TRIBUNE LIBRE

Réflexions sur le programme de mathématiques des CPGE

Pierre Colmez

J'ai repris le cours de tronc commun à l'école Polytechnique l'année dernière, et j'ai été assez surpris par le contenu du programme des classes préparatoires. Il est clair qu'au fil des années, le niveau en mathématiques à la sortie du lycée a baissé dans des proportions considérables[1], mais j'ai quand même du mal à comprendre comment, en réunissant des enseignants compétents et disposés à consacrer beaucoup d'énergie à leur enseignement, et des élèves motivés par la préparation de concours qui vont conditionner leur avenir, on aboutisse à un programme aussi peu stimulant[2].

Ce programme donne assez nettement l'impression d'avoir perdu en cours de route l'objectif principal des classes préparatoires qui est de préparer aux études dans les Grandes écoles d'ingénieur[3] et pas de réduire[4] le contenu dans le but que les élèves soient à même d'avoir fait tous les exercices possibles et imaginables sur les notions du programme en vue du concours d'entrée. Le décalage est assez grand

[1] En raison de la diminution constante de l'horaire de mathématiques dans le secondaire pour des raisons budgétaires (si mes souvenirs sont bons, la France a été confrontée au début des années 1990 à une pénurie de professeurs de mathématiques au point qu'il avait été envisagé de faire appel à des ingénieurs payés plus cher pour assurer les cours ; la solution finalement retenue a été nettement moins coûteuse...) dissimulées derrière des prétextes de « santé publique » (comme la surcharge de travail des élèves...), et des motivations idéologiques de certains de nos ministres de l'éducation.

[2] Je parle du programme officiel. La réalité est moins sombre car les enseignants prennent souvent sur eux de boucher les trous les plus criants du programme. Je ne pense pas que ce soit une situation très saine. Des discussions avec des polytechniciens fraîchement émoulus m'ont révélé que certains avaient vu la théorie de la mesure, d'autres la théorie des espaces de Banach (incluant Banach-Steinhaus, le théorème de l'image ouverte...), que des PC avaient vu le déterminant en passant par S_n et la signature... Je ne peux que me féliciter de ces dépassements de programme, mais leur diversité fait qu'il est difficile de savoir ce que les gens que j'ai en face de moi savent réellement (d'autant plus qu'ils savent aussi qu'ils ne sont pas censés savoir, juridisme des concours oblige...).

[3] Il est assez symptomatique que les « objectifs de formation » du programme ne mentionne pas une seule fois ce rôle.

[4] Ce processus de fractalisation a atteint un niveau assez sidérant : je comptais m'appuyer sur la forme normale d'une rotation dans $\mathbf{R}^n$ pour expliquer ce que signifie la décomposition d'une représentation linéaire d'un groupe fini en somme de représentations irréductibles ; vérification faite, la notion est *explicitement* hors programme, ce qui en dit long sur la manière dont le programme est rédigé (ce n'est pas que je pense qu'il s'agisse d'une notion tellement fondamentale que sa disparition constitue un scandale, mais le fait que les rédacteurs du programme aient pris le soin de rajouter un alinéa pour l'exclure officiellement est proprement incompréhensible).

avec les « objectifs généraux de la formation » qui donneraient presque[5] à penser que l'on va avoir droit à un programme cohérent[6], un peu ambitieux et menant quelque part.

Le programme actuel

Aspect culturel

Le problème le plus aigu, à mon sens, du programme actuel est son étroitesse. Si on compare le programme officiel des deux ans de la filière MP (je n'ai pas fait l'exercice pour la filière PC) à celui des deux premières années de l'université de Cambridge[7], on s'aperçoit que ce programme correspond à environ 150 heures de cours magistraux à Cambridge[8]. Même en tenant compte de la différence de niveau à l'entrée (qui n'est pas si importante que cela), cela laisse un temps non négligeable en CPGE[9], où l'on dispose au total de 700 heures environ, pour faire autre chose que ce qui est au programme officiel (et donc soit du bachotage stérile, soit des dépassements de programme formateurs, mais laissés à l'appréciation du professeur).

Les élèves des CPGE ne voient, à part peut-être[10] $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, pas une seule construction[11] d'objet mathématique en 2 ans, et le nombre de concepts et de vrais théorèmes[12] qu'ils rencontrent est incroyablement limité. Il me semble pour

[5] À part le paragraphe « Interprétation et délimitation du programme » qui fait mention de « l'approfondissement d'un noyau limité de connaissances fondamentales » dont malheureusement le mot le plus important semble a posteriori être « limité ».

[6] On y lit en particulier : « Il importe aussi que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité... » On aimerait que la suite du programme fasse référence, ne serait-ce qu'une fois, à ce contenu culturel. On aimerait plus généralement que le chapitre « Objectifs de formation » ne se contente pas d'énoncer une série de principes, mais repose sur des exemples concrets, sinon on a l'impression d'avoir affaire à un exercice de pure rhétorique. Que signifie en pratique : « Il convient de centrer l'enseignement autour de phénomènes et de problèmes mathématiques. En particulier, il est essentiel que l'approfondissement théorique ne soit coupé ni des problématiques qui le sous-tendent, ni des secteurs d'intervention qui le mettent en jeu. » ? Le reste du programme fait tout pour donner l'impression inverse...

[7] Celui-ci est disponible à `http://www.maths.cam.ac.uk/undergrad/documentation/schedules/currentschedules/master.pdf`.

[8] La comparaison a un certain intérêt car les élèves de Cambridge et Oxford correspondent à peu près (en termes d'effectifs et de sélection) aux classes étoilées des CPGE. (Pour faciliter la lecture du programme de Cambridge, IA=première année, IB=seconde année, les nombres dans la marge correspondent au nombre d'heures consacrées à chaque sujet ; en première année, tous les cours sont obligatoires, en seconde année, c'est à la carte, mais les étudiants suivent en gros 4 cours en parallèle. L'année est divisée en 3 trimestres, les deux premiers comportant 8 semaines de cours, le dernier 4 semaines de cours et des examens.)

[9] Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que « CPGE » signifie « classe préparatoire aux Grandes écoles » et pas « classe préparatoire aux concours d'entrée aux Grandes écoles ».

[10] La manière dont $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est présenté peut laisser la place à des interprétations.

[11] La génération précédente était exposée aux relations d'équivalence et aux passages au quotient dès le plus jeune âge, ce qui n'était probablement pas optimal, mais il est étrange que l'on en soit venu à considérer que ces notions sont trop abstraites pour être présentées en CPGE. Le passage au quotient par une relation d'équivalence est une opération mathématique fondamentale, et je ne vois pas de moment plus propice à son introduction que la période de la prépa.

[12] Les mathématiques ne sont pas un jeu purement formel, et il y a lieu de faire une distinction entre un résultat qui se contente d'exprimer une propriété d'une notion que l'on vient de définir (par exemple, si on définit un compact en termes de recouvrements ouverts, démontrer qu'un espace métrique est compact si et seulement si toute suite admet une valeur d'adhérence est un

le moins curieux que l'on puisse trouver normal que des élèves soumis au régime des CPGE ne sachent pas ce qu'est la dénombrabilité ou que les groupes sont faits pour agir sur toutes sortes de choses, et n'aient que des notions très approximatives de topologie générale, sans parler des disparitions, en filière PC, de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, du groupe symétrique, des suites de Cauchy, de la convergence uniforme...(liste non exhaustive, hélas).

Les théorèmes que j'ai repérés dans le programme de première année sont :

– le théorème de Bolzano-Weierstrass,
– le théorème des valeurs intermédiaires (qui a le mauvais goût d'être visuellement évident),
– le théorème de Rolle,
– le théorème fondamental de l'arithmétique (mais l'existence d'une infinité de nombres premiers semble être passée à la trappe),
– le théorème fondamental de l'algèbre (sans démonstration),
– le fait que la signature soit un morphisme de groupes,
– $\det AB = \det A \det B$,
– $\dim(E+F) + \dim(E \cap F) = \dim E + \dim F$.
– l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

En seconde année :

– le théorème de Bézout et le lemme de Gauss (quid de celui des restes chinois ?),
– la diagonalisabilité d'un endomorphisme annulé par un polynôme scindé à racines simples,
– le théorème de Cayley-Hamilton,
– la diagonalisation d'une matrice symétrique réelle en base orthonormée,
– la formule de Taylor avec reste intégral,
– le théorème du relèvement (à moitié),
– le fait qu'une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes,
– l'équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension finie,
– le fait qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue,
– la densité des polynômes ou des polynômes trigonométriques dans les fonctions continues sur un intervalle (enfin, le résultat y est, mais pas sous cette forme...),
– l'approximation uniforme de fonctions continues par des fonctions en escaliers,
– le théorème de convergence dominée (sous une forme un peu absurde et sans démonstration),
– le théorème de Dirichlet sur la convergence ponctuelle des séries de Fourier et la formule de Parseval,
– le théorème de Cauchy-Lipschitz.

---

résultat assez difficile – en tout cas, je ne me vois pas improviser une démonstration au tableau –, mais ne sort pas du cadre de la compacité ; de même, démontrer que les bases ont toutes le même cardinal dans un espace de dimension finie est un résultat difficile (idem), mais ne sert en gros qu'à définir la dimension d'un espace), et un vrai théorème qui répond à une question naturelle et dont la solution est un peu surprenante.

La liste ci-dessus me semble un peu triste pour deux ans d'efforts (d'autant que les énoncés la composant n'ont pas tous la même saveur). C'est d'autant plus dommageable qu'un vrai théorème permet de mettre en perspective les notions introduites. Par exemple, j'ai eu droit en sup.[13] aux espaces de Banach (définition, théorème des fermés emboîtés, théorème du point fixe). Je pense que je n'en aurais plus aucun souvenir si l'introduction de cette notion n'avait débouché sur la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz qui fut un émerveillement : cette manière inattendue de répondre à une question naturelle donnait un sens à tous ces énoncés semi-intuitifs et, cerise sur le gâteau, l'application de la preuve à l'équation différentielle $y' = y$ débouchait sur le développement de e^x en série entière ! Par contraste, le cours de spé que j'ai suivi était très orienté vers la préparation du concours, avec des exercices en pagaille, des problèmes de concours... Je garde un souvenir excellent de la prestation du professeur, mais force m'est de constater que je ne me souviens plus de rien de vraiment précis de son contenu[14] ni de celui des problèmes[15] à l'exception de l'escalier du diable et de la courbe de Peano qui avaient vivement frappé mon imagination.

L'appauvrissement des concepts

Un autre problème sérieux est la dénaturation de certains concepts, ce qui a pour effet de créer des obstacles psychologiques pour l'avenir, et de les rendre inutilisables une fois le concours passé. Je pense en particulier aux points suivants :

– La caractérisation de la compacité (dans un espace métrique[16]) par les suites est d'un maniement plus facile que celle par les recouvrements ouverts tant qu'il s'agit de vérifier la compacité d'un ensemble, mais quand on veut utiliser la compacité pour démontrer de vrais théorèmes, c'est presque toujours la caractérisation par les ouverts que l'on utilise (sans parler du non-sens absolu que constitue la définition d'un compact comme étant un fermé borné en filière PC).

– La connexité est certes moins intuitivement évidente que la connexité par arcs, mais c'est quand même la connexité qui est utilisée pour démontrer de vrais théorèmes, la connexité par arcs n'étant souvent qu'un moyen de prouver la connexité d'un espace.

– Le théorème de convergence dominée énoncé en prépa est encombré d'hypothèses inutiles le privant de sa souplesse incroyable (il faut avouer que c'est quand même un progrès par rapport à ce qui était enseigné il y a 30 ans, où on

[13] Le cours en question avait sûrement pris des libertés assez grandes avec le programme de l'époque mais, avec le recul, je le trouve d'une cohérence et d'une ampleur remarquable, assez similaire dans l'esprit avec le programme de l'université de Cambridge.

[14] Pour être honnête, il faut admettre que l'essentiel des mathématiques au programme ayant été vu en sup., il ne restait pas grand-chose de croustillant à nous proposer. Dans mon souvenir, la majeure partie de ce qui n'avait pas été vu en sup. a consisté en de la botanique des équations différentielles, et de la géométrie des courbes et surfaces dont l'unique but était de se ramener à cette botanique.

[15] Je m'aperçois que, 30 ans plus tard, les seuls problèmes ayant laissé une trace dans ma mémoire sont ceux dont la problématique était un peu surprenante ou ceux dont le but, clairement énoncé, était la démonstration d'un théorème hors programme avec un énoncé parlant. Je ne sais pas si on peut en tirer un enseignement sur le type de problèmes à poser pour faire progresser les gens.

[16] Enfin, dans un espace vectoriel normé sur **R** ou **C** d'après le programme officiel...

passait une bonne partie de son temps à découper les ε en morceaux). L'énoncé du théorème de Fubini laisse un peu songeur...

Ceci pose un problème assez sérieux pour l'enseignement des mathématiques en GE. J'ai un peu de mal à voir comment une école d'ingénieur un peu ambitieuse peut se passer de parler de transformée de Fourier dans L^2, de fonctions holomorphes et de probabilités à un niveau sérieux (sans parler de structures algébriques pour la formation d'informaticiens un peu théoriciens). Définir $L^2(\mathbf{R}^n)$ demande de pouvoir définir l'intégrale de Lebesgue. Même en prenant un point de vue axiomatique, il faut comprendre la notion de dénombrabilité qui a disparu du programme de toutes les filières, ce qui est probablement le point le plus incompréhensible du programme[17]. Ensuite, il faut passer au quotient par les fonctions nulles presque partout. Comme les passages au quotient ont été évacués du programme, on s'en tire en agitant les mains et en expliquant qu'on considère comme égales deux fonctions qui sont égales presque partout puisqu'il est impossible de les distinguer. Une fois L^2 construit, vient le problème de l'extension de la transformée de Fourier de L^1 à L^2, ce qui est un peu délicat pour un élève venant de la filière PC qui n'a aucune idée de ce qu'est une suite de Cauchy et n'a pas été exposé à la notion de densité. Pour les fonctions holomorphes, on a besoin de notions raisonnables de topologie[18]. Toutes ces notions que l'on a jugées impossible d'enseigner pendant les 600 ou 700 heures de mathématiques en CPGE doivent être assimilées par magie dans la petite centaine d'heures dont on dispose (dans les bons cas) dans les Grandes écoles.

Suggestion pour une refonte du programme

Rôle des CPGE

Il y a malheureusement deux réalités difficiles à ignorer : d'une part, le niveau en mathématiques des élèves à l'entrée en CPGE s'est considérablement dégradé en 30 ans, d'autre part, le bagage mathématique dont est susceptible d'avoir besoin un ingénieur ou un scientifique a augmenté de manière non négligeable ; les probabilités[19] occupent une place de plus en plus grande dans toutes les sciences (dures

[17] Il semble que tout (?) le monde en parle quand même, ce qui fait qu'on se demande pourquoi ce n'est pas au programme...

[18] L'unicité du prolongement analytique se démontre naturellement par connexité, même si la connexité par arcs des ouverts de $\mathbf{C}^2$ permettrait de fabriquer une démonstration n'utilisant que cette notion ; la compacité intervient régulièrement et c'est souvent la caractérisation par les recouvrements ouverts que l'on a envie d'utiliser.

[19] Les probabilités ont été introduites dès la seconde, ce qui peut paraître une bonne chose. Malheureusement, cette introduction s'est faite au détriment du langage de la théorie des ensembles et de la logique formelle, et la découverte de la notion de structures algébriques. Ceci semble un peu bizarre vu que le langage de la théorie des ensembles est fort utile (peut-être même plus en probabilité qu'ailleurs), et si on pouvait remplacer les probabilités des classes de seconde et première par un apprentissage du langage de la théorie des ensembles et de la logique formelle, et la découverte de la notion de structures algébriques, cela ferait le plus grand bien à tout le monde. Il est un peu étrange qu'un élève de terminale n'ait jamais manipulé d'espace vectoriel de dimension 2 ou 3 et de matrice 2×2. Par contre, il serait bon de garder des probabilités en terminale. La notion de probabilité conditionnelle me semble fondamentale pour la formation d'un citoyen ; cela permet de débusquer des tas d'erreurs de raisonnement, volontaires ou non, dans les discours de tous les jours.

ou molles), l'arithmétique dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et l'algèbre linéaire sur $\mathbf{F}_2$ et ses extensions se sont retrouvées au cœur de la communication informatique, et les structures algébriques jouent un rôle certain dans toute une partie de l'informatique. Il me semble donc qu'il faut en tirer les conclusions et changer assez substantiellement l'esprit dans lequel le programme des CPGE est conçu. En particulier, il ne faudrait pas perdre de vue la continuité qui doit exister entre la formation en CPGE et celle en GE. Il faudrait réfléchir à un partage des tâches entre les CPGE et les GE, et éviter que les élèves ne sortent des CPGE en ne connaissant qu'un corpus trop restreint (mais sur le bout des doigts), ce qui transforme l'enseignement en GE en survol superficiel (en 5 fois moins de temps) d'un corpus plus étendu que celui vu en prépa.

La structure des CPGE présente d'énormes avantages par rapport aux autres structures que je connais (comme l'université) pour la formation des étudiants (en particulier parce que c'est le même enseignant qui maîtrise la totalité des interventions), et la présence du concours au bout des deux ans crée une stimulation qui, bien utilisée, permet d'obtenir des résultats, au niveau de l'acquisition de connaissances, qui seraient impensables autrement. Il est dommage que cette acquisition de connaissances porte plus sur la résolution d'exercices (dont certains reposent sur une virtuosité parfaitement superflue[20]) que sur des concepts utilisables par la suite. Il faudrait donc arriver à un programme nettement plus ambitieux[21] sur le fond et nettement moins sur sur le niveau de technicité attendu de la part des élèves. Autrement dit, il faut diminuer la technicité au profit d'une augmentation du nombre de notions enseignées (plus de savoir pour moins de savoir-faire !), et surtout il faut enseigner ces notions d'une façon utilisable une fois le concours passé.

Que rajouter ?

Comme je l'ai déjà signalé le programme actuel est traité en 150 heures de cours magistral à l'université de Cambridge. Il ne me semble pas déraisonnable, vu le nombre d'heures dont on dispose en tout, d'arriver à un programme, en classe étoilée[22], correspondant à un peu plus de 200 heures de Cambridge. Ceci permettrait, sans trop diminuer la familiarité avec les notions introduites nécessaire pour affronter les concours, de rajouter au programme :

– de la dénombrabilité,

– des structures algébriques (réclamées par les informaticiens et extrêmement formatrices),

[20] J'ai été confronté à un phénomène psychologique assez curieux : certains des élèves que je récupère ont beaucoup de mal à admettre que le but d'un exercice puisse être d'aider à comprendre comment on utilise un théorème et pas forcément de les piéger...

[21] Au cours des deux dernières décennies, on a fait exactement le contraire. Or, à chaque baisse du programme, on assiste à une augmentation significative de la proportion de 5/2 (qui ont eu l'occasion de voir le programme précédent en 3/2) parmi les reçus au concours de l'X, ce qui tendrait à prouver que plus on enseigne de choses aux élèves et plus ils ont de connaissances mobilisables (quelle surprise !).

[22] Comme la différentiation entre classes étoilées et non étoilées ne se fait qu'en seconde année, il faut réfléchir un peu à la répartition entre les deux années ; voir plus loin.

– des constructions[23] d'objets mathématiques par passage au quotient[24],

– faire en sorte que les groupes agissent sur des ensembles[25] (c'est quand même pour ça qu'ils se sont imposés un peu partout en mathématiques...),

– enseigner la topologie de manière utilisable par la suite,

– l'intégrale[26] de Lebesgue sous une forme axiomatique[27],

– des fonctions holomorphes[28],

– des probabilités (sans théorie de la mesure).

Il faut absolument jalonner le programme de « vrais » théorèmes, permettant de mettre en perspective les notions introduites, et d'éléments d'histoire des mathématiques permettant de mettre en valeur les acquis[29]. Par exemple, une manière de mettre en valeur la notion de dimension d'un espace vectoriel, et les bases de la théorie des extensions de corps (qui, soit dit en passant, est fort utile pour les codes correcteurs ou non) est l'impossibilité de la duplication du cube à la règle et au compas. Expliquer aux élèves que ce qu'ils ont appris leur permet de répondre à une question qui a résisté aux assauts de nombreux mathématiciens

---

[23] Je pense en particulier à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, aux quotients de $K[X]$ (et en particulier à $\mathbf{C} = \mathbf{R}[X]/(X^2+1)$), à la construction de $\mathbf{R}$ comme quotient de l'anneau des suites de Cauchy par l'idéal des suites tendant vers 0, et à l'espace topologique $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

[24] Il faut dépasser le « traumatisme » causé par l'irruption des mathématiques modernes dans le secondaire il y a 40 ans. Ce traumatisme est d'ailleurs parfaitement relatif : j'ai relayé comme tout le monde l'idée selon laquelle l'introduction des mathématiques modernes avait été un désastre, jusqu'à ce que, récemment, une mère de famille de ma génération, littéraire de formation, et dont un des fils a des difficultés avec le programme de mathématiques du collège, m'ait fait la déclaration suivante : « Qu'est-ce que c'est que ces stupidités sur le cercle et le triangle ? De notre temps, on faisait des intersections, des réunions ; on comprenait quelque chose ; c'était bien plus concret. » Depuis, je suis de l'opinion que ce qui traumatise les parents, c'est de ne pas savoir faire les devoirs à la maison de leurs enfants... (et aussi d'avoir l'impression que ce qu'ils ont appris n'a pas de valeur puisque ce n'est plus enseigné).

[25] On pourrait par exemple envisager de faire agir les groupes $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SO}(E)$ sur l'espace vectoriel E...

[26] Je n'arrive pas à savoir si passer par l'intégrale de Riemann donne une intuition pour l'intégrale de Lebesgue ou si on peut s'en passer et la déduire de l'intégrale de Lebesgue (ce qui se fait sans problème). Si on peut s'en passer (ce qui me semble fort possible), cela permet de gagner un temps considérable...

[27] Je pense à la manière dont Bony présentait cette intégrale aux élèves de la filière PC : on admet l'existence d'une intégrale pour toutes les fonctions positives (ce qui est incompatible avec l'axiome du choix, mais parfaitement justifiable) valant ce qu'on pense pour les fonctions en escalier, linéaire, et vérifiant le théorème de convergence monotone. On admet aussi que toute fonction est limite presque partout d'une suite de fonctions en escaliers.

[28] Avec en point de mire un résultat frappant comme l'addition sur une courbe elliptique, le théorème de la progression arithmétique ou celui des nombres premiers.

[29] À Cambridge, la première année commence avec quatre cours de 24 heures en parallèle dont un intitulé « numbers and sets » dans lequel on parle de théorie des ensembles, de relations d'équivalence, de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, de dénombrabilité... Le cours se termine par la démonstration de l'existence de nombres transcendants par des arguments de cardinal. En France, ceci serait typiquement relégué en exercice. Je pense que c'est une erreur, et qu'il faut au contraire mettre le résultat en valeur, expliquer sa genèse (échange de lettres entre Cantor et Dedekind) et parler des réticences qui ont accueilli la démonstration de Cantor (polémique avec Kronecker) ; cela a pour mérite d'humaniser les mathématiques et d'expliquer aux élèves qu'ils ne sont pas les seuls à avoir des problèmes devant certaines notions. Dans le même ordre d'idées, expliquer que Cauchy a réussi à démontrer deux fois qu'une limite simple de fonctions continues est continue peut aider à bien faire comprendre l'intérêt de la notion de convergence uniforme. On peut aussi raconter les déboires de Poincaré (épisode du prix du roi de Suède).

pendant deux millénaires, est une excellente manière de valoriser leur savoir même si l'utilité du résultat est à peu près nulle. Transformer ce résultat en un problème (ce qui m'est arrivé en sup.) est une idée raisonnable, mais insister sur l'aspect historique du problème lui donne une autre saveur.

Il n'est pas nécessaire de tout démontrer, mais il faut n'admettre que de vrais résultats, dont la démonstration est hors de portée, et dont l'utilisation est relativement aisée et simplifie grandement la vie. Je pense principalement à l'existence de l'intégrale de Lebesgue (en incluant le théorème de convergence dominée – le vrai ; pas celui au programme actuellement –, et celui de Fubini), et à la formule de Cauchy et celle des résidus. On peut déléguer aux Grandes écoles le soin de faire un cours de théorie de la mesure dans lequel l'existence de l'intégrale de Lebesgue sera justifiée de la manière adéquate, mais il me semble nuisible de se passer de sa souplesse, au moins en spé. La démonstration de la formule de Cauchy et de celle des résidus peut probablement se faire à ce niveau, mais demande d'utiliser un arsenal de notions (formule de Green ou des rudiments d'homotopie qui, bien que fort utiles par ailleurs, risquent de prendre un temps non négligeable pour une utilité un peu lointaine).

Problèmes pratiques

L'introduction des probabilités en CPGE me semble incontournable vu l'importance croissante que prennent les méthodes probabilistes dans tous les secteurs scientifiques. Il s'agit d'une branche un peu à part dans les mathématiques (même si elle a des connexions avec beaucoup d'autres branches des maths), avec son propre langage, et dont les conclusions sont parfois déconcertantes pour les mathématiciens d'autres branches, et cela justifierait une augmentation du volume horaire global de mathématiques. Qui sait ? Peut-être que pour une fois les considérations scientifiques l'emporteront sur les considérations budgétaires...

Il y a clairement des élèves qui auraient un peu de mal à assimiler complètement le nouveau programme en deux ans. Comme le concours reste incontournable[30], on peut envisager un système à deux vitesses : une première année avec un programme ambitieux (pas de concours à la fin de l'année !), et une seconde année avec de fortes différences entre les programmes des classes étoilées et des autres. Dans les classes non étoilées, une bonne moitié du temps serait consacrée à consolider les notions vues en première année, et le reste du temps à l'acquisition de notions nouvelles. Dans les classes étoilées, on continuerait à un rythme assez soutenu en considérant que la consolidation des notions de première année se fera naturellement en les utilisant pour démontrer des choses nouvelles (ce qui est la méthode naturelle pour apprendre des mathématiques...). Un point positif de cette différentiation serait de permettre à un 5/2 d'une classe non étoilée de redoubler dans une classe étoilée et donc d'apprendre des choses nouvelles au lieu de revoir le même programme. En fait, l'idéal serait que le programme des classes étoilées permette d'accéder directement au M1 à l'université. (Il est un peu absurde qu'avec le travail que fournissent les élèves des CPGE, ils soient

[30] On pourrait quand même envisager d'en modifier un peu l'esprit et de rajouter une petite touche « examen ».

en situation de perdre une année par rapport aux étudiants de la fac en cas de 5/2.).

Enfin, je n'ai pratiquement évoqué que la filière MP dans ce qui précède, mais le cas de la filière PC est nettement plus préoccupant, et il me semble que la différentiation des filières dès la première année est franchement dommageable par l'hétérogénéité qu'elle crée. Je n'ai pas les moyens de savoir si cette différentiation a vraiment augmenté le nombre de vocations de physiciens et de chimistes. Si ce n'est pas le cas, il me semblerait judicieux de revenir au système antérieur où le choix se faisait en seconde année, de manière peut-être un peu plus réfléchie.

⋆ ⋆ ⋆

Rappel : la rubrique « tribune libre » permet à toute personne de notre communauté d'y exprimer une opinion personnelle qui n'engage ni le comité de rédaction, ni la Société Mathématique de France.
Les réactions à ces textes (gazette@dma.ens.fr) sont publiées dans le courrier des lecteurs.