslant 0} Q(2m\, p^k)$.

On munit les algèbres graduées $E(2m-1)$, $P(2m)$ et $Q(2m)$ de la différentielle nulle. On observe d'abord qu'il existe une construction multiplicative d'algèbre initiale $\mathbb{F}_p[\pi]$ et d'algèbre finale $E(1)$ si $\pi = \mathbb{Z}$, $E(1) \otimes P(2)$ si $\pi = \mathbb{Z}/p^\alpha$. Cartan exhibe ensuite pour tout entier $m \geqslant 1$

– une construction multiplicative d'algèbre initiale $E(2m-1)$ et d'algèbre finale $P(2m)$; cette construction s'identifie à la construction bar $(E(2m-1), \mathrm{B}(E(2m-1)))$;

– une construction multiplicative d'algèbre initiale $Q(2m)$ et d'algèbre finale $E(2m+1) \otimes P(2mp+2)$; cette construction est plus petite que la construction bar.

Comme le produit tensoriel de deux constructions multiplicatives est une construction multiplicative, on obtient une construction multiplicative d'algèbre initiale $P(2m)$, $m \geqslant 1$, puis inductivement une construction multiplicative itérée d'algèbre initiale $\mathbb{F}_p[\pi]$.

Si π est un groupe abélien de type fini quelconque, on peut décomposer π en une somme directe de groupes monogènes. L'espace $K(\pi, n)$ a le type d'homotopie (comme espace de lacets) du produit des espaces $K(C, n)$, C décrivant les facteurs directs de π choisis. Son homologie à coefficients $\mathbb{F}_p$ est donc isomorphe comme algèbre au produit tensoriel des homologies des espaces $K(C, n)$. Par ailleurs, comme l'algèbre $\mathbb{F}_p[\pi]$ est le produit tensoriel des algèbres $\mathbb{F}_p[C]$, on peut prendre pour construction multiplicative itérée d'algèbre initiale $\mathbb{F}_p[\pi]$ le produit tensoriel des constructions multiplicatives itérées d'algèbre initiale les $\mathbb{F}_p[C]$.

On observe que si C est un groupe cyclique d'ordre premier à p alors l'application de $K(C, 1)$ dans le point induit un isomorphisme en homologie à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. Dit autrement, l'homologie modulo p du groupe C est nulle en degré strictement positif. On en déduit que si $(A_*^{(n)}, M_*^{(n)})$ est une construction multiplicative itérée d'algèbre initiale $\mathbb{F}_p[C]$ alors chaque $A_*^{(n)}$, $n \geqslant 1$, est acyclique comme complexe augmenté de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels.

Cartan expose un calcul plus intrinsèque et plus précis dans son séminaire.

Il introduit notamment la notion d'algèbre graduée à puissances divisées et montre que la partie paire de l'homologie des espaces $K(\pi, n)$ possède une telle structure.

On peut par ailleurs suivre au niveau des constructions multiplicatives l'application « suspension »

$$\Sigma K(\pi, n) \to K(\pi, n+1) \ .$$

Cartan en déduit l'homologie à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ du spectre d'Eilenberg-Mac Lane, c'est-à-dire la limite directe de la suite de groupes abéliens gradués

$$\mathrm{H}_{*+n}(K(\pi, n); \mathbb{F}_p) \to \mathrm{H}_{*+n+1}(K(\pi, n+1); \mathbb{F}_p) \to \cdots$$

induite par les applications $\Sigma K(\pi, n) \to K(\pi, n+1)$ et l'isomorphisme de suspension $\mathrm{H}_{k+1}(\Sigma X) \simeq \mathrm{H}_k(X)$. Cette limite directe s'interprète comme le dual du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel gradué formé des opérations sur la cohomologie modulo p commutant à la suspension.

En comparant les constructions multiplicatives itérées à coefficients entiers avec celles à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, Cartan donne un modèle (que nous n'explicitons pas) du complexe de chaînes à coefficients entiers d'un espace $K(\pi, n)$ comme dga-algèbre commutative et peut en décrire l'homologie.

6. Héritage et remarques

La cohomologie modulo 2 des espaces d'Eilenberg-Mac Lane avait été calculée en 1952 par Serre [SE] de façon différente en utilisant la suite spectrale de la fibration des chemins $PK(\pi, n+1) \to K(\pi, n+1)$ dont la fibre est un espace $K(\pi, n)$, dans l'esprit des calculs par Borel de l'homologie modulo p des espaces classifiants des groupes de Lie.

La notion de construction multiplicative et les équivalences d'homotopie entre constructions s'inscrivent à la suite des travaux de fondation de l'algèbre homologique par Cartan et Eilenberg [C-E], laquelle a conduit à la notion de catégorie dérivée d'une catégorie abélienne (Grothendieck).

La modélisation algébrique du complexe de chaînes ou de cochaînes des espaces intervenant dans une fibration est née à la fin des années 1940 avec notamment les travaux de Hirsch, ceux de Chevalley et Eilenberg sur la cohomologie de de Rham d'un groupe de Lie puis ceux de Cartan sur la cohomologie de de Rham des espaces homogènes de groupes de Lie. Elle s'est poursuivie avec la modélisation par Adams et Hilton (1956) du complexe de chaînes d'un espace de lacets et la construction cobar d'Adams. La situation exposée par Cartan où on obtient un modèle sans différentielle est exceptionnelle. Dans les situations générales l'algèbre homologique et l'introduction des suites spectrales permettent de relier les groupes d'homologie du modèle trouvé avec ceux des espaces considérés comme paramètres du problème. Ainsi la résolution bar servant à modéliser le complexe de chaînes du quotient X/G, où G est un groupe topologique opérant principalement sur un espace X, conduit à la suite spectrale de Rothenberg-Steenrod (1965) dont le terme E^2 est formé des groupes $\mathsf{Tor}^{\mathsf{H}_*(G)}(\mathsf{H}_*(X), \mathsf{H}_*(\mathrm{pt}))$ tout au moins lorsque l'anneau de coefficients est un corps. De même la résolution bar servant à modéliser le complexe de cochaînes de la fibre homotopique d'une application $X \to B$ conduit à la suite spectrale d'Eilenberg-Moore (1966) dont le terme E_2 est formé des groupes $\mathsf{Tor}_{\mathsf{H}^*(B)}(\mathsf{H}^*(X), \mathsf{H}^*(\mathrm{pt}))$.

En 1954 Thom a posé la question de la modélisation du complexe de cochaînes à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$ d'un espace topologique quelconque par une dga-algèbre commutative, situation qu'on rencontre pour le complexe de de Rham d'une variété différentiable ou pour le complexe de chaînes d'un espace d'Eilenberg-Mac Lane. Une solution fut donnée par Quillen en 1969 dans sa fondation de l'homotopie rationnelle puis par Sullivan (1977) avec ses modèles minimaux (voir [H-H] pour une histoire du sujet).

La situation est plus compliquée en caractéristique p : le complexe de cochaînes à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ d'un espace ne peut pas en général être modélisé par une dga-algèbre commutative – l'existence des opérations de Steenrod en témoigne – mais seulement par une algèbre sur une opérade E_∞. Mandell [Ma] a montré que la catégorie homotopique des espaces, du moins celle qu'on considère quand on complète les groupes d'homotopie en le nombre premier p, se plonge dans la catégorie homotopique des E_∞-dga-algèbres sur la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$. La complexité des E_∞-algèbres est cependant telle qu'on est loin du succès des calculs de Cartan ou des modèles minimaux de Sullivan.

Concluons en observant que, à la connaissance de l'auteur, l'exploitation du calcul par Cartan de l'homologie entière des espaces d'Eilenberg-Mac Lane appartient encore à l'avenir.

7. Bibliographie

[Ada] J.F. Adams, *On the non existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math. **72** (1960), 20-104.

[Ada2] J.F. Adams, *The work of M.H. Cartan in its relation with homotopy theory*, Colloque analyse et topologie en l'honneur de Henri Cartan, Astérisque **32-33** (1976), 29-41.

[Ade] J. Adem, *The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **38** (1952), 720-726.

[BIL] J.-B. Bost, L. Illusie et F. Loeser organisateurs, *Journée Henri Cartan* (2004), http ://www.diffusion.ens.fr/index.php ?res=cycles&idcycle=98

[B-M] R. Bott et J. Milnor, *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 87-89.

[Ca1] H. Cartan, *Sur les groupes d'Eilenberg - Mac Lane $H(\pi, n)$ I et II*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **40** (1954), 467-471 et 704-707.

[CA2] H. CARTAN, *Algèbres d'Eilenberg-MacLane*, Séminaire Henri Cartan 1954-1955, exposés 2 à 11 dans H. CARTAN, Oeuvres, vol. III, Remmert and Serre ed. (1979).

[C-E] H. CARTAN ET S. EILENBERG, *Homological algebra* (1956).

[C-S] H. CARTAN ET J.-P. SERRE, *Espaces fibrés et groupes d'homotopie I et II*, C. R. Acad. Sci. Paris **234** (1952), 288-290 et 393-395.

[E] S. EILENBERG, *Singular homology theory*, Ann. of Math. **45** (1944), 407-447.

[EML1] S. EILENBERG ET S. MAC LANE, *Relations between homology and homotopy groups of spaces*, Ann. of Math. **46** (1945), 480-509.

[EML2] S. EILENBERG ET S. MAC LANE, *On the groups $H(\pi, n)$ I*, Ann. of Math. **58** (1953), 55-106.

[EML3] S. EILENBERG ET S. MAC LANE, *On the groups $H(\pi, n)$ II*, Ann. of Math. **60** (1954), 49-139.

[EML4] S. EILENBERG ET S. MAC LANE, *On the groups $H(\pi, n)$ III*, Ann. of Math. **60** (1954), 513-557.

[H-H] K. HESS, *A history of rational homotopy theory* dans I.M. JAMES ED., History of topology, 757-796, (1999).

[H-S] K.S. SARKARIA, *The topological work of Henri Poincaré* dans I.M. JAMES ED., History of topology, 123-168, (1999).

[HO1] H. HOPF, *Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **96** (1927), 225-249.

[HO2] H. HOPF, *Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension*, Fundamenta Math. **25** (1935), 427-440, traduit en anglais dans B. ECKMANN ED., *H. Hopf Collected papers*, Springer (2001).

[MA] M.A. MANDELL, *E_∞-algebras and p-adic homotopy theory*, Topology **40** (2001), 43-94.

[ML] S. MAC LANE, *Origins of the cohomology of groups*, L'Enseignement Mathématique **24** (1978), 1-29.

[MO] J.C. MOORE, *Cartan's constructions, the homology of $K(\pi, n)$'s and some later developments*, Colloque analyse et topologie en l'honneur de Henri Cartan, Astérisque **32-33** (1976), 173-212.

[N-H] F. HIRZEBRUCH, *Division algebras and topology* dans H.D. EBBINGHAUS ET AL., *Numbers*, Springer (1990).

[P] H. POINCARÉ, *Analysis situs*, J. Ec. Poly. **1**, (1895), 1-121.

[SC1] *Séminaire Henri Cartan* **1** (1948-1949).

[SC2] J.-P. SERRE, *Groupes d'homotopie*, Séminaire Henri Cartan **2** (1949-1950), exposé 2.

[SC3] H. CARTAN, *Invariant de Hopf*, Séminaire Henri Cartan **11** (1958-1959), exposé 6.

[SE] J.-P. SERRE, *Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg - Mac Lane*, Comment. Math. Helv. **27** (1953), 198-232.

[ST] N.E. STEENROD, *Products of cycles and extensions of mappings*, Ann. of Math. **48** (1947), 290-320.