LIVRES

Combinatorics on words. Christoffel words and repetitions in words
J. Berstel, A. Aaron, Chr. Reutenauer et F. V. Saliola
AMS, 2009. 147 p. ISBN : 978-0-8218-4480-9. $51.00

Cet ouvrage trouve son origine dans deux cours de dix heures effectués par J. Berstel et Chr. Reutenauer en mars 2007, dans le cadre de l'école de printemps consacrée à la combinatoire des mots qui faisait partie du semestre thématique *Recent Advances in Combinatorics on Words* organisé au Centre de recherches mathématiques (CRM) de Montréal. Le texte se compose de deux parties. La première, correspondant aux cours dispensés par Chr. Reutenauer, est consacrée aux mots de Christoffel et à leurs applications en géométrie discrète, théorie des groupes et théorie des nombres. La seconde, reprenant les cours de J. Berstel, est centrée sur les répétitions dans les mots, finis et infinis.

Quoique la théorie des mots de Christoffel se soit développée au cours du dernier quart du XIX^{e} siècle, notamment dans des travaux de Christoffel, Smith et Markoff, la terminologie *mot de Christoffel* n'apparut qu'en 1990, dans un article de J. Berstel. Parmi les nombreuses définitions équivalentes des mots de Christoffel, les auteurs choisissent le point de vue géométrique suivant. Soient a et b deux entiers positifs premiers entre eux. Le chemin de Christoffel inférieur de pente b/a est le chemin reliant les points du plan $(0,0)$ et (a,b), formé de segments horizontaux et verticaux dont les extrémités ont des coordonnées entières, tel qu'aucun point du réseau $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ne se trouve dans la région du plan délimitée par ce chemin et la droite reliant les points $(0,0)$ et (a,b). Codant par x tout segment horizontal unité et par y tout segment vertical unité, le mot fini sur l'alphabet $\{x,y\}$ correspondant au chemin de Christoffel inférieur de pente b/a est, par définition, le mot de Christoffel (inférieur) de pente b/a. Ainsi, les mots de Christoffel (inférieurs) de pente 1 et 4/7 sont, respectivement, xy et $xxyxxyxxyxy$. Les chemins et mots de Christoffel supérieurs sont définis de manière analogue. La définition originale, qui figure dans l'article de 1875 de Christoffel, fait appel au graphe de Cayley et est présentée à la suite de la définition géométrique. Les six chapitres suivants sont notamment consacrés aux morphismes de Christoffel, à la factorisation des mots de Christoffel (tout mot de Christoffel w s'écrit de manière unique $w = w_1 w_2$, où w_1 et w_2 sont des mots de Christoffel ; il s'agit d'un résultat de J.-P. Borel et F. Laubie), à l'étude des éléments primitifs du groupe libre à deux générateurs, ainsi qu'à de nombreuses caractérisations équivalentes des mots de Christoffel, l'une d'elles établissant un lien entre les fractions continues, l'arbre de Christoffel et l'arbre de Stern-Brocot des nombres rationnels positifs. Enfin, au chapitre 8, les auteurs reformulent en termes de mots de Christoffel quelques-uns des résultats de Markoff démontrés dans ses célèbres mémoires sur les formes quadratiques binaires indéfinies.

Le fil conducteur de la seconde partie est le mot de Thue–Morse $\mathbf{t} = t_0 t_1 t_2 \ldots$, défini, pour tout entier $n \geq 0$, par $t_n = 0$ si l'écriture binaire de n comprend un nombre pair de chiffres 1, et par $t_n = 1$ sinon. De manière équivalente, $\mathbf{t}$ est le point fixe commençant par 0 du morphisme $\mu : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ défini par $\mu(0) = 01$ et $\mu(1) = 10$. Les auteurs démontrent qu'aucun sous-mot de $\mathbf{t}$ n'est de la forme $a\mathbf{w}a\mathbf{w}a$, où $a \in \{0,1\}$ et $\mathbf{w}$ est un mot fini. Le mot $\mathbf{t}$ leur sert de prétexte pour introduire les notions de suite automatique, de série génératrice, de langage formel, entre autres. Parmi les multiples résultats figurant dans le chapitre consacré exclusivement à l'étude des carrés (un carré est un mot de la forme $\mathbf{ww}$, où $\mathbf{w}$ est un mot fini) dans les mots finis, mentionnons que tout mot de longueur n contient au maximum $2n$ carrés différents. S'y trouve également un algorithme permettant de déterminer en temps linéaire si un mot fini possède ou non au moins un sous-mot de la forme $\mathbf{ww}$. Dans le dernier chapitre, les auteurs présentent plusieurs directions de recherches centrées sur des questions de répétitions dans les mots et de motifs évitables.

Cet ouvrage, fort agréable à lire et riche de plus d'une centaine d'exercices, peut sans hésitation être conseillé à tout étudiant de 4$^{\text{e}}$ année ou au-delà qui souhaiterait un premier contact avec la combinatoire des mots. Une grande partie des résultats présentés (certains d'entre eux ne sont pas démontrés) furent établis durant ces vingt dernières années. L'index terminal et la bibliographie sont très complets ; le fait que chaque référence est suivie des numéros des pages où elle est citée est également à souligner.

Yann Bugeaud,
Université de Strasbourg

A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration

David M. Bressoud

Cambridge University Press, MAA Textbooks, 2008. 328 p.
ISBN : 978-0521-7118-38. $39.99

Dans la lignée de son précédent ouvrage (A Radical Approach To Real Analysis – ARATRA), David Bressoud poursuit le double but d'enseigner dans le même temps les mathématiques et leur histoire. Le fil qui nous conduit, via la théorie de l'intégration de Lebesgue, de la construction des réels à l'analyse fonctionnelle moderne, peut se résumer en la question suivante : quand une fonction possède-t-elle une série de Fourier qui converge vers cette même fonction ? Pour y répondre, il aura fallu clarifier les notions de fonction, de continuité, d'intégrale et de convergence : c'est-à-dire tout le programme de fondation de l'analyse réelle.

Il n'est en effet pas inutile de rappeler que Riemann inventa l'intégrale qui porte son nom dans le seul but de calculer des coefficients de Fourier de fonctions. C'est à ce point, qui concluait ARATRA, que David Bressoud reprend son récit (chap. 1). En s'autorisant à considérer des fonctions « arbitraires » (même dans la classe des fonctions Riemann-intégrables), Riemann ouvre une boîte de Pandore qui devra attendre Lebesgue pour être refermée. Il construit notamment une fonction f intégrable mais discontinue en tout rationnel de dénominateur pair ; alors $\int_a^x f(t)dt$ est continue mais non différentiable en ces points (chap. 2). Cet exemple est le déclencheur des considérations qui conduiront Cantor et ses successeurs à se pencher sur l'insoupçonnée complexité des nombres réels et à fonder la théorie des ensembles (chap. 3).

L'ensemble triadique de Cantor (chap. 4), modèle indémodable de fractale, concentre les problèmes que devront résoudre la théorie de la mesure et l'intégration de Lebesgue. Cet ensemble parfait, nulle part dense mais indénombrable est certes intuitivement « petit » mais formaliser cette intuition requerra d'immenses efforts. La fonction traditionnellement appelée « escalier du diable », qui lui est associée, est un contre-exemple aux versions les plus naïves du théorème fondamental de l'analyse. Ainsi se profile le lent développement de la théorie de la mesure (chap. 5) grâce aux efforts de Peano, Jordan, Borel et finalement Lebesgue et Carathéodory. L'exemple classique d'un ensemble non mesurable, dû à Vitali (accompagné d'une brève discussion sur l'axiome du choix), n'est pas omis.

Au milieu du livre (chap. 6) l'intégrale de Lebesgue est enfin construite et l'exposé devient plus classique : fonctions mesurables puis intégrables, convergence monotone, lemme de Fatou, convergence dominée, théorèmes d'Egorov et de Luzin. Avec une touche d'ironie, l'auteur nous rappelle que Lebesgue, non content de rendre obsolète l'intégrale de Riemann, résout en même temps le vieux problème consistant à caractériser en termes de continuité les fonctions Riemann-intégrables (ce sont les fonctions bornées continues presque partout... au sens de la mesure de Lebesgue). Le chapitre suivant (chap. 7) revient sur le théorème fondamental de l'analyse à la lumière de l'intégrale de Lebesgue. La boucle est enfin bouclée (chap. 8) par un retour sur la convergence des séries de Fourier. L'approche classique (Dirichlet, Cesàro revu par Lebesgue) montre ses limites et le livre se conclut sur l'introduction des espaces de Banach L^p (le théorème de Carleson-Hunt est juste mentionné) et la preuve du théorème de Riesz-Fischer dans l'espace de Hilbert $L^2([-\pi,\pi])$.

Ce livre est d'une lecture agréable, il est extrêmement complet et bien informé. Il est à recommander à tous les étudiants (et leurs professeurs) souhaitant approfondir le sujet ou disposer d'un ouvrage de référence. La présentation exhaustive de toutes les étapes de la construction de l'intégrale de Lebesgue (sans omettre les errements et fourvoiements de certains parmi les plus grands noms des mathématiques comme Cauchy, Duhamel, Hankel, Harnack, du Bois Raymond...) nécessite une première approche sélective si l'on s'intéresse aux mathématiques plus qu'à leur histoire : la théorie de l'intégration proprement dite commence seulement au chapitre 5. Chaque section est accompagnée de moult exercices (certains extraits de *Problems in Mathematical Analysis* par Kaczor et Nowak, AMS 2000–2003) avec des indications de solutions en annexe. On trouve également en annexe la preuve (par récurrence transfinie) de la cardinalité $\mathfrak{c}$ de l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ et une présentation succincte de l'intégrale de Kurzweil-Henstock (l'auteur justifie son choix – discutable – de ne pas y accorder plus d'importance malgré son intérêt pédagogique certain). Noter enfin qu'un erratum pour ce livre est disponible à l'adresse :
`http://www.macalester.edu/aratra/Lebesgue/LebesgueCorrections.pdf`

Jean-Marie Aubry,
Université Paris XII–Val-de-Marne