

# LIVRES

---

---

## **L'algèbre et le groupe de Virasoro. Aspects géométriques et algébriques, généralisations (avec un appendice de Vlad Sergiescu)**

LAURENT GUIEU ET CLAUDE ROGER

Les publications CRM, PM 027, Montréal, 2007. 815 p.

ISBN : 2-921120-44-5. \$CAN 88

---

Il est enfin sur mon bureau, le livre de Laurent Guieu et Claude Roger. Ce « bouquin » de plus de 800 pages et ayant eu une gestation de douze ans, de quoi traite-il ?

On part de l'algèbre des champs de vecteurs sur le cercle,  $\text{Vect}(S^1)$ , identifiée avec  $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$ , avec son commutateur habituel

$$\left[ f(t) \frac{d}{dt}, g(t) \frac{d}{dt} \right] = (f(t) \cdot g'(t) - g(t) \cdot f'(t)) \frac{d}{dt},$$

de sa complexification  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(S^1)$ , ainsi que de l'algèbre de Lie  $L_{\mathbb{C}}$  de base  $\{e_n = i \exp(int) d/dt \mid n \in \mathbb{N}\}$  et de commutateur  $[e_n, e_m] = (n - m)e_{n+m}$ .

Des raisonnements relativement faciles montrent que ces trois algèbres de Lie possèdent des extensions centrales unidimensionnelles « universelles », c'est-à-dire engendrant toute extension centrale. Sachant qu'une représentation projective d'une algèbre de Lie se relève en une représentation linéaire de l'extension centrale universelle (si elle existe), il est évident que de telles extensions sont fort importantes pour la théorie des représentations. (Comparer au « credo de Karl-Hermann Neeb » qui consiste à étudier d'une façon très systématique les extensions centrales avant de passer à la théorie générale des représentations des algèbres et groupes de Lie de dimension infinie.)

Remarquons aussi que les cocycles définissant les extensions centrales unidimensionnelles donnent naturellement des structures (presque) symplectiques sur l'algèbre de Lie et des quotients appropriés. Par conséquent, les extensions centrales jouent un rôle essentiel dans la géométrie symplectique et kählerienne des espaces homogènes. Via la quantification géométrique on relie ces structures aux représentations (voir le théorème de Borel-Weil ou la théorie de Kirillov pour les groupes nilpotents comme exemples de réussite de la « méthode des orbites », généralisée par la quantification géométrique).

L'extension centrale universelle de  $\text{Vect}(S^1)$  est appelé « l'algèbre de Virasoro » en l'honneur du physicien Miguel Angel Virasoro. Il y a aussi un groupe de Lie (de dimension infinie) intégrant cette algèbre mais dans ce texte il apparaît essentiellement via ses orbites coadjointes... qui se calculent déjà en connaissant l'algèbre de Virasoro et le groupe de difféomorphismes du cercle. Cette algèbre de Virasoro intervient en physique au moins dans la théorie des cordes et dans la théorie des champs conformes, qui sont des théories de grande importance dans la physique (théorique!) des hautes énergies des dernières décennies. Ces théories

ont aussi eu un fort impact en mathématiques ne serait ce que pour donner une énorme incitation à développer une théorie des représentations des algèbres de Lie de dimension infinie et pour fournir de nombreuses conjectures en géométrie différentielle et algébrique (symétrie miroir et dualités, cohomologie quantique, géométrie énumérative,...).

Même si les auteurs « ne prétendent jamais écrire le traité exhaustif [sur ces sujets ; rajout de l'auteur de cette recension] » (voir page 479), ils parviennent néanmoins à en donner un très vaste panorama du point de vue des mathématiques mais avec des nombreuses digressions en direction de la physique théorique ainsi que dans beaucoup de directions mathématiques.

Ce livre s'adresse aux enseignant-chercheurs qui, soit, sont déjà convaincus de la beauté et l'intérêt de ce sujet, soit souhaitent s'y familiariser d'une façon pas trop formelle, ainsi qu'aux étudiants en Master et surtout en Doctorat dans ce domaine. De plus, il servira certainement pour préparer et accompagner des cours de niveau Master et plus. Disons-le toute suite : ce livre devrait satisfaire les attentes de ces groupes de lecteurs potentiels.

Soulignons la passion des auteurs pour leur thème et pour sa « diffusion » au sein de la communauté des mathématiciens, qui dédommage à mes yeux de la longueur du texte. Mentionnons tout de suite d'autres atouts : à savoir le très grand nombre d'exercices allant de la simple vérification à des (presque) conjectures, l'intéressante « Notice historique » et l'effort constant de rendre agréable la lecture de ce texte. Notons aussi l'appendice de Vlad Sergiescu sur des « Versions combinatoires de  $\text{Diff}(S^1)$  » qui est, surtout en comparaison avec le reste du livre, malheureusement très dense et un peu aride pour le non-initié.

Le livre se compose de trois grandes parties :

- les chapitres « de rappel », i.e. les chapitres 1-3
- les chapitres spécifiquement sur l'algèbre et le groupe de Virasoro et ses représentations, plus le « bestiaire » (chapitre 5), i.e. 4-7
- les chapitres traitant quelques généralisations récentes de l'algèbre de Virasoro, i.e. 8-10.

Regardons les chapitres de plus près :

Le **Chapitre 1** (« Quelques préliminaires à propos de groupes et algèbres de Lie classiques ») est très sommaire, apparemment le sujet abordé y est supposé connu. Il est en fait vrai qu'il y a des très bonnes monographies sur le sujet, comme celles d'Anthony Knapp.

Le **Chapitre 2** (« Notions d'algèbre homologique, la cohomologie des algèbres et des groupes de Lie ») me semble très utile car concernant un sujet moins standard. Ce chapitre réussit à expliquer les grandes lignes de ce sujet important et devrait aider des « jeunes » (et des moins jeunes) à suivre le texte principal.

Le **Chapitre 3** (« Éléments de géométrie symplectique ») est d'une lecture extrêmement agréable, utile surtout pour la présentation claire et succincte de certains types de « quantification » des variétés symplectiques.

Les **Chapitres 4, 6 et 7** (« L'algèbre et le groupe de Virasoro : leurs premières propriétés », « Géométrie des orbites coadjointes de l'algèbre de Virasoro » et « Les représentations de l'algèbre et du groupe de Virasoro ») vont au cœur du sujet. Remarquons d'abord l'étude soignée des aspects cohomologiques, importants pour les représentations et pour les liens avec la cohomologie de Gel'fand-Fuks

et les feuilletages, et la présentation détaillée des orbites coadjointes (essentiellement provenant de la thèse de doctorat du premier auteur), et les liens avec les divers « espaces de Teichmüller ». Dans le chapitre 7, on trouve beaucoup d'informations sur des représentations de l'algèbre et du groupe de Virasoro, mais certains théorèmes fondamentaux ne sont qu'expliqués et pas démontrés (notamment les théorèmes 7.5.1, 7.5.2 et 7.6.6, ainsi que la formule du déterminant de Kac sur la page 548). En contrepartie le lecteur y trouve une très efficace introduction aux algèbres d'opérateurs de vertex et à leurs « développements en produits d'opérateurs ». Avec un minimum de théorie générale, mais avec des explications très claires, les auteurs arrivent, par ex., à donner les « constructions de Sugawara », importantes en mathématique et physique. Afin de finalement construire certaines classes des représentations du groupe de Virasoro, les auteurs utilisent la seconde quantification.

Le **Chapitre 5** (« Un bestiaire symplectique en dimension infinie ou les aventures de la méthode des orbites »), encore d'une lecture fort agréable, est malheureusement parfois assez bref, notamment en ce qui concerne la topologie algébrique. C'est regrettable, mais probablement le coût en pages d'une « complétion » serait trop grand et la perte en ne parlant pas du tout des liens importants entre les groupes de Lie de dimension infinie, les espaces classifiants et les classes caractéristiques ... le serait aussi.

Le **Chapitre 8** (« Généralisations de l'algèbre et du groupe de Virasoro dans le domaine complexe ») contient trois parties, dont chacune traite une de ces généralisations, toutes liées aux variétés complexes (de dimension un). Il faut remarquer que les sujets -hautement intéressants- sont plutôt mis en place que développés. La section 8.1 donne une introduction rapide et claire à quelques notions de la théorie des catégories, notamment aux « PROP »  $s$  (« *product and permutation categories* »). De plus, les auteurs y rappellent brièvement la « catégorie des pantalons » avec (resp. sans) structure conforme, ici appelée « Shtan » resp. « TShtan » et ils définissent une théorie des champs conformes resp. topologiques comme un foncteur multiplicatif  $Shtan \rightarrow PROP(E)$  resp.  $TShtan \rightarrow PROP(E)$ , avec  $E$  un espace vectoriel. Dans le deuxième cas, ils montrent l'équivalence entre les théories des champs topologiques (1+1)-dimensionnelles et les structures d'algèbre de Frobenius sur  $E$  en utilisant des dessins « habituels », mais jolis ; dans le premier cas, ils n'abordent que les définitions de cette célèbre « théorie » toujours pas achevée, mais donnant lieu à beaucoup de développements mathématiques intéressants... On pourrait regretter le peu de références signalées au lecteur curieux d'en savoir plus sur les théories de champs conformes et topologiques. La section 8.2 guide le lecteur rapidement mais d'une façon claire vers les algèbres de Krichever-Novikov et ses généralisations dues notamment à Martin Schlichenmaier et Oleg Sheinman ; et dans la troisième partie, 8.3, la structure complexe (ou conforme, selon le goût) d'une surface de Riemann  $X$  est utilisée afin de donner des idées sur les « extensions holomorphes » des groupes et des algèbres des courants lisses sur  $X$ .

Le **Chapitre 9** (« Les super-algèbres de Lie superconformes ») introduit les dites superalgèbres d'une façon relativement abordable après un rappel concis et précis de la superalgèbre de base, ainsi que de la supergéométrie à la Yuri Manin. (Dans cette approche une supervariété est simplement une variété munie d'un faisceau

de superalgèbres supercommutatives, et les superfonctions locales sont les sections locales de ce faisceau.) Malheureusement, il n'est – au moins pour moi – pas clair que cette approche couvre les manipulations faites par les physiciens en utilisant des « supercoordonnées locales », mais dans le cadre choisi on trouve déjà une très riche théorie mathématique ...

Par la suite (9.3 - 9.6) les auteurs analysent cette famille des superalgèbres soigneusement sous des angles divers et classifient leurs extensions centrales. La section 9.7 rapporte sur des extensions des idées déjà hypothétiques de Mark Bowick et S. Rajeev (voir 7.7) à un programme de la « quantification géométrique des supercordes »...

Dans le **Chapitre 10** (« La géométrie des algèbres de Gel'fand-Dikii et une introduction aux algèbres- $W$  ») les auteurs étudient les algèbres des symboles des opérateurs différentiels respectivement pseudo-différentiels sur le cercle (notées  $OD(S^1)$  resp.  $\psi\mathcal{D}(S^1)$ ), et notamment deux « structures de Poisson » sur un espace de fonctionnelles sur  $\psi\mathcal{D}(S^1)$ , les « deux crochets de Gel'fand-Dikii ». En faisant intervenir des constructions classiques de la géométrie de Poisson comme la restriction aux feuilles symplectiques ou la réduction dans ce contexte de dimension infinie (et d'une nature a priori très algébrique), ils développent un très riche paysage contenant entre autres les hiérarchies liées aux équations de Korteweg-de Vries et de Kadomtsev-Petviashvili.

Sans être un expert de ce domaine, j'ai beaucoup apprécié l'effort de « linéariser » la construction des multiples algèbres intervenant, qui sont souvent approchées d'une façon plutôt calculatoire dans la littérature. Notamment, ils essaient de donner une description homogène des algèbres- $W$  classiques comme  $\mathbf{w}(n) = \mathcal{A}_n / \frac{d}{dx} \mathcal{A}_n$ , où  $\mathcal{A}_n$  est l'algèbre différentielle suivante :

$$\left( C^\infty(S^1) \otimes \mathbb{C} \left[ u_i, u_i^{(k)} \mid i = 0, 1, \dots, n-1 \text{ et } k \in \mathbb{N} \right] ; \frac{d}{dx} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} u_i^{(k+1)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(k)}} \right),$$

munie des deux crochets de Gel'fand-Dikii.

La description précise de la spécialisation à l'algèbre de Virasoro (ou plutôt au crochet de Poisson sur son dual régulier) demande du travail (voir la section 10.3), mais l'interprétation des  $\mathcal{A}_n$  comme des espaces de fonctions sur

$$\text{GD}(n) = \left\{ \partial^n + \sum_{j=0}^{n-1} u_j \partial^j \mid u_j \in C^\infty(S^1) \right\}$$


(avec  $\partial = \frac{d}{dx}$ ) rend évident qu'il y a « un fort lien » avec l'algèbre de Virasoro.

Ce chapitre finit avec une section sur les « algèbres- $W$  quantiques », des mathématiques prospectives et prometteuses...

Un œuvre d'autant de pages contient inévitablement quelques « coquilles ». Il semble y en avoir peu et je souhaite seulement mettre en garde les lectrices et lecteurs contre quelques pièges. Les algèbres- $W$  sont notées de plusieurs façons ; la traduction de « twistors » en « torseurs » (p. 571) et pas en « twisteurs » risquent de perturber pas mal de mathématiciens francophones ; dans l'introduction il est question d'un second volume (p. xii).

Du côté des [sujets ; rajout de l'auteur de cette recension] « absents », il y a déjà des remarques des auteurs dans l'introduction page xvi. Je souhaite y rajouter une seule thématique : les genres et la cohomologie elliptiques, beaucoup étudiés en topologie algébrique depuis quelques années. Les articles de Graeme Segal (Séminaire Bourbaki 1987/88) et de Jean-Luc Brylinski (Topology 29, 1990), ainsi que le petit livre de Hirotaka Tamanoi (Springer Lecture Notes in Mathematics, volume 1704) laissent comprendre que l'algèbre et le groupe de Virasoro devraient à terme faire leur entrée rigoureuse dans ce domaine, pour l'heure dominé par des constructions assez peu géométriques et relativement éloignées des idées des physiciens comme Edward Witten (voir par exemple, Springer Lecture Notes in Mathematics, volume 1326).

Tilmann Wurzbacher,  
CNRS et Université Paul Verlaine-Metz

 C&M
Calvage & Mounet

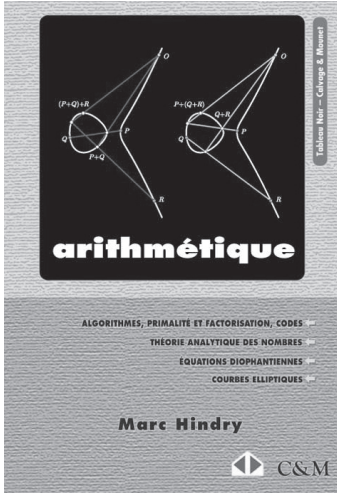



Tableau Noir – Calvage & Mounet

# Marc Hindry

# Arithmétique

Primalité et codes  
 Théorie analytique des nombres  
 Équations diophantiennes  
 Courbes elliptiques

En librairie depuis février 2008  
(Publicité)

 Tableau Noir

[www.calvage-et-mounet.fr](http://www.calvage-et-mounet.fr)

En librairie depuis février 2008  
(Publicité)