

LIVRES

Partial Differential Equations in General Relativity

ALAN D. RENDALL

Oxford University Press, Graduate Texts in Mathematics, vol. 16, 2008. 352 p.

ISBN : 978-0199-2154-16. \$60

Ce livre est consacré aux aspects mathématiques de la relativité générale et en présente les développements les plus récents de manière concise. Il porte une attention particulière à la formulation des équations d'Einstein en un système hyperbolique symétrique avec contraintes couplé avec les équations d'évolution de la matière. Il est destiné aux étudiants de mastère, tant mathématiciens que physiciens, mais sera aussi apprécié des spécialistes de la relativité générale.

Rappelons que l'inconnue principale de la théorie est une variété lorentzienne de dimension quatre, (M, g) , satisfaisant aux équations

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta},$$

reliant le tenseur de courbure d'Einstein $G_{\alpha\beta}$ au tenseur de moment-énergie de la matière $T_{\alpha\beta}$. Le scalaire Λ représente la constante cosmologique de l'espace-temps, et les indices α, β varient de 0 à 3. (Par exemple, dans le vide le tenseur de courbure de Ricci d'une telle variété est identiquement nul.) Pour formuler le problème, on se donne une variété riemannienne de dimension trois (N, h) munie d'un champ de 2-tenseurs symétriques K . On cherche alors une variété lorentzienne (un développement maximal) satisfaisant aux équations d'Einstein avec la contrainte que (N, h) est isométriquement plongée dans (M, g) et admet K comme deuxième forme fondamentale.

Les deux premiers chapitres présentent les bases incontournables de la relativité générale d'un point de vue à la fois physique et mathématique : notions de géométrie lorentzienne, théorèmes d'incomplétude de Penrose et de Hawking, feuilletages $3 + 1$, et décompositions des équations d'Einstein.

L'auteur entre dans le vif de son sujet en mettant en parallèle différents modèles de matière : équations d'ondes pour les champs scalaires (à valeurs réelles ou à valeurs dans une variété), équations de Maxwell de l'électromagnétisme, équations de Yang-Mills, équations d'Euler des fluides compressibles et équation de Vlasov de la théorie cinétique des fluides raréfiés. Pour chacun de ces modèles, un Lagrangien détermine l'expression du tenseur de moment-énergie $T_{\alpha\beta}$ en fonction de la métrique lorentzienne et des variables physiques décrivant l'état de la matière.

Peu de résultats sont disponibles dans la littérature à ce niveau de généralité et, le plus souvent, des hypothèses sur les symétries de l'espace-temps sont nécessaires. L'auteur introduit ici les espaces-temps admettant un ou plusieurs champs de Killing : statiques, stationnaires, spatialement homogènes, etc.

Il consacre ensuite un chapitre à l'étude des espaces spatialement homogènes pour lesquels les équations d'Einstein se réduisent à des équations différentielles

non-linéaires. En dépit de leur simplicité apparente, ces modèles sont intéressants pour l'interprétation physique de la théorie. Par ailleurs, leur étude mathématique est très délicate et fait appel à toutes les facettes de la théorie des équations différentielles : variété centrale, systèmes dynamiques, théorie des bifurcations, etc.

La deuxième moitié de l'ouvrage traite directement la résolution du problème de Cauchy pour les équations d'Einstein. L'auteur présente d'abord les résultats principaux d'existence sans hypothèse de symétrie; ceux-ci sont centrés sur le théorème de Christodoulou et de Klainerman (stabilité de l'espace-temps de Minkowski). Il explique aussi les techniques d'analyse (harmonique) intervenant dans les démonstrations. Les derniers chapitres concernent les modèles possédant deux champs de Killing et l'auteur étudie en détail l'existence globale des solutions des équations d'Einstein et la nature géométrique de leurs singularités, ce qui lui permet de déterminer le comportement asymptotique des espace-temps construits.

En conclusion, il s'agit d'un ouvrage particulièrement bien organisé et documenté, dont la lecture est vivement recommandée et permet d'accéder à l'état de l'art sur le sujet.

Philippe G. LeFloch,
Université Paris VI

Cantor et la France - Correspondance du mathématicien allemand avec les français à la fin du XIX^e siècle

A.-M. DÉCAILLOT

Éditions Kimé, 2008. 372 p. ISBN : 978-2-84174-467-1. 29€

Tout a été dit sur Georg Cantor (1845-1918), le mathématicien allemand créateur de la théorie des ensembles, langage universel des mathématiques. David Hilbert, l'un des guides mathématiques du vingtième siècle rendait grâce à Cantor d'avoir amené les mathématiciens « *au Paradis dont nul ne pourra les chasser* ». Nous y sommes encore.

On a longuement analysé la vie de Cantor, l'hostilité que ses travaux ont suscitée chez ses collègues de la bonne université luthérienne de Halle, et surtout chez son ennemi Kronecker, on a même fait de lui un héros d'opéra¹, tant sa vie a été marquée d'événements tragiques, de conflits familiaux, de brimades professionnelles, de crises schizo-phréniques délirantes, jusqu'à sa mort après plus d'un an passé à l'asile psychiatrique de Halle. Cette personnalité complexe a conduit Cantor à des découvertes mathématiques capitales mais aussi par exemple à des années de recherches pour démontrer que Shakespeare n'avait pas existé ! Une grande partie de sa correspondance est encore non publiée. Anne-Marie Décaillot, historienne des mathématiques, s'est attachée aux courriers avec ses correspondants français, mathématiciens, philosophes, entre autres. Cette correspondance qu'elle a étudiée dans le texte allemand, prend souvent la forme de brouillons difficiles à déchiffrer. Elle est ici analysée, publiée et annotée de manière détaillée. Elle révèle un Cantor qui s'intéresse à la politique de la science, initiateur des relations internationales entre mathématiciens, malgré les tensions entre les deux grandes écoles. Cantor s'informe précisément des débats français, par exemple de la tentative de Jules Ferry en 1880 de réduire l'enseignement catholique (sa tentative aboutira à la séparation

¹ cf. Cantor à Halle, J.-M. Kantor, *La Quinzaine littéraire*, 2006.

de l'enseignement privé en 1905). Cantor prend évidemment partie pour l'enseignement « libre » contre le scientisme positiviste. Ses travaux mathématiques sont justifiés par une profonde connaissance de la philosophie et de la théologie. Ainsi montre-t-il dans ces lettres sa profonde connaissance de Spinoza, dont Anne-Marie Décaillot déconstruit correctement l'influence, des débats théologiques comme des courants ésotériques les plus variés (tel celui des rosicruciens que Leibniz connaissait aussi). Cantor se propose par sa théorie des nombres transfinis d'œuvrer au rapprochement entre la science et la religion : Dieu s'identifie à l'« ensemble de tous les ensembles » ! Le cri de Cantor : « *L'essence des mathématiques, c'est la liberté!* » venait en apogée d'une réflexion approfondie de nature philosophique (de Platon à Spinoza en passant par Nicolas de Cues) et théologique. Mais l'irruption du sujet au cœur de la science a fait le bonheur des délires de tous ordres, en particulier avec la mathesis lacanienne.

Ces lettres inédites montrent que Cantor mérite mieux.

Jean-Michel Kantor,
Institut de Mathématiques de Jussieu

L'analogie dans la démarche scientifique. Perspective historique

M.-J. DURAND-RICHARD, DIR.

L'Harmattan, 2008. 312 p. ISBN : 978-2-296-05072-3. 31€

Consacrer un ouvrage au rôle de l'analogie dans la construction scientifique constitue une entreprise audacieuse et empreinte de modernité. Il suffit de rappeler que, de nos jours, l'analogie est à la source de la correspondance suggérée par Robert Langlands entre la théorie des nombres et la représentation des groupes. Les implications de cette correspondance donnent lieu à conjectures ; la résolution de l'une d'entre elles, due à Emil Artin, par Langlands et Tunnell est l'un des points de départ du travail d'Andrew Wiles sur le « grand » théorème de Fermat.

L'ambition des auteurs du livre rédigé sous la direction de Marie-José Durand-Richard² est d'approfondir la démarche analogique sous l'angle historique, dans une perspective pluridisciplinaire. La diversité des approches souligne à l'évidence la polysémie du terme « analogie », et l'usage diversifié qu'en font les philosophes, savants et scientifiques qui y ont recours. L'un des mérites de l'ouvrage est d'apporter de nombreux éléments qui contribuent à clarifier ces différentes fonctions, tout en réhabilitant la démarche de production de nouvelles idées qui en découle. Cette originalité est particulièrement mise en évidence dans le domaine mathématique. En effet, faire intervenir des analogies en mathématiques ne consiste pas seulement à observer des similitudes entre des situations différentes, mais aussi à « créer de nouveaux objets ou de nouvelles théories en mobilisant le modèle d'une théorie déjà existante » (p. 98), et à englober l'ensemble dans une nouvelle théorie plus générale.

La contribution de Christian Houzel est riche en exemples de cette situation. L'analogie entre les nombres décimaux et les polynômes, dont l'écriture se trouve calquée sur l'écriture décimale, est en ce sens significative comme chez l'algébriste arabe al-Karajî (10^e-11^e siècle). Les mathématiciens arabes initient un calcul sur

² Les auteurs sont P. Bromberg, C. Comte, G. Denis, M.-J. Durand-Richard, A. Herreman, C. Houzel, P. Huneman, M. Paty, A. Volkov.

les fractions décimales et sur des polynômes (en x et $1/x$) à partir du calcul usuel sur les nombres, parvenant à extraire des racines d'ordre quelconque. Ces méthodes ont un effet en retour sur la conception des nombres : les irrationnels sont dès lors perçus comme des quantités arithmétiques et non plus seulement comme des grandeurs géométriques. De telles pratiques opératoires influenceront Léonard de Pise et conduiront Raphaël Bombelli à les mettre en œuvre sur des écritures provisoirement insensées : les futurs nombres complexes.

Qu'il s'agisse de penser les séries infinies de puissances à partir des nombres obtenus grâce à leurs développements décimaux illimités, ou les nombres algébriques à partir des fonctions algébriques, dans chaque cas étudié par Houzel, l'analogie s'appuie sur l'idée de la stabilité opératoire de règles issues d'un champ mathématique donné et transposées dans un autre contexte. Le rôle du mathématicien est de produire des objets nouveaux, de spécifier la définition de ces objets en vue de garantir cette stabilité opératoire. On voit ici la fécondité structurante de l'analogie mathématique, bien éloignée d'une simple métaphore.

C'est en particulier en algèbre que l'analogie opère le transfert de procédures opératoires d'entités connues à d'autres entités qu'il s'agit de construire comme objets mathématiques nouveaux. La contribution de M.-J. Durand-Richard approfondit le recours à l'analogie au sein de l'École algébrique anglaise autour de Charles Babbage, John F. W. Herschel et George Peacock. Le calcul sur les « quantités impossibles », comme $\sqrt{-1}$, et sur les opérateurs différentiels développe une logique propre aux opérations que Peacock désignera comme le « langage du raisonnement symbolique » ou « l'algèbre symbolique », le passage formel au symbole s'accompagnant d'un renoncement au sens. Seules comptent désormais les lois générales qui structurent les opérations de l'algèbre symbolique. Le réseau des algébristes anglais vise à contrôler l'usage extensif de l'analogie, sans éliminer la richesse des résultats obtenus, tout en réaffirmant la généralité des opérations de l'esprit. Si les anglais ont conscience de l'importance de l'analogie, on peut remarquer cependant qu'ils n'assument pas complètement l'idée qu'elle peut conduire à la production d'idées nouvelles dans le domaine scientifique. À partir des travaux de Tarski (1939), la reconnaissance de structures algébriquement équivalentes permet un parallèle entre les énoncés démontrables dans chacun des systèmes. Un « principe de transfert » permet alors d'obtenir des énoncés vrais par passage d'un modèle d'une théorie complète à une autre, le transfert s'effectuant dans les deux sens. Le statut de l'analogie s'est alors transformé, du fait qu'elle permet d'établir des relations devenues réciproques entre les modèles qu'elle structure, ainsi qu'entre syntaxe logique et sémantique mathématique.

Une tout autre approche apparaît dans les mathématiques chinoises, longtemps décriées. Alexei Volkov souligne qu'elles offrent plusieurs types de raisonnements par analogie. La démarche la plus fréquente est la « démonstration par un exemple » (p. 65), où le lecteur est jugé capable de comprendre une situation complexe à partir d'une étape plus simple. Les mathématiciens chinois préfèrent présenter en effet leur raisonnement à l'aide de cas particuliers conçus comme participant d'un modèle général. Ainsi les méthodes de calcul des aires de figures planes, ou des volumes, se ramènent à des calculs standard : un trapèze est comparé à un rectangle, un prisme trapézoïdal à un parallélépipède, etc. Une lecture herméneutique identifie ces « calculs emblématiques » à l'exercice de procédures algorithmiques fondées

sur des analogies opératoires.

Alain Herreman insiste de son côté sur la méthode analogique mise en œuvre par Poincaré dans la définition de l'homologie, en référence à l'écriture algébrique équationnelle. Cette analogie, au fondement de la topologie algébrique, intervient tout d'abord au niveau « lexical », ce qui permet à Poincaré de transférer aux espaces les propriétés d'invariance opératoire des nombres. Les homologies peuvent être additionnées comme des équations ordinaires (p.115). Cette opération permet d'obtenir des invariants topologiques, tout en développant une vision porteuse de nombreuses recherches ultérieures.

Michel Paty analyse le sens de l'analogie chez Poincaré, dans le travail que ce dernier met en œuvre en relation avec la physique. Une première lecture permet de voir dans l'analogie non un principe d'explication, mais une « constatation d'identité profonde de structure dans les théories mathématiques ou dans les phénomènes physiques » (p.172). Cependant l'analogie semble avoir une fonction plus directe dans le raisonnement : l'utilisation par Felix Klein des propriétés des courants électriques lui permet de résoudre certaines questions relatives aux surfaces de Riemann. Inversement la forme d'une relation mathématique peut suggérer les relations qui lient des grandeurs physiques et cette « analogie mathématique » structurelle permet à la physique d'établir les lois générales des phénomènes. Dans l'histoire de la physique, ceci correspond par exemple au passage d'une mécanique newtonienne des forces à une physique mathématique lagrangienne et hamiltonienne. Un autre exemple est celui de l'électrodynamique de Maxwell, où ce dernier constate que « les équations deviennent plus symétriques quand on y ajoute un terme » (p. 182), devançant en cela l'expérience. Et Poincaré de conclure que Maxwell savait penser la physique selon les rapports mathématiques dont la symétrie est un trait significatif. Poincaré lui-même rapprochera deux problèmes, l'un lié à la théorie de la chaleur, l'autre à l'électrostatique, en montrant que tous deux se ramènent au problème de Dirichlet (trouver une fonction vérifiant une équation, avec certaines conditions aux limites) : « ces théories semblent des images calquées l'une sur l'autre » (p. 183). Plus qu'un outil de calcul, l'analyse mathématique aurait pour but de révéler « l'harmonie des choses » en les « faisant voir sous un nouveau biais » (p. 184) et en les regroupant par analogie. Michel Paty insiste sur le parallélisme entre l'épistémologie de Poincaré et les analyses de Kant. « Pour Poincaré, les mathématiques, essentiellement par l'Analyse, ont pour la physique la fonction de procurer une réalisation effective (ou une application ?) de ces lois transcendantales que sont les analogies de l'expérience au sens kantien. » (p. 188).

Claude Comte s'inscrit délibérément dans une démarche qui permet de déduire les lois fondamentales de la physique d'un petit nombre d'hypothèses générales, dont découle une unification des théories physiques. Centré initialement sur le modèle du levier d'Archimède, son raisonnement analyse le transfert de la structure mathématique exprimant les relations barycentriques du domaine de la statique, à ceux de la dynamique et de la cinématique relativistes, jusqu'à la théorie des champs de probabilité quantiques. Pour cet auteur, la théorie mathématique des groupes, incluant la notion d'invariance, permet l'expression des lois fondamentales de ces théories physiques, et l'analogie sert de critère de sélection dans la recherche de principes appropriés. À l'inverse, la rupture de l'analogie fait surgir des questionnements qui suscitent le progrès de la théorie : c'est en ce domaine

que se situe le pouvoir heuristique de la démarche. Trois exposés, sur la conception aristotélécienne de l'analogie par Philippe Huneman, sur les sciences du végétal par Giles Denis, enfin sur la biologie moléculaire par Paul Bromberg, viennent heureusement compléter les analyses mathématiques et physiques.

L'exposé introductif de M. J. Durand-Richard tire les leçons d'une telle diversité d'approches, après une analyse des images de la science, telle qu'elle se donne à voir dans les théories achevées. Pour l'auteur, « l'empirisme logique a poussé à son paroxysme cette ambition philosophique d'un discours scientifique réduit à une syntaxe et à une sémantique, avant que le théorème d'incomplétude de Gödel ne vienne en ruiner l'utopie » (p. 3). Les mathématiques ne peuvent dès lors plus être interprétées stricto sensu comme une grammaire universelle du discours scientifique. Le langage formel apparaît fermé, clos sur lui-même, alors que les mathématiques et le discours scientifique demeurent ouverts, et par là porteurs d'une richesse polysémique bien vivante. La lecture « interne » des théories scientifiques achevées ne peut suffire, car elle peine à prendre en compte la production d'idées nouvelles.

La démarche analogique permet de mieux appréhender la complexité de la démarche scientifique, perçue comme un processus historique marqué par l'élaboration de significations nouvelles. Elle dépasse rapidement la métaphore lexicale, indice de rapprochement, pour étendre le champ opératoire. Qu'il s'agisse de l'extension de la notion de proportion entre des grandeurs, de la notion de morphisme entre des structures, ou de l'observation de l'identité opératoire entre le calcul de $(x + y)^n$ et celui de $d^n(xy)$, ce champ demeure en tout état de cause soumis à l'exigence de cohérence logique. La recherche de stabilités opératoires structurantes, sans que soit précisée la signification de ces phénomènes, conduit certes à l'installation du formalisme algébrique, du calcul fonctionnel ou du calcul symbolique. Et l'algèbre s'autorise à étendre des propriétés opératoires à de nouvelles entités, à établir des « formules » garantissant la concordance des résultats de deux calculs. L'analogie y gagne un nouveau statut lié au développement de l'algèbre. Mais ce processus « laisse en suspens l'interrogation sur la nature des signes utilisés et sur ce qu'ils sont censés représenter » (p. 19). Penser l'analogie permet donc d'appréhender la pleine signification du discours scientifique, et de prendre en compte cette suspension de la représentation, pour interroger la manière dont les processus opératoires modifient la référence de ce discours.

Anne-Marie Décaillot,
Université Paris V

Complex Analysis and CR Geometry

G. ZAMPIERI

AMS, University Lecture Series, vol. 43, 2008. 200 p.

ISBN : 978-8218-4442-7. 45\$

Née autour de l'année 1970 avec quelques mémoires de E. Bishop, S. Pinchuk, H. Alexander, S.M. Webster, G. Henkin, C. Fefferman, S.-S. Chern et J. Moser, K. Diederich, J.E. Fornæss, et déjà présente en germe dans les travaux de H. Lewy, L. Hörmander, J.J. Kohn, F. Trèves sur l'hypoellipticité des systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles tels que le $\bar{\partial}$ tangentiel (années 1960), la géométrie de Cauchy-Riemann (dite CR) a maintenant acquis ses lettres de

noblesse comme domaine de recherche en mathématiques, et elle incorpore aujourd'hui des problèmes et des techniques reliés à des sujets aussi divers et variés que les formules intégrales, la géométrie analytique locale, l'analyse harmonique, les connexions au sens d'Élie Cartan, les espaces homogènes, les courbes holomorphes au sens de Gromov, la géométrie symplectique, l'analyse microlocale, la théorie géométrique des équations aux dérivées partielles, la théorie des feuilletages, l'homologie de Floer, etc. Complémentarité entre le champ réel et le champ complexe, encore un effet de l'unité des mathématiques. Comme dans de nombreux autres domaines relativement jeunes et en mutation permanente, on manque ici de monographies systématiques et « *up-to-date* ».

Auprès d'un public de (post-)doctorants vraiment novices, le livre modeste de G. Zampieri tente spécialement de rendre attractif la thématique du prolongement holomorphe *via* la méthode des disques analytiques, laquelle a connu son heure de gloire au début des années 1990, notamment avec les travaux de J.-M. Trépreau et d'A. Tumanov.

Sans prétention, le premier chapitre est consacré à un très classique rappel de la théorie de base des fonctions de plusieurs variables complexes, qu'on enseigne toujours dans les cours de niveau M2 de part le monde. Le lecteur croit reconnaître en partie le plan des premières pages du célèbre livre de L. Hörmander *An introduction to complex analysis in several variables* (North Holland, Amsterdam, 1966), ce « diamant », disait J. Détraz. Il y est question de formule de Cauchy, de développement en série entière, de théorème de convergence, de domaines de Reinhardt, de fonctions plurisousharmoniques, d'analyticité séparée, de forme de Levi, de théorème d'extension de Lewy, de théorème de Hanges-Treves sur la propagation du prolongement holomorphe le long de courbes holomorphes contenues dans un bord de domaine, de domaine d'holomorphie, de convexité holomorphe, de pseudoconvexité. Seule note de « nouveauté » à ce chapitre : la solution au problème de Levi (équivalence entre la notion de domaine pseudoconvexe et celle de domaine d'holomorphie) est traitée *via* une version du $\bar{\partial}$ -Neumann dans certains domaines q -pseudoconvexes, en un sens précis propre à l'auteur, avant un passage à la limite par exhaustion.

Le chapitre 2 est consacré à quelques notions de base de la géométrie différentielle : champs de vecteurs, théorème de Frobenius, espaces symplectiques réels, formes normales locales de Darboux-Frobenius. Une section présente les estimées sous-elliptiques de Hörmander pour les systèmes de champs de vecteurs à coefficients C^∞ satisfaisant à la condition d'accessibilité de Chow, l'ordre de sous-ellipticité n'étant pas optimal. Enfin, dans une courte dernière section, on regrettera que l'auteur se soit contenté de renvoyer à l'article original de H.J. Sussmann pour présenter la notion d'orbite d'un système de champs de vecteurs, parce qu'elle est intrinsèquement reliée aux propriétés de prolongement holomorphe des fonctions CR.

Le troisième et dernier chapitre constitue en principe le cœur de l'ouvrage. Structures presque complexes, variétés CR, sous-variétés génériques, sous-variétés totalement réelles, fonctions CR et applications CR apparaissent enfin. Fait symptomatique, le théorème de réalisation des structures presque complexes involutives, dû à Newlander-Nirenberg, est énoncé en tant que tel, mais G. Zampieri annonce dans la « démonstration » qu'il traitera le cas plongé (*sic!*) du théorème, énoncé

élémentaire et beaucoup plus ancien, en fait dû à Levi-Civita, et qui dit seulement qu'une sous-variété réelle \mathcal{C}^1 de \mathbb{C}^n dont les espaces tangents sont J -invariants est holomorphe. Le théorème facile de plongement des structures CR analytiques réelles est redémontré sans même mentionner le saut gigantesque qu'il faudrait faire pour restituer les travaux profonds de M. Kuranishi, S.M. Webster, T. Akahori, D. Catlin, J. Michel, dans le cas \mathcal{C}^∞ ou $\mathcal{C}^{\kappa,\alpha}$, ce qui aurait éventuellement pu aiguïser la curiosité des meilleurs lecteurs : on attend depuis longtemps une telle monographie. Le théorème classique d'approximation uniforme des fonctions CR continues par des polynômes holomorphes dû à S. Baouendi-F. Trèves apparaît. Dans les toutes dernières sections, en travaillant avec le fibré conormal, G. Zampieri reconstruit le théorème d'extension holomorphe à un wedge des fonctions CR définies sur une sous-variété générique minimale et il traite du défaut des disques analytiques attachés comme le faisait A. Tumanov dans son article original de 1988. Pour cette partie à mon humble avis, deux articles de survol élégants et concis mais peu cités de J.-M. Trépreau³ et de A. Tumanov⁴ restent, malgré une autre tentative précédente de Baouendi-Ebenfelt-Rothschild dans leur livre publié à Princeton, la meilleure référence à étudier.

Joël Merker,
École Normale Supérieure, Paris

³ Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 21, Birkhäuser, Boston, MA, 1996, pp. 333–355.

⁴ Lecture Notes in Math., 1684, Springer-Verlag, Berlin, 1998, pp. 123–141.