MATHÉMATIQUES

Comment mesurer les surfaces ?

Yves Meyer[1]

Ce texte a été rédigé par Yves Meyer à la suite de sa conférence « Pourquoi Lebesgue essayait de mesurer les surfaces, et n'y arrivait pas ? » donnée le 11 janvier 2006 à la Bibliothèque Nationale de France. Cette conférence était la première des quatre du cycle « Un texte, un mathématicien » organisée par la BnF, la SMF et la revue Tangente pour l'année 2006.

Ce problème a eu une extraordinaire fécondité. Posé dès les débuts de la civilisation, le problème de la mesure des surfaces a été l'une des sources de la géométrie ; il a ensuite contribué à la découverte du calcul infinitésimal, puis de la théorie moderne de l'intégration (Borel et Lebesgue) ; il a finalement débouché sur la géométrie fractale et le traitement de l'image.

Archimède (-287, -212) découvrit comment mesurer l'aire comprise entre une parabole, sa tangente au sommet et deux droites parallèles à l'axe L de la parabole. Pour ce faire, Archimède découpait la surface en de très fines lamelles parallèles à L. Archimède inventait le calcul infinitésimal et préludait ainsi aux mathématiques du XVII[e] et du XVIII[e] siècle. Au début du XX[e] siècle, Emile Borel et Henri Lebesgue fondèrent la théorie moderne de la mesure qui permet de calculer essentiellement toutes les aires planes (techniquement, les aires de tous les ensembles boréliens) et tous les volumes dans l'espace. Les œuvres de Borel et de Lebesgue constituent le socle sur lequel est bâti le calcul des probabilités, car la probabilité d'un événement est la mesure de l'ensemble des instances où il se produit. En 1902, Henri Lebesgue posa avec insistance le problème de *la mesure des surfaces d'objets tridimensionnels*. Quand ces surfaces sont assez régulières, la méthode classique de la triangulation suffit aux besoins. Mais que faire dans le cas le plus général ? Lebesgue cherchait à mesurer les surfaces d'objets rugueux, pointus, présentant des aspérités et ayant une géométrie complexe. Pour Lebesgue une feuille de papier froissée était une figure aussi intéressante que la surface d'une sphère.

Abram Besicovitch, Felix Hausdorff, Leonida Tonelli et Ennio De Giorgi ont donné des réponses différentes et même contradictoires aux questions posées par Lebesgue et, ce faisant, ont ouvert de nouvelles voies aux mathématiques pures et appliquées. Les géométries fractales et les algorithmes modernes de traitement de l'image sont directement issus de leurs travaux. Mais il convient d'abord de revenir à Camille Jordan (1838-1922). Il introduisit les *fonctions à variation bornée* qui furent une source d'inspiration, mais aussi un piège pour Lebesgue. Une fonction f

[1] Hervé Pajot m'a aidé à améliorer ce texte et je l'en remercie chaleureusement.

définie sur l'intervalle $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes, est à variation bornée si les sommes $\Sigma_1^N |f(t_{j+1}) - f(t_j)|$ étendues à toutes les partitions $a = t_0 \leqslant \cdots \leqslant t_j \leqslant t_{j+1} \leqslant \cdots \leqslant t_N = b$ de $[a, b]$ ne dépassent pas une certaine constante C et la plus petite de ces constantes est la *variation* totale de f sur $[a, b]$. La fonction $f(t) = t \sin(1/t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, n'est pas à variation bornée sur $[0, 1]$ alors que $g(t) = t \sin(1/\sqrt{t})$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, l'est. Jordan définit la longueur d'une courbe Γ, comme la limite, quand le plus grand côté tend vers 0, des longueurs des lignes polygonales inscrites. Une courbe de longueur finie est dite rectifiable. Les fonctions à variation bornée servent à paramétrer les courbes rectifiables. En effet, soit $z(t) = x(t) + iy(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, une représentation paramétrique d'une courbe rectifiable Γ. Camille Jordan nous apprend que la longueur de Γ est égale à la variation totale de $z(t)$. *La théorie de Jordan peut-elle être étendue aux surfaces ?* C'est la question qui fut posée par Camille Jordan à Lebesgue.

1. Henri Lebesgue

Henri Lebesgue naquit à Beauvais, en 1875. Son père, ouvrier typographe, mourut de la tuberculose. Ses deux sœurs aînées furent aussi emportées par cette maladie. Sa mère travailla durement pour subvenir aux besoins de la famille. Après de brillantes études, Lebesgue entra à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm en 1894. Il écrivit sa thèse alors qu'il enseignait au lycée de Nancy. Il soutint cette thèse en 1902. Il fut alors nommé professeur à l'université de Rennes, puis de Poitiers et enfin à la Sorbonne en 1910. Professeur au Collège de France en 1921, il fut élu à l'Académie des Sciences en 1922. Il mourut à Paris en 1941.

Dans sa thèse, Lebesgue donna une définition nouvelle de la primitive $F(x)$ d'une fonction $f(x)$ de la variable réelle x ; $F(x)$ est l'aire de la surface S délimitée par le graphe de $f(\cdot)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées (c-à-d. la droite d'abscisse 0) et la droite d'abscisse x. Lebesgue nous apprend que cette aire se calcule en divisant S en *fines lamelles horizontales* d'épaisseur h et en laissant ensuite h tendre vers 0. Cette approche est bien meilleure que la méthode d'Archimède, car elle introduit une plus grande stabilité dans les calculs numériques. On aboutit ainsi aux fonctions intégrables au sens de Lebesgue et l'on peut se libérer des conditions superflues (continuité, etc.) qui étaient imposées à $f(x)$ depuis les travaux de Riemann.

Comme Einstein le faisait à la même époque pour la Physique, Lebesgue revint aux fondements de la géométrie et aux problèmes posés par la mesure des grandeurs. Il souleva les questions suivantes : *Qu'est-ce qu'un volume ? Une surface ? Une frontière ? Comment calculer la surface d'un épi de blé ? Combien vaut la surface d'un arbre ?* Aujourd'hui Lebesgue nous aurait demandé ce que signifie la phrase : « *La surface du cortex cérébral est de* $2m^2$ ». Les mathématiques qu'on avait enseignées à Lebesgue ne permettaient pas même de calculer la surface d'une feuille de papier froissée. Lebesgue l'observait avec malice alors qu'il était encore étudiant à l'École Normale Supérieure. La notion d'ensemble avait été chavirée par les travaux de Georg Cantor (1845-1918). Avant Cantor, les formes géométriques étaient lisses et régulières et l'on pouvait aisément en calculer la surface. Les nouveaux objets (ensembles) étudiés à partir de Cantor peuvent être rugueux, hérissés de pointes, fragmentés, tout comme le sont les objets qui nous entourent. Lebesgue se présenta donc comme un mathématicien appliqué quand il écrivit : « *Réduite aux théories générales, les mathématiques deviendraient une* *belle forme sans contenu ; elles mourraient rapidement.* » Lebesgue se passionnait pour la « géométrie élémentaire » et nous verrons que cette passion ouvrit de nouvelles voies à l'analyse mathématique. Lebesgue définit l'aire d'une surface comme suit :

Définition 1. *On appellera aire d'une surface S la plus petite des limites des aires des surfaces polyédrales tendant vers S.*

Il revient au même de demander aux S_j d'être des surfaces suffisamment régulières. Mais il reste à savoir en quel sens les surfaces approchées tendent vers S. Lebesgue pensait-il à la distance de Hausdorff définie comme suit ?

Si E et F sont deux ensembles fermés, la distance de Hausdorff entre E et F est notée $d(E,F)$ et est définie par la condition suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, on a $d(E,F) < \varepsilon$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

(a) pour tout $x \in E$, il existe un $y \in F$ tel que $|x - y| \leqslant \varepsilon$

(b) la même propriété a lieu quand E et F sont échangés.

Filippo Santambrogio, jeune chercheur à l'École Normale Supérieure de Pise, m'a fait observer que si l'on utilisait ces définitions, la surface du carré unité C serait nulle. Il est en effet possible de construire, pour tout ε positif, une route en zigzag qui parcourt C en pénétrant dans chaque carré de côté ε. On peut faire en sorte que la largeur de cette route soit si petite que son aire ne dépasse pas ε. On arrive à la contradiction désirée (FIG. 1).

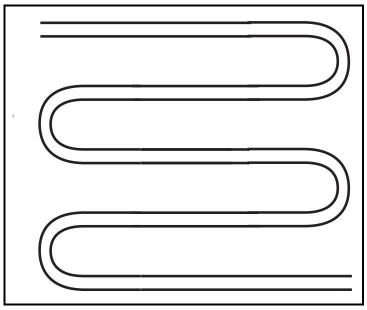

FIG. 1

Mais à l'intérieur du texte intitulé *Sur la définition de l'aire des surfaces*, Lebesgue répond en partie à cette objection en précisant la notion de convergence. Il écrit :

> *« Ayant à mesurer une surface S, il nous faudra considérer des surfaces polyédrales S_1, $S_2, \cdots$, correspondant point à point d'une façon biunivoque et continue à S, et tendant vers S. »*

Mais, là encore, le contre-exemple de Filippo Santambrogio contredit cette nouvelle définition. Il est probable que Lebesgue demandait que l'homéomorphisme $\Theta_j : S \mapsto S_j$ converge vers l'identité. Lebesgue avait en vue des surfaces paramétrées, définies par trois équations $x = f(u,v); y = g(u,v); z = h(u,v),\ (u,v) \in D$, où f, g, h sont trois fonctions continues dans le disque unité D. Pour une surface fermée le disque unité serait remplacé par la sphère unité. Supposons que les $\Phi_j = (f_j, g_j, h_j)$ paramétrant S_j et $\Phi = (f,g,h)$ paramétrant S soient des applications biunivoques de D sur S_j ou S. Alors l'approximation des S_j vers S définie par

Lebesgue équivaut à la condition que les applications Φ_j convergent uniformément sur D vers Φ. Le problème posé par l'instabilité de la mesure d'une surface quand on modifie légèrement celle-ci est riche et difficile. Bien entendu on peut déplacer le problème et associer à une surface S un objet mathématique σ appelé *mesure de surface*, dont le support est S et qui est défini par la condition que, pour tout ensemble borélien B, la mesure de la surface de $S \cap B$ soit égale à $\sigma(B)$. On peut alors définir la convergence des surfaces S_j vers S par la convergence faible des mesures de surface σ_j vers σ. S'il en est ainsi, cette convergence entraîne celle des mesures des surfaces des S_j vers celle de S. Ce point de vue sera utilisé par De Giorgi, comme nous le verrons ci-dessous. Le lecteur qui voudrait en savoir plus se reportera au livre de Guy David [6], page 217, Théorème 4.

Camille Jordan critiqua la définition 1 en termes assez vifs [10] :

> *« Je ne suis pas satisfait par ce que vous avez dit de l'aire des surfaces. Vous dites que vous édifiez, pour la mesure des aires des surfaces, une théorie entièrement analogue à celle de la mesure des longueurs des courbes mais, pourtant, vous laissez sans réponses des problèmes essentiels alors que ces problèmes sont résolus dans le cas des courbes. Une courbe $x = f(t)$; $y = g(t)$; $z = h(t)$ étant donnée, nous savons quelle suite d'opérations il nous faut effectuer sur f, g, h pour reconnaître si la courbe est rectifiable et pour calculer sa longueur finie ou infinie ; vous ne dites rien du problème analogue pour les surfaces données par trois équations $x = f(u, v)$; $y = g(u, v)$; $z = h(u, v)$. De là résulte aussi que tandis que l'on sait construire les formes les plus générales des fonctions $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ relatives aux courbes rectifiables, vous ne nous apprenez pas à former les fonctions $f(u, v)$, $g(u, v)$, $h(u, v)$ donnant des surfaces quarrables. »*

Nous verrons que Felix Hausdorff, Abram Besicovitch, Leonida Tonelli et Ennio De Giorgi ont chacun apporté une réponse différente aux trois questions suivantes : *la définition donnée par Lebesgue est-elle cohérente ? Comment répondre au problème posé par Jordan ? Comment calculer l'aire du graphe S d'une fonction définie sur le carré unité ?*

Une des motivations de Lebesgue était le célèbre problème des surfaces minimales posé par Plateau. Joseph Plateau (1801-1883) fut un précurseur du dessin animé : il inventa en 1883 un appareil de projection fondé sur la persistance des impressions visuelles. Il posa le problème de la détermination de la surface d'aire minimale ayant une courbe donnée pour bord, problème essentiel dans l'étude des lames minces liquides. Une courbe fermée Γ est fixée dans l'espace et l'on cherche à construire la surface Σ délimitée par Γ dont l'aire soit la plus petite possible. Ce problème est résolu par l'expérience des bulles de savon s'appuyant sur Γ. Comme le remarque Lebesgue, on ne peut résoudre ce problème qu'à condition de laisser concourir *toutes les surfaces* Σ délimitées par Γ et dont l'aire a un sens. Lebesgue le dit avec force quand il écrit :

> *« Bref nous avons tous fait cette faute de confondre borne inférieure et minimum ; mais il y a un profit certain quoique d'un autre ordre, à constater avec quelle facilité nous errons et qu'il*

> *suffit d'avoir donné un aspect géométrique à une erreur classique et ancienne pour que personne ne la reconnaisse plus.* »

David Hilbert avait alors introduit la *méthode directe* en calcul des variations. Le minimum n'est atteint que si l'on dispose d'une certaine forme de compacité s'appliquant à l'espace où ce minimum est recherché. La méthode directe de Hilbert nous oblige donc à étudier la question posée par Jordan : comment paramétriser l'ensemble des surfaces possédant une aire et vérifier la propriété de compacité requise par la méthode directe de Hilbert ? La solution sera donnée par Leonida Tonelli.

2. Felix Hausdorff

Hausdorff naquit à Breslau en 1868. Il fut nommé professeur à l'université de Leipzig en 1902. Il y enseigna jusqu'en 1910 et accepta alors une offre de l'université de Bonn. Sous le pseudonyme de Paul Mongré, il publia des ouvrages littéraires et philosophiques. Hausdorff était extrêmement modeste et son collègue Study eut du mal à le convaincre de se consacrer aux mathématiques. Hausdorff enseigna à Bonn jusqu'en 1935. Il fut alors chassé de l'université par les Nazis. En 1942, il décida avec sa femme et sa belle-sœur de se suicider, évitant ainsi la déportation et les camps.

Ses travaux mathématiques concernent la théorie des ensembles et les fondements de la topologie. Il étudia le même problème que Lebesgue, mais avant de calculer les aires des surfaces, il chercha à savoir quels sont les objets dont on puisse dire qu'ils sont de dimension 2. Ce faisant, Hausdorff définit la dimension d'un objet (c'est-à-dire d'un ensemble arbitraire). Cette définition sera utilisée par Benoît Mandelbrot pour décrire et analyser certains objets complexes du monde qui nous entoure. Le travail fondateur de Hausdorff, *Dimension und äusseres Mass*, est publié en 1919 (voir la référence [2]). Voici ce dont il s'agit : soit F un espace métrique (dans lequel on sait mesurer les distances) et soit E une partie de F. On veut définir la dimension de E. Soit s un nombre réel qui est candidat pour être la dimension de E. Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère tous les recouvrements possibles de E par une suite (a priori infinie) d'ensembles U_j de diamètre $r_j < \varepsilon$. On définit la constante α_s de façon appropriée en fonction du volume de la boule unité en dimension s (quand s est entier). On calcule alors la somme (finie ou infinie) de la série $\Sigma_1^\infty r_j^s$ pour chacun de ces recouvrements et l'on appelle $H(s, \varepsilon; E)$ la borne inférieure de ces sommes (multipliées par la constante α_s), en essayant et testant tous les recouvrements par des ensembles de diamètre ne dépassant pas ε. Dans ces conditions $H(s, \varepsilon; E)$ est une fonction décroissante de $\varepsilon > 0$ et a une limite (éventuellement infinie) si ε tend vers 0. Cette limite est la « mesure extérieure $M(s; E)$ de E en dimension s ». Le rôle de la constante α_s est de faire en sorte que $M(s; E)$ coïncide avec la surface ou le volume usuels quand s est un entier.

Définition 2. *La dimension de E est la borne supérieure des s tels que la mesure extérieure $M(s, E)$ soit infinie. C'est aussi la borne inférieure des s tels que $M(s, E)$ soit nulle.*

Voici trois exemples de structures fractales. L'ensemble triadique de Cantor sera notre premier exemple ; il est construit en « creusant des trous » dans l'intervalle $E = [0, 1]$. Le premier trou est l'intervalle ouvert (1/3, 2/3) que l'on retire. Il reste deux intervalles de longueur $1/3$ dans lesquels on répète l'opération. On obtient successivement $E_1, E_2, \cdots, E_j, \cdots$. L'ensemble E_j se compose donc de 2^j intervalles de longueur 3^{-j}. L'ensemble triadique de Cantor est l'intersection des E_j, $j \geqslant 1$. Il peut être aussi défini comme l'ensemble de tous les nombres réels dont le développement en base 3 ne contient aucun 1 ; on admet les développements ne contenant que des 0 à partir d'un certain rang ou des 2 à partir d'un certain rang. La dimension de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor est égale à $\log 2/\log 3$. L'ensemble triadique de Cantor est totalement discontinu ; c'est de la poussière d'ensemble.

Un exemple plus intéressant, car connexe, d'un seul tenant, est fourni par l'ensemble du plan défini comme suit. On part du carré unité D que l'on découpe en 9 carrés de côté $1/3$. On supprime le carré central et l'on obtient ainsi une sorte de couronne E_1 composée de 8 carrés D_j de côté $1/3$. On itère l'opération sur chacun de ces carrés et l'on obtient alors un ensemble E_2 qui se compose de 8 petites couronnes. Finalement l'ensemble que nous voulons construire (nommé tapis de Sierpinski) est l'intersection E des E_j. Cet ensemble E a pour dimension de Hausdorff $\frac{\log 8}{\log 3}$. C'est un objet connexe, d'un seul tenant, intermédiaire entre une courbe et une surface.

L'éponge de Sierpinski est notre troisième exemple ; c'est une architecture tridimensionnelle qui est définie comme suit. On part du cube unité Q. On appelle L_1, L_2, L_3, les trois axes de symétrie de Q qui sont perpendiculaires aux faces F_1, F_2, F_3 de Q. On découpe alors Q en 27 sous-cubes de côté $1/3$. On appelle $C_1 \subset F_1$, $C_2 \subset F_2$, $C_3 \subset F_3$, les trois carrés concentriques de côté $1/3$. On perce enfin trois tunnels dans Q autour des trois axes L_1, L_2, L_3; ces tunnels (ou galeries) ont pour section C_1, C_2, C_3. Une fois ces trois galeries supprimées, il reste un ensemble connexe de 20 cubes fermés Q_j, $1 \leqslant j \leqslant 20$, de côté $1/3$. Toutes choses égales par ailleurs, on continue la construction : on perce à nouveau trois tunnels dans chacun de ces petits cubes Q_j. Ce qui subsiste est une suite décroissante d'ensembles compacts E_j dont l'intersection est l'éponge de Sierpinski E. Le volume de E est nul et un spécialiste de l'architecture gothique parlerait de « dentelle de pierre » en décrivant E. La dimension de Hausdorff de E est $\frac{\log 20}{\log 3}$. L'éponge de Sierpinski est plus épaisse qu'une surface sans être pour autant un volume. C'est, par ailleurs, un ensemble connexe, d'un seul tenant. Si l'on accepte l'hypothèse de travail que les définitions données par Lebesgue et par Hausdorff sont compatibles, alors la surface de l'éponge de Sierpinski est infinie, car $\frac{\log 20}{\log 3}$ est strictement supérieur à 2. Mais la définition de la mesure d'une surface donnée par Lebesgue est-elle compatible avec la théorie de Hausdorff ?

3. Abram Samoilovitch Besicovitch

Besicovitch naquit à Berdyansk, Russie, en 1891. C'est le troisième héros dont nous allons évoquer la vie. En 1917, après avoir soutenu sa thèse sous la direction de Markov, il est nommé professeur à l'université de Perm (Oural) qui venait d'être créée. Comme Pasternak le décrivit dans le « Docteur Jivago », la guerre civile fit rage à Perm et l'Armée Blanche prit le contrôle de Perm de 1918 à 1919. En 1919, Besicovitch fut nommé à Petrograd (aujourd'hui Saint-Pétersbourg). En 1924, il s'enfuit de l'Union Soviétique en franchissant à pied la frontière avec la Finlande.

Il arriva à Copenhague et s'établit définitivement à Cambridge en 1927. Il mourut à Cambridge en 1970.

Besicovitch s'attaqua au problème de savoir si la mesure des surfaces proposée par Lebesgue était compatible avec celle donnée par Hausdorff. À sa plus grande surprise, Besicovitch constata qu'il n'en est rien [3]. En se plaçant dans l'espace euclidien usuel, Besicovitch construisit une surface W, homéomorphe à la sphère et ayant deux propriétés contradictoires : W a une aire finie au sens de Lebesgue, mais a aussi une mesure tridimensionnelle positive. La dimension de Hausdorff de W est donc 3 alors que, pour Lebesgue, W est une surface. Dans les lignes qui suivent nous décrirons ce qui joue le rôle de l'hémisphère supérieur de W. L'objet étrange construit par Besicovitch est composé d'une sorte d'immeuble (qui sera noté D et sera la première partie de W) où l'on installe le chauffage central ; l'ensemble V des surfaces des tuyaux composera la seconde partie de W. On a donc $W = V \cup D$.

L'immeuble est obtenu en partant du cube unité A qui est décomposé en 8 cubes égaux, $A_1, \dots, A_8$, (de côté un peu plus petit que $1/2$) séparés par des murs. Chacun de ces sous-cubes est lui-même décomposé en 8 cubes égaux et séparés par des murs. On obtient ainsi une suite décroissante d'ensembles compacts D_j (D_j est la réunion de 8^j petits cubes) et l'on suppose que les murs sont de plus en plus fins, de sorte que la mesure de l'intersection D des D_j soit $1/2$. Voici pour l'immeuble dans lequel on va installer le chauffage central. Les tuyaux vont être construits de sorte qu'en se subdivisant de plus en plus, ils finissent par atteindre n'importe quel point de D. Au départ, le gros tuyau V_0 amène l'eau chaude de l'extérieur. En pénétrant dans A, ce gros tuyau se scinde immédiatement en 8 petits tuyaux qui vont circuler dans les murs pour déboucher dans les 8 appartements différents $A_1, \dots, A_8$, consituant la première approximation de l'immeuble. Après avoir pénétré dans ces appartements, chacun des 8 tuyaux se scinde en 8 plus petits tuyaux qui vont alimenter en eau chaude chacune des 8 pièces $A_{i,j}$ de l'appartement A_j. Les sections de tous les tuyaux sont carrées et un tuyau pénètre dans un cube à travers un petit carré dont le centre est le même que celui de la face correspondante.

On continue indéfiniment et chaque tuyau de la j-ième étape se scinde en 8 tuyaux encore plus fins. On obtient ainsi une tuyauterie dont la surface est notée V_j et l'on construit en même temps la représentation paramétrique Φ_j de V_j. Les V_j se terminent donc par 8^j tuyaux minuscules qui alimenteront autant de chambres de poupée à l'intérieur desquelles la construction continue. On appelle V la réunion des $V_j, j \geqslant 0$. C'est à ce propos que l'on demanda à Besicovitch s'il avait été plombier dans une vie antérieure. Comme nous l'avons dit, on peut organiser la pose des tuyaux pour que leurs branches indéfiniment continuées puissent atteindre n'importe quel élément de l'ensemble D. Il est facile de régler l'épaisseur des tuyaux pour que l'aire de leur surface V ne dépasse pas $\frac{1}{10}$. On montre sans peine que les Φ_j convergent uniformément vers une fonction continue Φ qui est définie sur le carré unité. Il en résulte qu'au sens de Lebesgue, la surface de $W = V \cup D$ ne dépasse pas $\frac{1}{10}$, puisque la distance entre W et V_j tend vers 0 quand j tend vers l'infini. Mais le volume de V est nul, celui de D est $1/2$ et donc celui de W est aussi $1/2$.

On obtient la contradiction désirée : la fermeture W de la tuyauterie V de

Besicovitch est à la fois une *surface* ayant une aire finie au sens donné par Lebesgue et un *volume* au sens de Hausdorff. On peut soit construire la partie symétrique, soit suivre Besicovitch et boucher l'origine du premier tuyau par un hémisphère. L'ensemble W est alors la frontière topologique d'un ensemble ouvert Ω homéomorphe à une boule tandis que W est une sphère dont la mesure de Lebesgue tri-dimensionnelle est positive (FIG. 2).

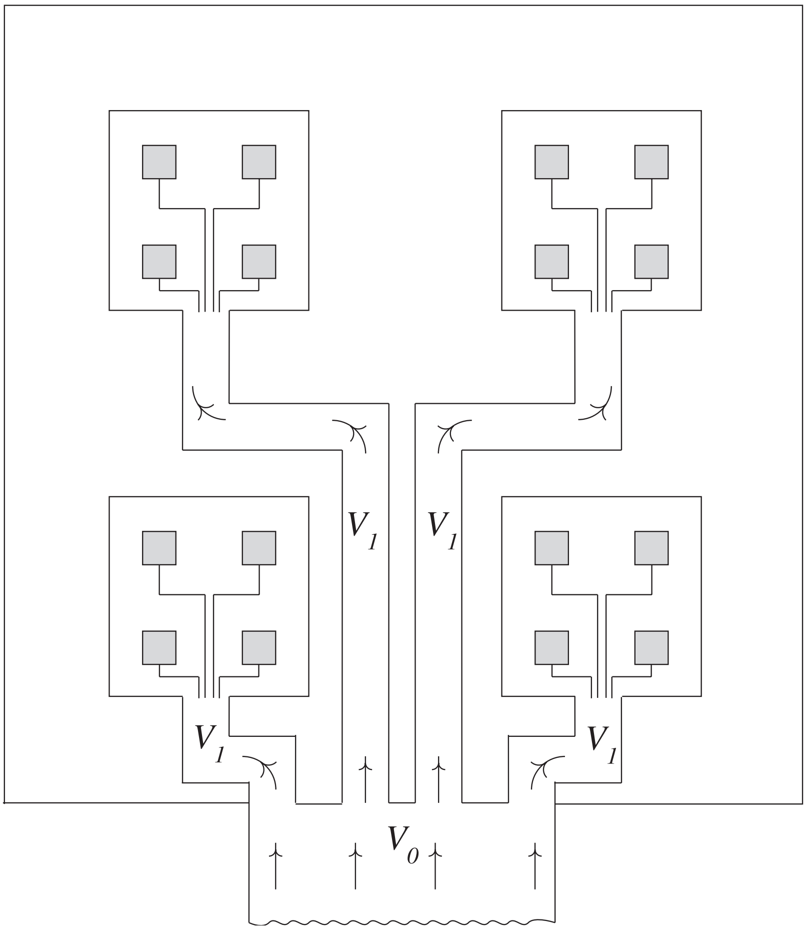

FIG. 2

On notera la similarité entre cette construction et celle d'une courbe de Jordan ayant une mesure positive. Pour construire une telle courbe, on part du carré unité D que l'on divise en quatre carrés D_j de côté $1/2$. On remplace alors ces quatre carrés par des carrés concentriques un peu plus petits de façon à amenager des murs. Ces quatre carrés forment l'ensemble E_1. On continue la construction à l'intérieur de chaque carré composant E_1 et l'on obtient l'ensemble E_2 qui se compose de 16 carrés. On peut conduire cette construction de sorte que l'on ait $|E_j| > 1/2$. On appelle E l'intersection de la suite décroissante des E_j. La courbe Γ est construite par approximations successives et nous ne traçons ici qu'un quart de Γ. On part du coin sud-ouest de D et l'on rejoint, par un segment, le coin sud-ouest du carré sud-ouest de E_1. On échappe de ce carré et de E_1 par le nord-est et l'on rentre à nouveau dans E_1 par le coin sud-ouest du carré nord-ouest. On en sort par le nord-est du même carré et l'on visite de même les deux autres carrés de E_1. On ne retouche plus à la partie de Γ qui est extérieure à E_1 et l'on précise alors ce qui se passe à l'intérieur de E_1. On procède à l'intérieur de chaque carré de E_1 en adoptant une similarité parfaite avec ce que nous venons de faire et l'on continue indéfiniment. La courbe limite n'a pas de point double. On ne repasse jamais par un endroit déjà visité. En revanche la courbe limite contient E (FIG. 3). Elle a donc une mesure positive.

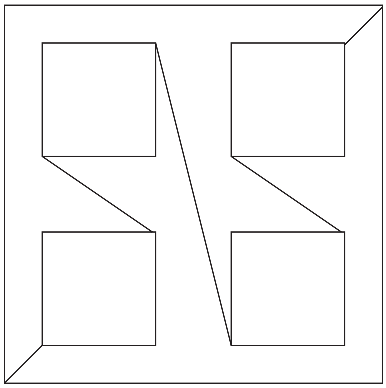

FIG. 3

4. Leonida Tonelli

Tonelli naquit à Gallipoli (Lecce), en 1885. Tonelli a fondé l'école italienne de calcul des variations et a contribué, par son énergie et son talent, à la renommée de l'École Normale Supérieure de Pise. Il mourut à Pise en 1946.

Tonelli répondit au problème posé par Jordan à Lebesgue en caractérisant l'espace BV des fonctions continues $f(x_1, x_2)$, définies dans le carré unité et dont le graphe Γ a, au sens de Lebesgue, une aire finie (notée $A(\Gamma)$). Ce graphe Γ est défini par $\{z = f(x, y),\ 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$. Tonelli réussit à donner un encadrement de $A(\Gamma)$ à l'aide de deux moyennes de longueurs de courbes tracées sur Γ. Plus précisément Tonelli démontra (Note aux CRAS du 10 mai 1926, référence [1]) que f appartient à BV si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies : (a) la variation totale $\beta(x_1)$ de la fonction $f(x_1, \cdot)$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, 1]$ et (b) la variation totale $\gamma(x_2)$ de la fonction $f(\cdot, x_2)$ est également intégrable sur $[0, 1]$. Tonelli ramena ainsi l'espace BV en deux variables à sa version unidimensionnelle. Écoutons Tonelli dans [1] :

> *« On a proposé plusieurs définitions pour l'aire d'une surface. La plus générale ... est la définition donnée par M. Lebesgue : L'aire d'une surface S est la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales dont S est la limite...Je me bornerai ici aux surfaces $z = f(x, y)$ où $f(x, y)$ est une fonction continue donnée dans le*

> *carré* $Q = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. *Je dirai qu'une fonction* $f(x,y)$ *est à variation bornée si :*
>
> *(1) pour presque toutes les valeurs de* $\bar{x}$ *et* $\bar{y}$ *dans* $(0,1)$, $f(\bar{x},y)$ *et* $f(x,\bar{y})$ *sont des fonctions de* y *et de* x, *respectivement à variation bornée dans* $(0,1)$;
>
> *(2) les variations totales de* $f(\bar{x},y)$ *et* $f(x,\bar{y})$ *dans* $(0,1)$ *sont des fonctions intégrables (au sens de M. Lebesgue) de* $\bar{x}$ *et* $\bar{y}$ *dans* $(0,1)$.
>
> *La condition nécessaire et suffisante pour que la surface* $z = f(x,y)$ *soit quarrable est que la fonction* $f(x,y)$ *soit à variation bornée.* »

Pendant longtemps l'espace BV s'est appelé « l'espace BV au sens de Tonelli », car de nombreux mathématiciens proposaient une définition différente et pensaient que les fonctions à variation bornée en deux variables devaient être définies comme des différences entre deux fonctions croissantes. L'espace BV a des caractérisations beaucoup plus simples. Parlons d'abord comme Tonelli l'aurait fait, sans utiliser le formalisme mathématique. Considérons une fonction f définie dans le plan, translatons f et donc son graphe Γ par une translation horizontale y et mesurons le volume $V(y)$ compris entre le graphe initial Γ et le graphe translaté Γ_y. Alors f est à variation bornée si et seulement si l'on a : $V(y) \leqslant C|y|$ pour toute translation y. En termes plus actuels on dira : Une fonction définie dans tout le plan appartient à BV si et seulement si il existe une constante C telle que, pour tout vecteur y, on ait

$$\int |f(x+y) - f(x)|\, dx \leqslant C|y|.$$

Ce résultat vaut en toute dimension. Dans le cas où la fonction f est la fonction indicatrice d'un ensemble E, l'opération à faire pour évaluer la norme BV est pariculièrement simple. On déplace un peu E en le translatant par un vecteur y. On obtient ainsi un ensemble translaté E_y. On calcule la surface $\Delta(y)$ de la différence symétrique entre E et E_y. Finalement on divise cette aire $\Delta(y)$ par la longueur de y et l'on calcule le maximum de ces quotients. On obtient ainsi la norme BV de la fonction indicatrice de E, ce qui nous sert de transition avec l'œuvre de De Giorgi. Pensons à la surface extérieure d'une colonne de hauteur 1 dont E est la section. L'espace fonctionnel BV est le dual d'un autre espace fonctionnel. La boule unité de BV est donc faiblement compacte et la méthode directe du calcul des variations s'applique, comme le conjecturait Lebesque.

5. Ennio De Giorgi

De Giorgi naquit à Lecce, en 1928, et mourut à Pise, en 1996. Il a éclairé ce débat de façon très originale en donnant raison, en un sens, à Lebesgue. *Dans l'exemple, donné par Besicovitch, de l'ensemble ouvert* Ω *délimité par* W, *De Giorgi considère que l'on doit définir la « frontière » de* Ω *comme l'ensemble* V *des surfaces des tuyaux, en excluant l'ensemble* D. Cette frontière réduite sera nommée « frontière distinguée » par De Giorgi. Pour définir la frontière distinguée, De Giorgi part du point de vue de la formule de Stokes. Il cherche donc à calculer l'intégrale de volume $I(g) = \int_\Omega \mathrm{div} g(x) dx$ à l'aide d'une intégrale de surface lorsque $g = (g_1, g_2, g_3)$ où g_1, g_2 et g_3 sont trois fonctions arbitraires de classe C^1. Il s'attend à transformer l'intégrale de volume en une intégrale de surface portant sur le bord $\Gamma = \partial\Omega$ de Ω et à obtenir $I(g) = \int_\Gamma g \cdot n\, d\sigma$ où n est le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur et $d\sigma$ est l'élément de surface sur le bord Γ de Ω. Si l'on applique ce point de vue à l'exemple de Besicovitch, on obtient que $d\sigma$ est la mesure de surface sur V et ne charge donc pas l'ensemble D de mesure positive ; la formule de Stokes ignore la frontière topologique au profit de la frontière distinguée qui est beaucoup plus petite. La question suivante qui est posée est de savoir si, en toute généralité (l'ensemble Ω étant maintenant arbitraire) $d\sigma$ est une mesure, c'est-à-dire s'il existe une constante C telle que l'on ait $|I(g)| \leqslant C \sup\{|g(x)|;\, x \in \Gamma\}$. La frontière Γ est rectifiable au sens de De Giorgi si c'est le cas. De façon équivalente, il s'agit de savoir si la fonction indicatrice de Ω appartient à BV. Finalement De Giorgi définit dans [4] l'aire $A(\Gamma)$ du bord Γ de Ω comme la norme BV de la fonction indicatrice de Ω. La frontière distinguée de Ω est, par définition, le support de σ. La propriété de convergence imposée par Lebesgue a lieu : si une suite Ω_j converge vers Ω au sens de la convergence en mesure, alors on a bien $A(\Gamma) \leqslant \liminf A(\Gamma_j)$. Dans le texte qui suit, De Giorgi appelle « mesure de Carathéodory » ce que nous appelons aujourd'hui « mesure de Hausdorff ». De Giorgi écrit dans [4] :

> *« Per quanto riguarda la definizione di Carathéodory, si vede subito che essa fornisce in generale, per la misura della frontiera di un insieme, un valore maggiore del nostro, eventualmente infinito, quando il perimetro è finito, sicché tutte le frontiere di misura finita secundo Carathéodory sono tali secondo la nostra definizione e non viceversa. »*
>
> [En ce qui concerne la définition de Carathéodory, on voit tout de suite qu'en général elle fournit une valeur supérieure à la nôtre, éventuellement infinie, pour la mesure de la frontière d'un ensemble, alors même que le périmètre est fini ; de sorte que toute frontière de mesure finie au sens de Carathéodory est finie selon notre définition mais que la réciproque n'est pas vraie.]

6. Inégalités isopérimétriques

Les inégalités isopérimétriques répondent à un problème posé dès l'antiquité. Quelle est la plus grande surface que l'on puisse déployer à l'intérieur d'un contour de longueur donnée ? Une légende nous dit que la fondation de Carthage par Didon, la reine malheureuse, a été négociée en promettant de n'utiliser que la surface délimitée par une peau de bœuf. Didon a alors découpé cette peau de bœuf pour en faire une très fine lanière qui servit à entourer la surface de la ville. En trois dimensions nous voudrions savoir quel est le plus grand volume qui soit délimité par une surface d'aire donnée ? Ecrire ce problème nécessite de savoir ce que vaut une aire. De Giorgi nous apprend dans [4] que, si S est l'aire du « bord distingué » $\partial^* E$ d'un ensemble borélien E, alors le volume $|E|$ de E vérifie toujours $|E| \leqslant cS^{3/2}$ où $c = \frac{1}{6\sqrt{\pi}}$. Ce résultat est remarquable parce qu'il est optimal : on ne peut faire mieux, car on a égalité si E est une boule. En outre dans le membre de droite ne figure que l'aire du bord distingué de E et non pas celle de la frontière de E. Cette dernière est bien plus grande et souvent infinie, ce qui affaiblirait le résultat.

Là encore, le point de vue des inégalités isopérimétriques donne raison à Lebesgue contre Besicovitch.

7. Le traitement de l'image

S. Osher, L. Rudin et E. Fatemi ont découvert une application aussi belle qu'inattendue des réflexions précédentes. Commençons par dire quelques mots des images digitales. Le niveau de gris en un point (x, y) d'une image en noir et blanc est un nombre compris entre 0 (noir) et 1 (blanc). Le plus souvent ce niveau de gris $f(x, y)$ est échantillonné sur 8 bits correspondant à 256 niveaux de gris. En outre le *pixel* (x, y) n'est pas un point arbitraire. Il appartient à une grille et les caméras numériques proposent, à l'heure actuelle, environ dix millions de pixels. Dans le cas d'une image en couleur, f devient un vecteur (f_1, f_2, f_3) utilisant trois couleurs primaires. Bien entendu, très peu de fonctions f proviennent d'images naturelles et le premier et le plus difficile problème du traitement de l'image consiste à en savoir plus : comment modéliser les images naturelles ? Le niveau de gris f est une fonction très structurée et cette structure n'est évidemment pas reliée à la régularité. L'éclairage est très irrégulier. Il y a une première source d'irrégularité dont l'origine vient de la géométrie du monde qui nous entoure ; l'éclairage des objets varie brutalement et ces variations sont dues aux bords des objets ou à des phénomènes d'occlusions. Une seconde source vient du bruit ou des fines textures que l'on rencontre dans toutes les images. Un second problème lui est apparenté : peut-on décomposer une image digitale f en la somme $f = u + v$ de deux composantes u et v de sorte que les objets contenus dans l'image constituent la première composante u tandis que v contienne les textures et le bruit ? Comment opérer cette décomposition ? Comment reconnaître et extraire les formes contenues dans l'image ? Osher, Rudin et Fatemi définissent la décomposition $f = u + v$ en minimisant la fonctionnelle $J(u) = \|u\|_{BV} + \lambda\|v\|_2^2$ où λ est un paramètre positif qui demande à être réglé avec soin. En effet les objets dont la taille est inférieure à $\frac{1}{2\lambda}$ sont incorporés dans la composante v par l'algorithme. Il est facile de justifier le rôle de l'espace BV dans ce problème. En fait les contours jouent un rôle essentiel en traitement de l'image. Faire un croquis revient à dessiner certains contours. Les contours doivent avoir une longueur finie sinon ils ne pourraient être dessinés. Si l'on considère le cas particulier d'une image dont l'éclairement ne prendrait qu'un nombre fini de valeurs, l'exigence que les contours soient de longueur finie signifie précisément que l'image digitale appartienne à BV.

Mumford et Shah proposèrent un autre modèle dont l'étude mathématique est conduite dans [6]. Dans le modèle de Mumford et Shah, l'image digitale est définie sur un carré Ω et la composante u appartient au sous-espace SBV de BV ; ce sous-espace se compose des fonctions u de BV qui représentent le mieux des images, au sens que u n'est « très irrégulière » que sur un ensemble singulier K de dimension de Hausdorff égale à 1. Alors les conditions imposées sur la composante $u(x)$ affectent deux termes. Le premier terme est la mesure de Hausdorff unidimensionnelle de K. Le second terme est la valeur quadratique moyenne du gradient de $u(x)$ calculé sur le complémentaire de K dans Ω. Le troisième terme composant la fonctionnelle $J(u)$ de Mumford et Shah est « la fidélité aux données », c'est-à-dire la valeur quadratique moyenne de la différence v entre f et u. La fonctionnelle que l'on cherche à minimiser est donc

$$J(u) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 \, dx + \alpha H^1(K) + \beta \|v\|_{L^2}^2$$

où $H^1(K)$ est la mesure de Hausdorff uni-dimensionnelle.

Les deux paramètres α et β doivent être réglés avec soin. Comme c'est le cas pour le modèle d'Osher et Rudin, si α est trop petit, trop de morceaux de l'image seront pris pour des objets. Ce modèle pose des problèmes mathématiques très intéressants qui ont beaucoup de lien avec la théorie des surfaces minimales [6].

Je voudrais conclure cet exposé en reprenant à mon compte les propos d'Alain Aspect, médaille d'or du CNRS : des problèmes portant sur les fondements des sciences et qui pourraient sembler relever de la métaphysique peuvent avoir les applications les plus inattendues et les plus pratiques.

8. Références

1. La page qui a servi à définir cette conférence est la Note aux CRAS de Leonida Tonelli, présentée par Jacques Hadamard, le 10 mai 1926, et intitulée « Sur la quadrature des surfaces ». Cette note fournit la première définition de l'espace BV des fonctions à variation bornée. Pendant longtemps les analystes disaient encore « BV au sens de Tonelli. » La note de Tonelli répondait à un problème posé par Henri Lebesgue. Il s'agissait de généraliser aux surfaces le fait bien connu par Lebesgue qu'une courbe plane est de longueur finie si et seulement si elle est paramétrée par une fonction à variation bornée. Le piège qui a égaré les analystes est le fait que toute fonction, d'une variable réelle, à valeur réelle, qui est à variation bornée est la différence entre deux fonctions croissantes ; c'est ce résultat qu'ils cherchèrent en vain à généraliser aux surfaces.

2. Le second texte fondateur est l'article de Felix Hausdorff intitulé « Dimension und äusseres Mass », Math. Ann. vol. 79 (1918) 157-179. Dans cet article Hausdorff définit la « mesure de Hausdorff » et la dimension d'un ensemble.

3. Le troisième héros de cette histoire est A. S. Besicovitch et l'article qui est discuté ici est « On the definition and value of the area of a surface », Quart. J. Math. vol 16 (1945) 86-102.

4. Le quatrième homme est Ennio De Giorgi et l'article fondateur est « Su una teoria generale della misura (r-1)-dimensionale in uno spacio ad r dimensioni. » Annali di mat. pura e appl. Ser.4, vol. 36 (1954) 191-213.

5. David Mumford, Leonid Rudin, Stanley Osher et Emad Fatemi ont été les pionniers de l'introduction de l'espace BV en traitement de l'image. Les références sont : (1) David Mumford and Jayant Shah. *Boundary detection by minimizing functionals*. Proc. IEEE Conf. Comp. Vis. Pattern Recognition, 1985. (2) D. Mumford and J. Shah. *Optimal representations by piecewise smooth functions and associated variational problems.* Comm. Pure Applied Mathematics, 42 (5) (1989) 577-685. (3) Stanley Osher and Leonid Rudin. *Total variation based image restoration with free local constraints*. In Proc. IEEE ICIP, vol I, pages 31-35, Austin (Texas) USA, Nov.1994. (4) Stanley Osher, Leonid Rudin and Emad Fatemi. *Nonlinear total variation based noise removal algorithms.* Physica D, 60 (1992) 259-268.

6. Le livre de référence sur la conjecture de Mumford-Shah est aujourd'hui le traité de Guy David, intitulé *Singular Sets of Minimizers for the Mumford-Shah Functional*, Birkhäuser, 2005.

7. Les amateurs de géométrie fractale doivent lire : *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications,* par Kenneth Falconer, John Wiley & Sons, 2000 ou bien : *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces : Fractals and Rectifiability,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **44,** par Pertti Mattila, Cambridge University Press (1995). On consultera aussi *Geometric Measure Theory, A beguinner's guide* par Frank Morgan, Academic Press (1988).

8. Commentaires de Jean-Michel Morel :

> « Je suis enchanté d'apprendre que Besicovitch avait conçu ses contre-exemples comme des systèmes de tuyauterie. C'est en partant de cet exemple, sans savoir qu'il était dû à Besicovitch, que Caselles et moi avons commencé à travailler sur les « ouverts irrigants ». Finalement on avait laissé cette voie pour le modèle d'irrigation simplifié que tu as vu dans la thèse de Bernot. J'adore les trois articles de Besicovich que j'ai lus dans le texte original, ils sont d'une astuce stupéfiante. Je peux t'en dire un peu plus sur BV et Mumford-Shah. C'est De Giorgi qui a diagnostiqué la présence de BV dans le modèle de Mumford-Shah. Mumford et Shah ignoraient complétement BV. Solimini et moi-même avions fait connaître à De Giorgi la conjecture de Mumford-Shah. Mais De Giorgi avait antérieurement formulé une conjecture plus générale. Il appelait ce type de problème « problème à discontinuité libre » et il s'inspirait de la fracturation et des cristaux liquides. Très élégamment il a adopté le nom de conjecture de Mumford-Shah alors que ce n'était qu'un cas particulier de son propre programme. Quant aux italiens ils étaient tellement saturés de conjectures de De Giorgi qu'ils étaient contents que l'une d'entre elles reçoive un nom venant d'ailleurs. C'est Leonid Rudin qui a eu le premier l'idée d'utiliser BV pour les images. Il s'inspirait d'un article de Kronrod qui contient la plupart des idées de la morphologie mathématique. »

9. Roger Temam a étudié, pour les besoins de la plasticité, les espaces $BD(\Omega)$ - pour bounded deformation - espaces introduits par Pierre Suquet pour ce qu'on appelle le modèle de plasticité de Hencky - qui est en fait un modèle d'élasticité non linéaire. Ces espaces sont des généralisations naturelles de l'espace BV. Les références sont :

G. Strang et R. Temam, *Existence de solutions relaxées pour les équations de la plasticité : étude d'un espace fonctionnel*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, 287, 1978, 515-518.

G. Strang et R. Temam, *Functions of bounded deformations*, Arch. Rational Mech. Anal., 75, 1980, 7-21.

G. Strang et R. Temam, *Duality and relaxation in the variational problems of plasticity*, J. Mécanique, 19, 1980, 493-527. (Avec une préface de Paul Germain).

10. La critique adressée par Jordan à Lebesgue se trouve, page 163, de « Quelques remarques sur la définition de l'aire des surfaces », Fundamenta Mathematicae, VIII, 160-165, 2 octobre 1925. On consultera également « Sur la définition de l'aire des surfaces », H. Lebesgue, L'enseignement mathématique, (1908), 212-220.

Opérateurs géométriques et géométrie conforme

Zindine Djadli[1]

1. Introduction

Dans ce survol nous présentons quelques résultats récents en géométrie conforme. L'origine de ce texte est un exposé au séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie de l'Université de Grenoble I donné par l'auteur en décembre 2004. Une version longue de ce texte sera publiée prochainement aux actes du séminaire de théorie spectrale et géométrie de Grenoble. Ce survol n'a pas vocation à être complètement exhaustif : il se présente comme une introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés et les problèmes de géométrie conforme sur les surfaces et sur les variétés de dimension 4.

Ce survol est divisé en quatre parties. Dans la première nous parlerons de l'inégalité de Moser-Trudinger (paragraphe 2) et son utilisation pour le traitement du problème de la courbure de Gauss prescrite (paragraphe 3). Dans la deuxième partie nous aborderons le problème de l'isospectralité sur les surfaces à travers l'inégalité de Polyakov qui est l'outil fondamental pour ce problème (paragraphe 4). Dans la troisième partie nous parlerons de la généralisation de ces outils et de ces problèmes au cas de la dimension 4 : l'opérateur de Paneitz (paragraphe 5) et l'existence de métriques extrémales pour la fonctionnelle log-determinant sur les variétés de dimension 4 (paragraphe 6). La dernière partie sera consacrée aux applications et à l'utilisation de l'opérateur de Paneitz en géométrie conforme : l'existence de métriques à Q-courbure constante (paragraphe 7), l'étude d'une fonctionnelle quadratique à travers la recherche de métriques extrémales pour une fonctionnelle log-determinant (paragraphe 8) et enfin l'étude de problèmes de rigidité en géométrie conforme (paragraphe 9).

Remerciements : Ma gratitude va à Gérard Besson et à Sylvain Gallot qui m'ont permis d'exposer mon travail au séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie de Grenoble et qui m'ont encouragé à écrire ce survol. Je les remercie également pour l'intérêt qu'ils n'ont cessé de manifester pour mon travail en géométrie conforme. Je voudrais également remercier Alice Chang et Paul Yang pour leur soutien constant.

2. Inégalité de Moser-Trudinger

L'un des outils fondamentaux pour l'étude de problèmes non linéaires sur les surfaces et plus particulièrement de problèmes elliptiques du type courbure de Gauss prescrite sur les surfaces, c'est-à-dire de problèmes elliptiques non linéaires avec non linéarité exponentielle est l'inégalité de Moser-Trudinger.

On notera dans toute la suite $W^{\alpha,q}$ (α entier et q réel plus grand que 1) l'ensemble des fonctions qui sont dans L^q et dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre α sont aussi dans L^q.

[1] Institut Fourier - Université Grenoble I

Rappelons que le théorème d'inclusion de Sobolev nous dit que pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on a (pour des réels α, p et q avec $q\alpha < n$)

$$W_0^{\alpha,q}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$

avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{n}$. Dans le cas $\alpha = 1$, $q < 2$ et $n = 2$ nous avons pour tout $p > 1$

$$W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$

mais en général on ne peut pas passer à la limite sur p c'est-à-dire que l'inclusion $W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, est fausse en général. Pour s'en convaincre il suffit de considérer la fonction $u(x) = \log\left(1 + \log\frac{1}{|x|}\right)$ sur $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. Malgré tout, Trudinger [Tru67] a obtenu l'intégrabilité L^2 de l'exponentielle dans le sens suivant

Théorème 1. *Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^2$. Il existe $C > 0$ et $\beta > 0$ ne dépendant que de Ω telles que pour toute fonction $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ vérifiant $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \le 1$, on a*

$$\int_\Omega e^{\beta u^2} dx \le C\, Vol(\Omega, euclidien). \tag{1}$$

On écrira $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow e^{L^p(\Omega)}$.

Bien entendu il n'est pas très difficile de passer d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à une surface compacte et sans bord. Ce qui nous donne :

Théorème 2. *Soit (M^2, g) une surface compacte, sans bord et de classe C^∞. Il existe $C > 0$ et $\beta > 0$ ne dépendant que de (M, g) telles que pour toute fonction $u \in W^{1,2}(M)$ vérifiant $\int_M u dv_g = 0$ et $\int_M |\nabla u|^2 dv_g \le 1$, on a*

$$\int_M e^{\beta u^2} dx \le C\, Vol(M, g).$$

On écrira $W^{1,2}(M) \hookrightarrow e^{L^p(M)}$.

Moser a montré que si (M, g) est la sphère standard $(\mathbb{S}^2, g_c)$ on peut prendre $\beta = 4\pi$ dans le théorème précédent et de plus cette valeur est optimale au sens où pour tout $\beta > 4\pi$ il existe une suite $(u_i)_i \subset W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$ telle que $\int_M |\nabla u_i|^2 dv_g \le 1$ pour tout i et

$$\int_{\mathbb{S}^2} exp(\beta u_i^2) dv_{g_c} \to +\infty$$

lorsque i tend vers l'infini. On peut énoncer le théorème :

Théorème 3. *Soit $(\mathbb{S}^2, g_c)$ la 2-sphère standard. Il existe $C > 0$ telle que pour toute fonction $u \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$ vérifiant $\int_{\mathbb{S}^2} u dv_{g_c} = 0$ et $\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 dv_{g_c} \le 1$, on a*

$$\int_{\mathbb{S}^2} e^{4\pi u^2} dv_{g_c} \le C.$$

Par conséquent, en posant $C_1 := \log C + \log\frac{1}{4\pi}$, on a pour tout $u \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$

$$\log \fint_{\mathbb{S}^2} e^{2u} dv_{g_c} \le \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 dv_{g_c} + 2\fint_{\mathbb{S}^2} u dv_{g_c} + C_1. \tag{2}$$

Pour les fonctions qui sont symétriques Moser [Mos71] a amélioré cette inégalité en prouvant :

Théorème 4. *Soit* $(\mathbb{S}^2, g_c)$ *la 2-sphère standard. Il existe* $C > 0$ *telle que pour toute fonction* $u \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$ *vérifiant* $u(\xi) = u(-\xi)$ *pour tout* $\xi \in \mathbb{S}^2$, $\int_{\mathbb{S}^2} u dv_{g_c} = 0$ *et* $\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 dv_{g_c} \leq 1$, *on a*

$$\int_{\mathbb{S}^2} e^{8\pi u^2} dv_{g_c} \leq C.$$

Par conséquent, en posant $C_1 := \log C + \log \frac{1}{4\pi}$, *on a pour tout* $u \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$

$$\log \fint_{\mathbb{S}^2} e^{2u} dv_{g_c} \leq \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 dv_{g_c} + 2 \fint_{\mathbb{S}^2} u dv_{g_c} + C_1. \tag{3}$$

Il existe une version optimale de l'inégalité (2) qui est due à Onofri [Ono82] :

Théorème 5. *Soit* $(\mathbb{S}^2, g_c)$ *la 2-sphère standard. On a pour tout* $u \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$

$$\log \fint_{\mathbb{S}^2} e^{2u} dv_{g_c} \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 dv_{g_c} + 2 \fint_{\mathbb{S}^2} u dv_{g_c}. \tag{4}$$

De plus on a égalité dans cette inégalité si et seulement si $e^{2u} g_c$ *est isométrique à* g_c.

Ce théorème joue un rôle fondamental dans l'étude de familles isospectrales sur la sphère dont nous reparlerons au paragraphe 4.

3. Courbure de Gauss et problèmes elliptiques associés

Considérons une surface compacte M^2, sans bord équipée d'une métrique que l'on notera g_0. A cette métrique est associée sa courbure de Gauss que nous noterons K_{g_0}. Dans cette partie nous nous pencherons sur le comportement de la courbure de Gauss lors d'un changement conforme de métrique, c'est-à-dire lorsque l'on considère une métrique de la forme

$$g_w := e^{2w} g_0,$$

où w est une fonction de classe C^∞ sur M. Il existe une relation très simple entre la courbure de Gauss pour la métrique g_0 et la courbure de Gauss pour la métrique g_w ; si on note Δ_{g_0} l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à g_0, elle est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1. *On a la relation*

$$\Delta_{g_0} w + K_{g_w} e^{2w} = K_{g_0}. \tag{5}$$

Cette équation est souvent appelée équation de courbure de Gauss prescrite. La preuve de cette relation est purement locale et utilise l'expression de la courbure en coordonnées locales. Une remarque importante découle directement de cette équation ; si on intègre celle-ci de chaque coté on obtient

$$\int_M K_{g_0} dv_{g_0} = \int_M K_{g_w} e^{2w} dv_{g_0} = \int_M K_{g_w} dv_{g_w},$$

autrement dit $\int_M K_{g_w} dv_{g_w}$ est un invariant conforme, i.e. indépendante de w. Nous verrons que cette quantité joue un rôle fondamental dans l'étude de l'équation de courbure scalaire prescrite. En fait $\int_M K_g dv_g$ est bien mieux qu'un invariant conforme puisque la formule de Gauss-Bonnet nous indique que c'est même un invariant topologique

Proposition 2. *(Formule de Gauss-Bonnet pour les surfaces) Soit (M^2, g_0) une surface compacte, sans bord et de classe C^∞. Alors on a*

$$\int_M K_{g_0} dv_{g_0} = 2\pi\chi(M),$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de M.

Un des problèmes centraux reliés à l'équation de courbure scalaire prescrite est le suivant : étant données une surface compacte, sans bord et de classe C^∞, (M^2, g_0), et une fonction $K \in C^\infty(M)$, peut-on trouver une métrique $\overline{g}$ conforme à la métrique g_0 telle que la courbure de Gauss associée à $\overline{g}$ soit exactement la fonction K ? Autrement dit est-ce que l'équation (5) admet une solution w dans $C^\infty(M)$? Ce problème est souvent appelé problème de courbure de Gauss prescrite. Un cas particulier de ce problème est celui où K est une fonction constante. Comme on le voit sur la formule de Gauss-Bonnet, (M^2, g_0) étant donnée, le signe de K ne peut pas être quelconque, il est determiné par celui de $\chi(M)$. Ce problème, que l'on nomme communément problème d'uniformisation des surfaces, a été entièrement résolu par Weil en utilisant des techniques d'analyse complexe : sur toute surface (M^2, g_0), compacte, sans bord et de classe C^∞ et étant donné un réel $\lambda > 0$, il existe une métrique conforme à g_0 dont la courbure de Gauss est $signe(\chi(M))\lambda$. A noter qu'une autre preuve de ce résultat a été obtenue par Osgood, Philips et Sarnak [OPS88a] et [OPS88b] en utilisant la fonctionnelle log-determinant dont nous parlerons dans la section 4.
Revenons maintenant au problème de courbure de Gauss prescrite dans le cas général. Dans [KW75a], Kazdan et Warner ont obtenu des conditions nécessaires et suffisantes pour la résolution de (5) dans certains cas

Théorème 6. *Supposons $\chi(M) = 0$. Alors l'équation* (5) *possède une solution si et seulement l'une des deux situations suivantes se produit*

- **(i):** $K \equiv 0$;
- **(ii):** *K change de signe et vérifie $\int_M Ke^{2f} dv_{g_0} < 0$ où f est une solution de l'équation $\Delta_{g_0} f = K_{g_0}$.*

Ce théorème résout complètement le problème lorsque M est une surface à caractéristique d'Euler-Poincaré nulle. Lorsque celle-ci est strictement positive ou strictement négative nous n'avons que des résultats partiels. Commençons par le cas où $\chi(M) < 0$.
Le cas $\chi(M) < 0$ a également été étudié par Kazdan et Warner, mais pas complètement résolu. Dans [KW75a], Kazdan et Warner montrent une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction K soit la courbure de Gauss d'une métrique conforme à la métrique initiale mais cette condition n'est pas explicite et ne permet pas de caractériser les fonctions qui sont la courbure de Gauss d'une métrique conforme à la métrique initiale. On pourra se référer à Kazdan-Warner [KW75a] pour plus de détails (en particulier sur des exemples de fonctions qui ne sont pas courbure de Gauss d'une métrique conforme à la métrique initiale).

Lorsque $\chi(M) > 0$ alors soit $\chi(M) = 2$ et dans ce cas M est difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$, soit $\chi(M) = 1$ et dans ce cas M est difféomorphe au projectif réel $\mathbb{R}P^2$. Considérons le cas $(M, g) := (\mathbb{S}^2, g_c)$ la sphère standard munie de sa métrique canonique qui est à courbure de Gauss $K_{g_c} \equiv 1$. On a vu que si $g_w := e^{2w} g_c$ on a

$$\Delta_{g_c} w + K_{g_w} e^{2w} = 1 \tag{6}$$

sur $\mathbb{S}^2$. Comme nous l'avons vu dans le cas $\chi(M) < 0$ il existe aussi des fonctions qui ne peuvent pas être réalisées comme courbure de Gauss d'une métrique conforme à la métrique canonique sur $\mathbb{S}^2$. Plus précisément

Théorème 7. *(Obstruction de Kazdan-Warner) Soit $w \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$ une solution de* (6)*. Alors, pour toute fonction propre φ de Δ_{g_c} associée à la valeur propre 2 on a*

$$\int_{\mathbb{S}^2} < \nabla_{g_c} K, \nabla_{g_c} \varphi >_{g_c} e^{2w} dv_{g_c} = 0. \tag{7}$$

Les conséquences de ce théorème sont importantes. En effet, puisque d'après la formule de Gauss-Bonnet nous savons que $\int_{\mathbb{S}^2} K e^{2w} dv_{g_c} = 4\pi$, on en déduit que K doit être strictement positive quelque part. Mais cela ne suffit pas ; si on considère une fonction propre φ de Δ_{g_c} associée à la valeur propre 2, on voit bien que $K := 1 + \varepsilon\varphi$ est strictement positive dès que ε est assez petit mais ne vérifie pas les conditions du théorème.

Un des premiers résultats remarquables sur le problème de la courbure de Gauss prescrite sur la sphère standard fut obtenu par Moser [Mos71]

Théorème 8. *Soit $K \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ avec K strictement positive quelque part et $K(x) = K(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^2$. Alors l'équation* (6) *admet une solution $w \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$. De plus $w(x) = w(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^2$*

L'ingrédient principal pour la preuve de ce théorème est l'inégalité de Moser-Trudinger dont nous avons parlé au paragraphe précédent. Pour montrer ce résultat Moser introduit la fonctionnelle

$$J_K[w] := \log \fint_{\mathbb{S}^2} K e^{2w} dv_{g_c} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla w|_{g_c} dv_{g_c} - 2 \fint w dv_{g_c}. \tag{8}$$

Les points critiques de cette fonctionnelle sont exactement les solutions de

$$-\Delta_{g_c} w + 1 = \frac{K e^{2w}}{\fint_{\mathbb{S}^2} K e^{2w} dv_{g_c}},$$

et si l'on pose $\tilde{w} := w - \frac{1}{2} \log \fint_{\mathbb{S}^2} K e^{2w} dv_{g_c}$, $\tilde{w}$ sera solution de l'équation

$$\Delta_{g_c} w + K e^{2w} = 1. \tag{9}$$

En utilisant le Théorème 4 il est ensuite facile de montrer que la fonctionnelle J_K admet un maximum sur l'ensemble $\mathcal{C} := \{w \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2) \ : \ w \text{ est paire et } \int_{\mathbb{S}^2} K e^{2w} dv_{g_c} > 0\}$. Il est important de signaler que l'amélioration de la valeur de la constante 4π entre le Théorème 3 et le Théorème 4 est cruciale pour montrer

l'existence d'un point critique sur $\mathcal{C}$ (à cause de la présence du facteur $\frac{1}{4\pi}$ dans l'expression de la fonctionnelle J_K).
D'autres résultats ont été obtenus pour des fonctions K qui ne sont pas supposées symétriques. Voir par exemple Chang-Yang [CY91a], Chang-Gursky-Yang [CGY93], Bahri-Coron [BC91] et Li [Li96] ainsi que les références contenues dans ces articles.

4. Formule de Polyakov sur les surfaces

Dans cette partie nous introduisons la fonctionnelle log-determinant associée à l'opérateur de Laplace-Beltrami. Considérons une variété riemannienne compacte de dimension n, (M^n, g), sans bord et de classe C^∞. On sait que le spectre du laplacien Δ_g constitue une suite croissante

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \ldots,$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers l'infini. De surcroît, les fonctions propres $\{\varphi_j\}_j$ forment une base orthonormée de $L^2(M)$.
On peut définir la fonction ζ associée à Δ_g par

$$\zeta(s) = \sum_{\lambda_k \neq 0} \lambda_k^{-s}. \tag{10}$$

Pour le moment on ne se préoccupe pas de la convergence de cette série (convergence dont nous parlerons plus tard). Si on décide d'écrire cette série de manière formelle on obtient

$$\zeta'(s) = -\sum_{\lambda_k \neq 0} (\log \lambda_k) \lambda_k^{-s},$$

autrement dit, toujours formellement,

$$\zeta'(0) = -\sum_{\lambda_k \neq 0} \log \lambda_k = -\log \prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k.$$

Cette écriture formelle fut celle qui a motivé la définition de la fonctionnelle log-determinant par Ray et Singer [RS71]

$$\log det(\Delta_g) := \zeta'(0). \tag{11}$$

Nous justifions maintenant l'existence de $\zeta'(0)$. Si on note $N(\lambda) := Card\{j \in \mathbb{N} : \lambda_j \leq \lambda\}$ on a la formule asymptotique de Weyl

Proposition 3. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte, sans bord et de classe C^∞. Alors*

$$N(\lambda) \sim \omega_n Vol(M, g) \frac{\lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n}, \tag{12}$$

lorsque λ tend vers l'infini. Ici ω_n désigne le volume de la boule unité standard de $\mathbb{R}^n$. En particulier lorsque $\lambda = \lambda_k$

$$(\lambda_k)^{\frac{n}{2}} \sim \frac{k(2\pi)^n}{\omega_n Vol(M, g)} \tag{13}$$

lorsque k tend vers l'infini.

Puisque λ_k se comporte asymptotiquement comme $k^{\frac{2}{n}}$, on en déduit que la fonction ζ est bien définie lorsque $Re(s) > \frac{n}{2}$. Maintenant si on veut donner un sens à $\zeta'(0)$ on utilise, de manière classique, la transformée de Mellin

$$x^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_M e^{-xt} t^{s-1} dt, \tag{14}$$

où Γ est la fonction Gamma classique

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt.$$

La fonction Γ possède un pôle simple en 0 et on a

$$s\Gamma(s) \sim_{s\to 0} 1.$$

En utilisant la transformée de Mellin on peut écrire ζ en fonction de Γ lorsque $Re(s) > \frac{n}{2}$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty e^{-\lambda_j t} t^{s-1} dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty (Z(t) - 1) t^{s-1} dt,$$

où

$$Z(t) := \int_M H(x, x, t) dv_g(x) = \sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda_k t} = Trace(e^{t\Delta_g})$$

est la trace du noyau de la chaleur

$$H(x, y, t) := \sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x) \varphi_k(y).$$

Rappelons que H est l'unique solution fondamentale de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_g u = 0, \\ \lim_{t\to 0} u(x, t) = f(x); \end{cases} \tag{15}$$

au sens où f étant donnée dans $C^\infty(M)$, le produit de convolution $u := H \star f$ est solution de (15).

Dans le cas où la variété est une surface de Riemann on peut obtenir une expression explicite pour ces développements. Nous les donnons ci-dessous

$$\begin{cases} H(x, x, t) = \dfrac{1}{4\pi t} + \dfrac{K_g(x)\pi}{12} + \dfrac{K_g^2(x)\pi t}{60} + O(t^2), \\ Z(t) = \dfrac{Vol(M, g)}{4\pi t} + \dfrac{\chi(M)}{6} + \dfrac{\pi t}{60} \displaystyle\int_M K_g^2 dv_g + O(t^2). \end{cases} \tag{16}$$

Ainsi, lorsque la fonction ζ est bien définie, on a

$$
\begin{aligned}
(17)\quad \zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 (Z(t)-1)t^{s-1}\,dt + \frac{1}{\Gamma(s)}\int_1^\infty (Z(t)-1)t^{s-1}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 t^{s-1}\left[\frac{Vol(M,g)}{4\pi t} + \frac{\chi(M)}{6} + \frac{\pi t}{60}\int_M K_g^2 dv_g + t^2P(t) - 1\right]dt \\
&\qquad + \frac{1}{\Gamma(s)}\int_1^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty e^{-\lambda_k t}\right)t^{s-1}\,dt,
\end{aligned}
$$

où P est une fonction bornée. La seconde quantité est holomorphe en s puisque la fonction Γ ne s'annule pas et puisque, pour t grand, $\sum_{k=1}^\infty e^{-\lambda_k t} \leq Ce^{-\lambda_1 t}$ grâce à la formule asymptotique de Weyl. La première quantité quant à elle peut s'écrire

$$
\frac{1}{\Gamma(s)}\left[\frac{t^{s-1}}{s-1}\frac{Vol(M,g)}{4\pi} + \frac{\chi(M)}{6s}t^s + \frac{\pi t^{s+1}}{60(s+1)}\int_M K_g^2 dv_g - \frac{t^s}{s}\right]_{t=0}^{t=1} + B(s),
$$

avec $B(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 P(t)t^{s+1}dt$ qui est holomorphe sur $Re(s) > -1$. On observe facilement que l'expression précédente converge pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 1$ et possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier avec un pôle simple en $s = 1$.

Comme on le voit donc, ζ est holomorphe sur le demi-plan $Re(s) > 1$ et possède un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en $s = 1$ et on a de plus

$$
\zeta(0) = \frac{\chi(M)}{6} - 1.
$$

Notons que l'on peut obtenir une formule explicite de $\zeta(0)$ en dimension plus grande que 2 (voir Rosenberg [Ros97]). Puisque ζ est analytique en 0 on peut définir $\zeta'(0)$ (qui n'est rien d'autre que $\lim_{s\to 0}\frac{\zeta(s)-\zeta(0)}{s}$). Nous avons donc justifié rigoureusement (11).

Une question naturelle consiste à se demander ce qui se produit sur la fonction ζ lorsque l'on réalise un changement conforme de métrique. C'est à cette question que répond le théorème suivant :

Théorème 9. *(Formule de Polyakov) Soit (M^2, g_0) une surface compacte, sans bord et de classe C^∞. On considère le changement conforme de métrique $g_w := e^{2w}g_0$ avec $Vol(M,g_0) = Vol(M,g_w)$. Alors on a la formule suivante (dite formule de Polyakov* [Pol81]*)*

$$
(18)\qquad F[w] := \log\frac{det(-\Delta_{g_w})}{det(-\Delta_{g_0})} = -\frac{1}{12\pi}\int_M \left(|\nabla_{g_0}w|_{g_0}^2 + 2K_{g_0}w\right)dv_{g_0}.
$$

La formule de Polyakov décrit donc le comportement de la fonctionnelle $g \longmapsto \log det(-\Delta_g)$ (que l'on appelle généralement la fonctionnelle log-déterminant) sous changement conforme de métrique qui preserve le volume. En fixant une métrique initiale g_0, l'étude de la fonctionnelle log-déterminant dans la classe conforme de g_0 se réduit donc à l'étude de la fonctionnelle

$$
w \in C^\infty(M) \longmapsto -\frac{1}{12\pi}\int_M \left(|\nabla_{g_0}w|^2 + 2K_{g_0}w\right)dv_{g_0}.
$$

Les points critiques de cette fonctionnelle possèdent des propriétés remarquables dans certains cas et c'est ce que nous allons illustrer à l'aide des résultats suivants

Proposition 4. *Considérons la 2-sphère standard* $(\mathbb{S}^2, g_c)$*. Alors pour tout* $w \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ *tel que* $Vol(\mathbb{S}^2, g_w) = 4\pi$ *on a* $F[w] \leq F[0] = 0$*. Autrement dit* F *est maximal pour la métrique standard* g_c *(ce qui correspond à* $w \equiv 0$*).*

Dans le cas des surfaces qui ne sont pas la sphère standard la situation est plus compliquée comme nous allons le voir. Toutefois en courbure constante négative nous avons

Proposition 5. *Soit* (M^2, g_0) *une surface compacte, sans bord et de classe* C^∞*. On suppose que* $K_{g_0} \equiv$ *constante* ≤ 0*. Alors pour toute fonction* $w \in C^\infty(M)$ *telle que* $Vol(M, g_w) = Vol(M, g_0)$ *on a*

$$F[w] \leq 0,$$

et de plus on a l'égalité si et seulement si $w \equiv 0$*.*

Dans le cas de la 2-sphère standard, il est assez aisé de voir que l'inégalité d'Onofri (et son cas d'égalité) nous donne un analogue du théorème précédent. A notre connaissance il n'existe pas d'autres résultat d'existence et de caractérisation de métriques extrémales pour la fonctionelle log-déterminant sur les surfaces.
Une autre application de la formule de Polyakov concerne l'étude des familles de métriques (conformes) isospectrales sur une surface. On considère une surface M compacte, lisse et sans bord. On dira qu'une famille de métriques (conformes) $\{g_i\}_i$ définies sur M est isopectrale lorsque toutes ces métriques possèdent le même spectre pour leur opérateur de Laplace-Beltrami respectif. En 1988, Osgood, Phillips et Sarnak [OPS88a] et [OPS88b] ont montré

Théorème 10. *Soit* M^2 *une surface compacte, sans bord et de classe* C^∞*. Toute famille de métriques isospectrales sur cette surface forme une famille compacte pour la topologie* C^∞ *modulo la classe d'isométrie.*

Donnons une idée succinte de la preuve dans le cas de la sphère standard $(\mathbb{S}^2, g_c)$. D'après (16), on a

$$Z(t) \sim \frac{1}{4\pi t}\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots\right)$$

lorque t tend vers 0^+, et où $a_0 = Vol(\mathbb{S}^2, g_c)$, $a_1 = \frac{4\pi}{3}$, $a_2 = \frac{\pi}{60}\int_{\mathbb{S}^2} K_{g_c}^2 dv_{g_c}$, et pour $k \geq 3$, $a_k = \int_{\mathbb{S}^2} B_{2k} dv_{g_c}$, B_{2k} étant un polynôme universel de degré $2k$ en K_{g_c}. Puisque la famille de métriques considérée est isospectrale, a_2 est constant sur toute cette famille et cela nous donne un contrôle sur $\Delta_{g_c} u_i$ (ici on a posé $g_i = e^{2u_i} g_c$). Si on veut obtenir un contrôle sur les dérivées premières des u_i on utilise la formule de Polyakov, qui permet directement de dominer $\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u_i| dv_{g_c}$. Ensuite par un argument de bootstrap et en utilisant les a_k pour $k \geq 3$ on parvient à contrôler toutes les dérivées des u_i. A noter que l'on utilise le théorème d'Onofri pour pouvoir dominer $\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u_i| dv_{g_c}$ dans ce cas (la sphère). Si la surface sous-jacente n'est pas la sphère (et puisque l'on peut toujours se ramener à une métrique à courbure de Gauss constante égale à -1, 0 ou $+1$) on peut exercer un contrôle sur les dérivées premières des u_i directement à partir de le formule de Polyakov.

5. Opérateurs covariant conforme d'ordre 4

Sur une variété riemannienne de dimension 2, l'opérateur de Laplace-Beltrami est, comme on l'a vu, un opérateur géométrique naturel. Sous le changement conforme $\tilde{g} = e^{2w}g$, et lorsque la dimension est 2, le laplacien pour $\tilde{g}$ est relié au laplacien pour g par la relation

$$\Delta_{\tilde{g}}\varphi = e^{-2w}\Delta_g\varphi, \quad \forall\varphi \in C^\infty(M).$$

En dimension plus grande que 2, le même genre de relation d'invariance conforme est vraie mais pour un opérateur (d'ordre 2) légèrement différent du laplacien, opérateur appelé laplacien conforme $L_g = -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g + Scal_g$. On a, si $\tilde{g} = e^{2w}g$, pour tout $\varphi \in C^\infty(M)$

$$L_{\tilde{g}}(\varphi) = e^{-\frac{n+2}{2}w}L_g\left(e^{\frac{n-2}{2}w}\varphi\right).$$

D'une façon plus générale, on dira qu'un opérateur A_g dépendant de la métrique est conformément covariant de bi-degré (a, b) si, sous le changement conforme de métrique $\tilde{g} = e^{2w}g$, les opérateurs $A_{\tilde{g}}$ et A_g sont reliés par la relation

$$A_{\tilde{g}}(\varphi) = e^{-bw}A_g(e^{aw}\varphi), \quad \forall\varphi \in C^\infty(M).$$

Un opérateur d'ordre 4 particulièrement intéressant fut découvert en 1983 par S. Paneitz [Pan83]. Cet opérateur défini sur les variétés de dimension 4 est donné par

$$P_g\varphi = \Delta_g^2\varphi - div_g\left(\frac{2}{3}Scal_g g - 2Ric_g\right)d\varphi. \tag{19}$$

Cet opérateur est conformément covariant de bidegré $(0, 4)$, i.e. si $\tilde{g} = e^{2w}g$

$$P_{\tilde{g}}(\varphi) = e^{-4w}P_g(\varphi), \quad \forall\varphi \in C^\infty(M).$$

L'opérateur de Paneitz sur les variétés de dimension 4 présente beaucoup de similitudes avec l'opérateur laplacien sur les surfaces. Nous allons les présenter ici.
(i) Sur une surface compacte, l'invariant de courbure naturel associé à Δ_g est la courbure de Gauss K_g. Sous le changement conforme $\tilde{g} = e^{2w}g$, on a

$$-\Delta_g w + K_g = K_{\tilde{g}}e^{2w}.$$

Sur une variété de dimension 4 on a

$$P_g w + 2Q_g = 2Q_{\tilde{g}}e^{4w},$$

où Q_g est l'invariant de courbure défini par (on appelle souvent Q_g la Q-courbure)

$$Q_g = \frac{1}{12}\left(-\Delta Scal_g + Scal_g^2 - 3|Ric_g|^2\right). \tag{20}$$

(ii) L'analogie entre K et Q est encore plus flagrante si on considère la formule de Gauss-Bonnet. Sur une surface on a

$$2\pi\chi(M) = \int_M K_g dv_g,$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de M. En dimension 4, on a

$$4\pi^2\chi(M) = \int_M \left(\frac{1}{8}\left|Weyl_g\right|_g^2 + Q_g\right) dv_g. \tag{21}$$

Il faut noter que, puisque $\left|Weyl_g\right|^2 dv_g$ est invariant par changement conforme, c'est le terme $Q_g dv_g$ qui mesure le changement conforme. Notons aussi que compte tenu de la formule de Gauss-Bonnet et de l'invariance conforme de $\left|Weyl_g\right|^2 dv_g$, la quantité $\int_M Q_g dv_g$ (que l'on note en général k_P) est un invariant conforme.
Lorsque la dimension de la variété est supérieure ou égale à 3, on a vu que l'opérateur invariant conforme d'ordre 2 est le laplacien conforme L_g. Si on écrit le changement conforme $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ où u est une fonction lisse et strictement positive, comme on l'a vu, pour tout $\varphi \in C^\infty(M)$

$$L_{\tilde{g}}(\varphi) = u^{-\frac{n+2}{n-2}} L_g(u\varphi).$$

En prenant $\varphi \equiv 1$ dans cette égalité on obtient

$$L_g(u) = Scal_{\tilde{g}}\, u^{\frac{n+2}{n-2}}. \tag{22}$$

Il existe aussi un opérateur d'ordre 4 naturel sur les variétés de dimension supérieure ou égale à 5. Celui-ci fut mis en évidence par Branson [Bra85]. Soit une variété (M,g) de dimension $n \geq 5$ et considérons

$$P_g^n(\varphi) = \Delta_g^2\varphi - div_g\left(a_n Scal_g g + b_n Ric_g\right) d\varphi + \frac{n-4}{2} Q_g^n,$$

où

$$Q_g^n = c_n \left|Ric_g\right|^2 + d_n Scal_g^2 - \frac{1}{2(n-1)}\Delta_g Scal_g,$$

$a_n = \frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)}$, $b_n = -\frac{4}{n-2}$, $c_n = -\frac{2}{(n-2)^2}$ et $d_n = \frac{n^3-4n^2+16n-16}{8(n-1)^2(n-2)^2}$. Cette opérateur est conformément covariant : si $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-4}} g$ alors $\forall\varphi \in C^\infty(M)$

$$P_{\tilde{g}}^n(\varphi) = u^{-\frac{n+4}{n-4}} P_g^n(u\varphi).$$

On a aussi l'analogue de l'équation (22)

$$P_g^n(u) = Q_{\tilde{g}}\, u^{\frac{n+4}{n-4}}.$$

Dans ce survol nous n'allons pas nous intéresser à l'opérateur P_g^n. Nous ne parlerons que de la dimension 4 et donc uniquement de l'opérateur de Paneitz

$$P_g\varphi = \Delta_g^2\varphi - div_g\left(\frac{2}{3} Scal_g g - 2Ric_g\right) d\varphi.$$

L'une des premières questions que l'on peut se poser à propos de cet opérateur, surtout compte tenu de son expression un peu « compliquée », concerne ses propriétés d'opérateur, en particulier sur son noyau et sa positivité éventuelle. Ces questions ne sont pas simples et pour le moment il n'existe que des résultats très partiels. Le premier que nous donnons est dû à Gursky [Gur99] et [Gur98]

Théorème 11. *Soit (M^4, g) une variété riemannienne compacte, sans bord, lisse et de dimension 4. Si l'invariant de Yamabe $Y(M, [g])$ est positif ou nul et si $\int_M Q_g dv_g$ est aussi positif ou nul alors P_g est un opérateur dont le noyau est réduit à $\mathbb{R}$. Si de plus on suppose que $0 \leq \int_M Q_g dv_g < 8\pi^2$ alors P_g est également un opérateur positif au sens où pour tout $\varphi \in C^\infty(M)$ on a $\int_M \varphi P_g \varphi dv_g \geq 0$.*

La valeur $8\pi^2$ qui apparaît dans ce théorème n'est pas anodine ; c'est la valeur que prend la Q-courbure sur la sphère $\mathbb{S}^4$ munie de sa métrique standard. D'ailleurs Gursky [Gur99] a montré un résultat le rigidité suivant :

Théorème 12. *Soit (M^4, g) une variété riemannienne compacte, sans bord, lisse et de dimension 4. Si l'invariant de Yamabe $Y(M, [g])$ est positif ou nul et si $\int_M Q_g dv_g$ est aussi positif ou nul alors $\int_M Q_g dv_g \leq 8\pi^2$ avec égalité si et seulement si (M, g) est conformément difféomorphe à la 4-sphère standard.*

Très récemment Gursky et Viaclovsky [GV03] ont donné une version plus forte du Théorème 11

Théorème 13. *Soit (M^4, g) une variété riemannienne compacte, sans bord, lisse et de dimension 4. On suppose que l'invariant de Yamabe $Y(M, [g])$ est strictement positif et que*

$$\int_M Q_g dv_g + \frac{1}{6}(Y(M, [g]))^2 > 0.$$

Alors P_g est un opérateur positif dont le noyau est réduit à $\mathbb{R}$.

6. La fonctionnelle déterminant en dimension 4 et métriques extrémales

Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte, sans bord, lisse et de dimension $n \geq 3$. On considère un opérateur différentiel géométrique (au sens où il dépend de la métrique) A_g que l'on va supposer auto-adjoint, et de symbole principal positif et d'ordre 2ℓ, avec $\ell \in \mathbb{N}^*$. De plus on suppose que A_g se comporte de la même manière que son symbole principal sous l'action d'une homothétie sur la métrique, c'est-à-dire que si $\overline{g} := \lambda^2 g$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors

$$A_{\overline{g}} = \lambda^{-2\ell} A_g.$$

On peut prendre par exemple l'opérateur laplacien conforme $L_g = -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g + Scal_g$.
Classiquement, on a le développement suivant pour le noyau de la chaleur associé à A_g pour tout $\varphi \in C^\infty(M)$

$$Tr(\varphi e^{tA_g}) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{\frac{k-n}{2\ell}} a_k(\varphi, A_g), \quad a_k(\varphi, A_g) = \int_M \varphi(x) B_k(x, A_g) dv_g(x),$$

lorsque t tend vers 0, $t > 0$, où les fonctions B_k sont des invariants locaux de la métrique g.

Si on note $\{\lambda_0, \ldots, \lambda_j, \ldots\}$ les valeurs propres de A_g, on sait que seul un nombre fini de celles-ci sont négatives (car M est compacte), et on a là encore une formule asymptotique de Weyl donnée par

$$\lambda_j \sim c(g, A_g) j^{\frac{2\ell}{n}}, \tag{23}$$

lorsque j tend vers l'infini. De manière analogue à ce que nous avons fait en (10), on peut définir la fonction ζ_A associée à l'opérateur A_g en posant

$$\zeta_A(s) := \sum_{\lambda_j \neq 0} |\lambda_j|^{-s}, \tag{24}$$

pour $Re(s) > \frac{n}{2\ell}$. On peut montrer, ainsi que nous l'avons fait précédemment, que la fonction ζ_A admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles simples, et que ce prolongement est analytique en 0. Dès lors, on définit le déterminant de A_g en posant

$$det(A_g) := (-1)^{Card\{j, \lambda_j < 0\}} exp\left(-\zeta'(0)\right). \tag{25}$$

Il faut remarquer que cette définition n'est pas invariante par homothétie sur la métrique, ce qui est quelque peu problématique. Pour cette raison on introduit

$$P(A_g) := \left(Vol(M, g)\right)^{\frac{2\ell}{n}} det(A_g), \tag{26}$$

et clairement $P(A_g)$ est invariant par homothétie sur la métrique, c'est-à-dire que si $\overline{g} := \mu^2 g$, avec $\mu \in \mathbb{R}^*$, alors $P(A_{\overline{g}}) = P(A_g)$.
Maintenant que nous avons défini un analogue du déterminant comme nous l'avions fait dans la section 4, nous pouvons essayer de comprendre de quelle façon se comporte $P(A_g)$ lors d'un changement conforme de métrique. Nous nous plaçons à partir de maintenant sur une variété riemannienne (M^4, g), sans bord, compacte, lisse et de dimension 4. Introduisons, comme nous l'avons fait dans le cas de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les surfaces, la fonctionnelle log-déterminant pour l'opérateur A_g, que l'on note F_A. Soit $w \in C^\infty(M)$ et $g_w := e^{2w} g$, on définit

$$F_A[w] := -2 \log \frac{P(A(g_w))}{P(A_g)}. \tag{27}$$

Branson et Orsted [BO91] ont remarqué que la fonctionnelle F_A peut se décomposer le long de trois fonctionnelles élémentaires :

Théorème 14. *Il existe γ_1, γ_2 et γ_3 réelles telles que pour tout $w \in C^\infty(M)$*

$$F_A[w] = \gamma_1 I[w] + \gamma_2 II[w] + \gamma_3 III[w], \tag{28}$$

où

$$\begin{aligned} I[w] &:= 4 \int_M w |Weyl_g|_g^2 dv_g - \left(\int_M |Weyl_g|_g^2 dv_g\right) \log\left(\fint_M e^{4w} dv_g\right), \\ II[w] &:= \int_M \left(w P_g w + 4 w Q_g\right) dv_g - \left(\int_M Q_g dv_g\right) \log\left(\fint_M e^{4w} dv_g\right), \\ III[w] &:= \frac{1}{3}\left(\int_M Scal_{g_w}^2 dv_{g_w} - \int_M Scal_g^2 dv_g\right). \end{aligned} \tag{29}$$

Le fait remarquable ici est que *I*, *II* et *III* ne dépendent pas de A_g mais sont universelles; si on change A_g ce sont les constantes γ_1, γ_2 et γ_3 qui changent. Par exemple, si A_g est l'opérateur laplacien conforme, alors $(4\pi)^2 180(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \left(1, -4, -\frac{2}{3}\right)$.
Dans le cas de la sphère nous avons le Théorème suivant :

Théorème 15. *(Branson-Chang-Yang* [BCY92a]*) Sur la sphère standard* $(\mathbb{S}^4, g_c)$*, la fonctionnelle* $g \mapsto detL_{g_w}$ *est minimale pour une métrique* $g_w = e^{2w}g$ *(avec* $Vol(\mathbb{S}^4, g_w) = Vol(\mathbb{S}^4, g_c)$*) si et seulement si* $g_w = \varphi^*(g_c)$ *où* φ *est une transformation conforme de la 4-sphère standard sur elle-même (autrement dit si et seulement si* g_w *et* g_c *sont isométriques).*

Ce théorème peut être vu comme un analogue en dimension 4 de l'inégalité d'Onofri que nous avons vue à la section 4.
Dans la suite nous nous pencherons sur la recherche de métriques extrémales sur des variétés autres que la sphère. Comme nous le verrons, c'est sur la sphère standard que nous avons le plus de résultats de « rigidité » des métriques extrémales. Dans le tableau qui suit nous récapitulons les résultats connus pour les sphères standards de dimension 2, 3, 4, 6, $2n+1$ avec $n \geq 3$, $4n+1$ et $4n+3$.

La métrique standard g_c sur	est un	pour l'opérateur	parmi les métriques où l'on fixe	résultat dû à
$\mathbb{S}^2$	maximum global	$det(-\Delta)$	aire	Onofri [Ono82]
$\mathbb{S}^4$	minimum global	$detL$	volume et classe conforme	Branson, Chang et Yang [BCY92a]
$\mathbb{S}^6$	maximum global	$detL$	volume et classe conforme	Branson [Bra95]
$\mathbb{S}^3$	maximum local minimum local	$det(-\Delta)$ $det(-\Delta)$	volume et classe conforme volume	Richardson [Ric94] Okikiolu [Oki01]
$\mathbb{S}^{2n+1}$, $n \geq 3$	point selle	$det(-\Delta)$	volume et classe conforme	Okikiolu [Oki01]
$\mathbb{S}^{4n+1}$ $\mathbb{S}^{4n+3}$	minimum local maximum local	$detL$ $detL$	volume	Okikiolu [Oki01]

Etudions maintenant l'existence de métriques extrémales pour la fonctionnelle F_A définie en (27). L'outil fondamental pour cette étude est une généralisation de l'inégalité de Moser (1); cette inégalité est due à Adams [Ada88]

Théorème 16. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné et soit* k *un entier naturel tel que* $k < n$*. On pose* $p := \frac{n}{k}$*. Il existe une constante* $C = C(k, n)$ *et une constante* $\beta_0 = \beta_0(k, n)$ *telles que pour toute fonction* $w \in C_0^k(\Omega)$ *vérifiant* $\|\nabla^k w\|_p \leq 1$

$$\int_\Omega exp(\beta |w(x)|^{p'})dx \leq C\, Vol(\Omega, euclidien), \tag{30}$$

pour tout $\beta \leq \beta_0$ *(ici* $p' := \frac{p}{p-1}$*).*

Cette inégalité est optimale au sens où si $\beta > \beta_0$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe $u_\lambda \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\|\nabla^k u_\lambda\|_p \leq 1$ et $\int_\Omega exp(\beta |u_\lambda(x)|^{p'})dx \geq \lambda Vol(\Omega, euclidien)$.

Lorsque $n = 4$ et $k = 2$ (dans ce cas $p = p' = 2$) on a (voir Adams [Ada88]) $\beta_0 = 32\pi^2$. À partir du théorème précédent on obtient facilement le lemme

Lemme 0.1. *Soit* (M^4, g_0) *une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. Il existe une constante* $C = C(g_0)$ *telle que pour toute fonction* $w \in C^2(M)$ *vérifiant* $\|\Delta_{g_0} w\|_2 \leq 1$

$$\int_M exp(32\pi^2|w - \overline{w}|^2)dv_{g_0} \leq C. \tag{31}$$

Par conséquent pour toute fonction $w \in C^2(M)$

$$\log \fint exp(4(w - \overline{w}))dv_{g_0} \leq \log C + \frac{1}{8\pi^2}\|\Delta_{g_0} w\|_2^2. \tag{32}$$

Considérons trois réels γ_1, γ_2 et γ_3 et la fonctionnelle

$$F[w] := \gamma_1 I[w] + \gamma_2 II[w] + \gamma_3 III[w], \tag{33}$$

où I, II et III sont définies en (29). On pose (où Q_g est la Q-courbure pour la métrique g telle que définie en (20))

$$k_P := \int_M Q_g dv_g, \tag{34}$$

dont nous avons vu que c'est un invariant conforme. Le résultat suivant est dû à Chang et Yang [CY95]

Théorème 17. *Soit* (M^4, g_0) *une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que* $\gamma_2 < 0$, *que* $\gamma_3 < 0$ *et que*

$$k_P < 8\pi^2 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\int_M |Weyl_{g_0}|_{g_0}^2 dv_{g_0}. \tag{35}$$

Alors il existe une métrique $g_w := e^{2w}g_0$ *conforme à* g_0 *(ce qui implique bien sûr que* $w \in C^\infty(M)$*) telle que*

$$F[w] = \sup_{\varphi \in \mathcal{S}_{c_1,c_2}} F[\varphi], \tag{36}$$

où c_1 *et* $c_2 > 0$ *sont deux réels et*

$$\mathcal{S}_{c_1,c_2} := \left\{\varphi \in C^\infty(M)\,,\ signe(\gamma_2)F[\varphi] \leq c_1, Vol(M, g_\varphi) = c_2 Vol(M, g_0)\right\}.$$

De plus la fonction w *vérifie l'équation*

$$\begin{aligned}\gamma_1|Weyl_{g_w}|_{g_w}^2 + \gamma_2 Q_{g_w} - \gamma_3\Delta_{g_w} Scal_{g_w} = &\\ \gamma_1\int_M |Weyl_{g_w}|_{g_w}^2 dv_{g_w} + \gamma_2 \int_M Q_{g_w} dv_{g_w} &\equiv constante\end{aligned} \tag{37}$$

Remarque 1. *A priori la fontion* w *qui maximise* F *sur* $\mathcal{S}_{c_1,c_2}$ *est dans* $W^{2,2}(M)$. *La preuve de la régularité* C^∞ *de* w *est un résultat de Uhlenbeck et Viaclovsky* [UV00].

7. Variétés de dimension 4 à Q-courbure constante

Comme pour la courbure de Gauss pour les surfaces, il est naturel de se demander dans quelle mesure, sur une variété riemannienne (M, g) compacte, lisse, sans bord et de dimension 4, il existe une métrique conforme à le métrique g qui soit à Q-courbure constante.

Rappelons que sous le changement conforme $\tilde{g} = e^{2w} g$, on a (voir (19) pour la définition de P_g)

$$P_g w + 2Q_g = 2Q_{\tilde{g}} e^{4w},$$

où Q_g est l'invariant de courbure défini par

$$Q_g = \frac{1}{12}\left(-\Delta Scal_g + Scal_g^2 - 3|Ric_g|^2\right).$$

Ainsi d'après cette relation, le problème évoqué ci-dessus est équivalent à la résolution de l'équation (on rappelle que $k_P := \int_M Q_g dv_g$, voir paragraphe 5)

$$P_g u + 2Q_g = 2k_P e^{4u} \qquad \text{sur } M. \tag{38}$$

Les solutions de (38) peuvent être recherchées comme points critiques de la fonctionnelle d'Euler

$$II[w] = \langle P_g w, w\rangle_g + 4\int_M Q_g w dv_g - k_P \log \int_M e^{4w} dv_g; \qquad w \in W^{2,2}(M). \tag{39}$$

Une première réponse a été apportée sur ce problème par Chang et Yang [CY95] sous la condition $k_P < 8\pi^2$ et en supposant que P_g est un opérateur positif dont le noyau est égal à $\mathbb{R}$:

Théorème 18. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que P_g est un opérateur positif et que ker $P_g = \mathbb{R}$, et on suppose également que $k_P < 8\pi^2$. Alors il existe une métrique $\tilde{g}$ conforme à g qui soit à Q-courbure constante (i.e. $Q_{\tilde{g}}$ = constante).*

L'outil principal pour montrer ce théorème est l'inégalité de Adams [Ada88] dont nous avons parlé au paragraphe 6

$$\log \int_M e^{4(u-\overline{u})} dv_g \leqslant C + \frac{1}{8\pi^2}\langle P_g u, u\rangle_g, \quad \forall\ u \in W^{2,2}(M). \tag{40}$$

Il est très facile de voir que sous l'hypothèse $k_P < 8\pi^2$ la fonctionnelle II est coercive sur les fonctions de $W^{2,2}(M)$ qui sont de moyenne nulle et ainsi, dans ce cas, les solutions peuvent s'obtenir par minimisation.
D'après le Théorème 13, les conditions du Théorème 18 sont vérifiées dès que la variété est à invariant de Yamabe strictement positif avec $k_P + \frac{1}{6}(Y(M, g))^2 > 0$.

Dans un papier récent, en collaboration avec A. Malchiodi, nous nous sommes interessés au cas $k_P \in]8k\pi^2, 8(k+1)\pi^2[$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. D'autre part, nous considérons le cas où l'opérateur P_g peut avoir des valeurs propres strictement négatives. Il est très facile de construire des exemples de telles variétés. Prenons $M = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, où Σ_1, Σ_2 sont des surfaces de genre $g_1, g_2 \geqslant 2$, et équipées de la métrique de Poincaré. En utilisant la formule de Gauss-Bonnet, on trouve que dans ce cas $k_P = \frac{16\pi^2}{3}(g_1 - 1)(g_2 - 1)$. Ainsi sous de petites perturbations de la métrique sur chacune des deux surfaces, et pour des valeurs adéquates de g_1, g_2, on aura $kerP_g = \mathbb{R}$ et $k_P \notin 8\pi^2\mathbb{N}^*$.

Le résultat principal de Djadli-Malchiodi [DMa] est le suivant

Théorème 19. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que ker $P_g = \mathbb{R}$, et on suppose également que $k_P \notin 8\pi^2\mathbb{N}^*$. Alors il existe une métrique $\tilde{g}$ conforme à g qui soit à Q-courbure constante (i.e. $Q_{\tilde{g}}$ = constante).*

La preuve de ce théorème est basée sur un argument de type minimax lié à celui developpé dans [DJLW99].

8. Un résultat de classification

Dans cette partie nous allons nous intéresser à un des exemples d'utilisation de la Q-courbure, en l'occurence à son application dans des problèmes de classification. Le point de départ est l'étude d'une fonctionnelle riemannienne (c'est-à-dire une fonctionnelle définie sur l'ensemble des métriques définies sur une variété M lisse et sans bord). L'exemple classique est la fonctionnelle de Einstein-Hilbert

$$g \longmapsto \int_M Scal_g dv_g, \tag{41}$$

dont on sait que les points critiques (lorsqu'il en existe) sous la contrainte du volume égal à 1 sont d'Einstein. Une variante de ce problème consiste à rechercher les points critiques de cette fonctionnelle mais cette fois en se restreignant à une classe conforme : c'est ce que l'on appelle le problème de Yamabe (voir Lee-Parker [LP87] pour un panorama complet sur ce problème) qui fut entièmement résolu par Yamabe [Yam60], Trudinger [Tru68], Aubin [Aub76] et Schoen [Sch84].
D'autres fonctionnelles possèdent des propriétés intéressantes, en particulier celles qui sont quadratiques en la courbure (voir Besse [Bes87] page 133). Par exemple

$$g \longmapsto \mathcal{R}[g] := \int_M Scal_g^2 dv_g, \tag{42}$$

et

$$g \longmapsto \mathcal{W}[g] := \int_M |Weyl_g|_g^2 dv_g. \tag{43}$$

La fonctionnelle $\mathcal{R}$ fut introduite par Calabi en géométrie kählerienne. Ici nous allons nous pencher plus particulièrement sur la fonctionnelle de Weyl $\mathcal{W}$ en dimension 4. Supposons que M^4 est une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord et orientée. On sait qu'alors l'opérateur de Hodge $*$ induit une décomposition du fibré exterieur Λ^2 en deux composantes $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$, où Λ^2_+ est l'espace des formes autoduales et Λ^2_- est l'espace des formes anti-autoduales. Cette décomposition induit à son tour une décomposition du tenseur de Weyl (que l'on regarde comme un endomorphisme à trace nulle sur Λ^2) en une partie autoduale, notée $Weyl^+$, et une partie anti-autoduale, notée $Weyl^-$. Si on note $\sigma(M)$ la signature de M (voir Besse [Bes87]) on a la formule de Hirzebruch

$$12\pi^2\sigma(M) = \int_M \left(|Weyl_g^+|_g^2 - |Weyl_g^-|_g^2\right) dv_g. \tag{44}$$

Par conséquent l'étude de la fonctionnelle $\mathcal{W}$ se résume à l'étude de la fonctionnelle

$$\mathcal{W}_+[g] := \int_M |Weyl_g^+|_g^2 dv_g. \tag{45}$$

que l'on appellera par commodité fonctionnelle de Weyl autoduale.
Cette fonctionnelle de Weyl autoduale est conformément invariante au sens où si $\overline{g}$ est une métrique conforme à g alors $\mathcal{W}_+[\overline{g}] = \mathcal{W}_+[g]$. De plus on peut calculer son gradient, que l'on appelle le tenseur de Bach, et celui-ci est également conformément invariant (voir Derdziński [Der83]). Nous verrons dans le paragraphe suivant que le tenseur de Bach joue un grand rôle en géométrie conforme.

Dans le cas général on ne sait pas dire grand chose sur les points critiques, s'il en existe, de la fonctionnelle de Weyl autoduale. Il est très simple de voir grâce à la formule de Hirzebruch que

$$\mathcal{W}_+[g] \geq \max\left\{12\pi^2\sigma(M), 0\right\},$$

avec égalité si et seulement si la variété est semi-conformément plate ($Weyl_g^+ \equiv 0$ ou $Weyl_g^- \equiv 0$).
D'un autre coté, en utilisant l'expression explicite du tenseur de Weyl, on peut voir assez aisément que les métriques d'Einstein sont aussi des points critiques de la fonctionnelle de Weyl autoduale. Et plus généralement, toute métrique qui est localement conforme à une métrique d'Einstein est aussi un point critique de la fonctionnelle de Weyl autoduale.

Dans un article récent, Gursky [Gur98] s'est intéressé à la minimisation de la fonctionnelle de Weyl autoduale sous une contrainte géométrique très naturelle : la positivité de l'invariant de Yamabe. Il faut tout de suite remarquer que cette contrainte est conformément invariante ce qui est primordial puisque la fonctionnelle de Weyl autoduale est elle-même conformément invariante.
Le premier résultat obtenu par Gursky est le suivant :

Théorème 20. *Soit M^4 une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord et orientée. On suppose que sa forme d'intersection possède au moins une valeur propre strictement positive. Alors pour toute métrique g définie sur M et telle que son invariant de Yamabe $Y(M,g)$ est positif ou nul, on a*

$$\mathcal{W}_+[g] \geq \frac{4\pi^2}{3}\left(2\chi(M) + 3\sigma(M)\right), \tag{46}$$

où $\chi(M)$ et $\sigma(M)$ sont respectivement la caractéristique d'Euler-Poincaré et la signature de M. De plus
(i) l'égalité est réalisée dans (46) *par une métrique g_0 telle que $Y(M,g_0) > 0$ si et seulement si g_0 est conforme à une métrique de Kähler-Einstein.*

(ii) l'égalité est réalisée dans (46) *par une métrique* g_0 *telle que* $Y(M, g_0) = 0$ *si et seulement si* g_0 *est conforme à une métrique de Kähler-Einstein qui est Ricci-plate et anti-autoduale.*

Ce théorème possède plusieurs corollaires. Nous renvoyons le lecteur intéréssé à l'article de Gursky [Gur98].

Une remarque que l'on peut faire sur ce résultat est que si une métrique g réalise l'égalité dans (46), alors elle est conforme à une métrique de Kähler-Einstein. En particulier son premier groupe de cohomologie de de Rham est non réduit à 0. D'un autre coté, Gursky [Gur98] a montré que si l'on suppose que le premier groupe de cohomologie de M, $H^1(M)$, est non réduit à 0 alors la borne inférieure dans (46) peut être améliorée. C'est l'objet du théorème suivant

Théorème 21. *Soit* M^4 *une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord et orientée. On suppose que* $H^1(M) \neq 0$. *Alors pour toute métrique g définie sur M et telle que son invariant de Yamabe* $Y(M, g)$ *est strictement positif, on a*

$$\mathcal{W}_+[g] \geq 2\pi^2 \left(2\chi(M) + 3\sigma(M)\right), \tag{47}$$

où $\chi(M)$ *et* $\sigma(M)$ *sont respectivement la caractéristique d'Euler-Poincaré et la signature de* M. *De plus l'égalité est réalisée dans* (47) *par une métrique* g_0 *telle que* $Y(M, g_0) > 0$ *si et seulement si* (M, g_0) *est conformément difféomorphe à un quotient de* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ *muni de la métrique produit. En particulier* g_0 *est conformément plate et* $\chi(M) = \sigma(M) = 0$.

Si on suppose que la métrique g est telle que $Y(M, g) = 0$ il n'est plus nécessaire de supposer que $H^1(M) \neq 0$. On a dans ce cas (Gursky [Gur98]) :

Théorème 22. *Soit* M^4 *une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord et orientée. Alors pour toute métrique g définie sur M et telle que son invariant de Yamabe* $Y(M, g)$ *est nul, on a*

$$\mathcal{W}_+[g] \geq 2\pi^2 \left(2\chi(M) + 3\sigma(M)\right), \tag{48}$$

où $\chi(M)$ *et* $\sigma(M)$ *sont respectivement la caractéristique d'Euler-Poincaré et la signature de* M. *De plus l'égalité est réalisée dans* (48) *par une métrique* g_0 *telle que* $Y(M, g_0) = 0$ *si et seulement si* g_0 *est conforme à une métrique Ricci-plate.*

On peut reformuler ces deux résultats en utilisant la Q-courbure. Rappelons que

$$Q_g = \frac{1}{12}\left(-\Delta_g Scal_g - 3\left|Ric_g\right|^2 + Scal_g^2\right).$$

On a vu que la formule de Gauss-Bonnet nous donne

$$\int_M Q_g dv_g = 4\pi^2\chi(M) - \frac{1}{8}\int_M |Weyl_g|_g^2 dv_g.$$

De manière équivalente on peut énoncer les deux théorèmes précédents de la manière suivante :

Théorème 23.
(i) Soit M^4 une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord et orientée. On suppose que l'invariant de Yamabe de g_0 vérifie $Y(M, g_0) > 0$ et que $\int_M Q_{g_0} dv_{g_0} > 0$. Alors $H^1(M) = 0$.
(ii) Soit M^4 une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord et orientée. On suppose que l'invariant de Yamabe de g_0 vérifie $Y(M, g_0) > 0$ et que $\int_M Q_{g_0} dv_{g_0} = 0$. Alors $H^1(M) \neq 0$ si et seulement si (M, g_0) est conformément difféomorphe à un quotient de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ munie de la métrique produit standard. En particulier (M^4, g_0) est localement conformément plate et $\chi(M) = \sigma(M) = 0$.

On peut voir ce résultat comme une généralisation aux variétés de dimension 4 du résultat suivant sur les surfaces : soit (M^2, g_0) une surface compacte, lisse, sans bord telle que $\int_M K_{g_0} dv_{g_0} > 0$ alors $\chi(M) > 0$ et le genre de M est 0 ; si $\int_M K_{g_0} dv_{g_0} = 0$ alors $\chi(M) = 0$, le genre de M est 1 et par le théorème d'uniformisation M est conformément difféomorphe à un quotient de $\mathbb{R}^2$.

L'une des conséquences de ce théorème est de permettre de compléter la classification des variétés de dimension 4, lisses, compactes et sans bord qui sont localement conformément plates, à invariant de Yamabe strictement positif et à caractéristique d'Euler-Poncaré positive ou nulle. Dans un papier datant de 1994, Gursky [Gur94] avait classifié les variétés de dimension 4, lisses, compactes et sans bord qui sont localement conformément plates, à invariant de Yamabe strictement positif et à caractéristique d'Euler-Poncaré strictement positive. Il ne restait que le cas où la caractéristique d'Euler-Poincaré est nulle ; le théorème précédent permet de traiter ce cas et on a le résultat suivant :

Théorème 24. *(Gursky* [Gur94] *et* [Gur98]*) Soit M^4 une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord. On suppose qu'elle est localement conformément plate et à invariant de Yamabe strictement positif. Alors :*
(i) si $\chi(M) > 0$ soit (M, g_0) est conformément difféomorphe à la 4-sphère standard (cas $\chi(M) = 2$) soit (M, g_0) est conformément difféomorphe à l'espace projectif réel muni de sa métrique standard ;
(ii) si $\chi(M) = 0$ (M, g_0) est conformément difféomorphe à un quotient de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ munie de la métrique produit standard.

Nous voudrions dire quelques mots sur la preuve du théorème 20. Cela nous permettra de montrer comment on peut utiliser la recherche de métriques extrémales pour obtenir des résultats de classification géométriques.

8.1. La preuve du Théorème 20

La preuve de ce théorème est basée sur l'étude d'une fonctionnelle de type log-déterminant que nous avons introduit en (27). Considérons donc γ_1, γ_2 et γ_3 trois réels et considérons la fonctionnelle log-determinant donnée par

$$F_A[w] = \gamma_1 I[w] + \gamma_2 II[w] + \gamma_3 III[w], \tag{49}$$

où

$$
\begin{aligned}
&I[w] := 4\int_M w|Weyl_g|_g^2 dv_g - \left(\int_M |Weyl_g|_g^2 dv_g\right)\log\left(⨍_M e^{4w} dv_g\right),\\
(50)\qquad &II[w] := \int_M (wP_g w + 4wQ_g)\, dv_g - \left(\int_M Q_g dv_g\right)\log\left(⨍_M e^{4w} dv_g\right),\\
&III[w] := \frac{1}{3}\left(\int_M Scal_{g_w}^2 dv_{g_w} - \int_M Scal_g^2 dv_g\right).
\end{aligned}
$$

En fait, puisque l'on veut minorer la fonctionnelle $\mathcal{W}_+$ on va regarder une fonctionnelle légèrement différente :

$$
(51)\qquad F_A[w] = \gamma_1^+ I^+[w] + \gamma_1^- I^-[w] + \gamma_2 II[w] + \gamma_3 III[w],
$$

où γ_1^+ et γ_1^- sont des réels et où

$$
(52)\qquad
\begin{aligned}
&I^+[w] := 4\int_M w|Weyl_g^+|_g^2 dv_g - \left(\int_M |Weyl_g^+|_g^2 dv_g\right)\log\left(⨍_M e^{4w} dv_g\right),\\
&I^-[w] := 4\int_M w|Weyl_g^-|_g^2 dv_g - \left(\int_M |Weyl_g^-|_g^2 dv_g\right)\log\left(⨍_M e^{4w} dv_g\right).
\end{aligned}
$$

On posera dans toute la suite (notons que c'est un invariant conforme)

$$
(53)\qquad \tilde{k}_d = -\gamma_1^+\int_M |Weyl_g^+|_g^2 dv_g - \gamma_1^-\int_M |Weyl_g^-|_g^2 dv_g - \gamma_2\int_M Q_g dv_g.
$$

La première étape de la preuve consiste à montrer un résultat d'existence d'une métrique extrémale pour la fonctionnelle F du type de celui obtenu au Théorème 17. C'est l'objet du lemme suivant

Lemme 0.2. *Soit (M^4, g_0) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que $\gamma_2 < 0$, que $\gamma_3 < 0$ et que*

$$
(54)\qquad \tilde{k}_d < (-\gamma_2) 8\pi^2.
$$

Alors il existe une métrique $g_w := e^{2w} g_0$ conforme à g_0 (ce qui implique bien sur que $w \in C^\infty(M)$) telle que

$$
(55)\qquad F[w] = \sup_{\varphi \in W^{2,2}(M)} F[\varphi],
$$

De plus la fonction w vérifie l'équation

(56)

$$
\gamma_1^+|Weyl_{g_w}^+|_{g_w}^2 + \gamma_1^-|Weyl_{g_w}^-|_{g_w}^2 + \gamma_2 Q_{g_w} - \gamma_3\Delta_{g_w} Scal_{g_w} = -\tilde{k}_d Vol(M, g_w)^{-1}.
$$

On peut réecrire (56) un peu différemment. Si on pose

$$\lambda = \left(\gamma_3 + \frac{1}{12}\gamma_2\right)^{-1} \tilde{k}_d Vol(M, g_w)^{-1}$$

$$\alpha_\pm = -\gamma_1^\pm \left(\gamma_3 + \frac{1}{12}\gamma_2\right)^{-1} \tag{57}$$

$$\beta = \frac{1}{4}\gamma_2 \left(\gamma_3 + \frac{1}{12}\gamma_2\right)^{-1},$$

alors (56) s'écrit, en utilisant l'expression de la Q-courbure

$$\begin{aligned} \Delta_{g_w} Scal_{g_w} = \lambda - \alpha_+ |Weyl^+_{g_w}|^2_{g_w} \\ - \alpha_- |Weyl^-_{g_w}|^2_{g_w} - \beta \left| Ric_{g_w} - \frac{1}{4} Scal_{g_w} g_w \right|^2_{g_w} + \frac{1}{12}\beta Scal^2_{g_w}. \end{aligned} \tag{58}$$

La seconde étape de la preuve consiste à trouver une condition conforme sous laquelle on peut connaître le signe de la courbure scalaire. Le candidat naturel pour une telle condition est l'invariant de Yamabe, ce qu'illustre le lemme suivant (rappelons que l'on note $L_g := -\Delta_g + \frac{1}{6} Scal_g$ l'opérateur laplacien conforme associé à une métrique g)

Lemme 0.3. *Soit (M^4, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que $Scal_g$ vérifie $L_g Scal_g \geq 0$ sur M. Alors*
(i) si $Y(M, g) > 0$ on a $Scal_g > 0$ sur M ;
(ii) si $Y(M, g) = 0$ on a $Scal_g \equiv 0$ sur M.

La preuve de ce lemme est très simple et n'utilise que le principe du maximum pour l'opérateur de Laplace-Beltrami (voir Gursky [Gur98]).

En mettant bout à bout ces deux lemmes on a la proposition :

Proposition 6. *Soit (M^4, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4.*
(i) On suppose que

$$0 < \int_M |Weyl_{g_0}|^2_{g_0} dv_{g_0} < \frac{4\pi^2}{3} \left(2\chi(M) + 3\sigma(M)\right). \tag{59}$$

Alors il existe une métrique $g_w := e^{2w} g$ et il existe $\varepsilon > 0$ tels que

$$\Delta_{g_w} Scal_{g_w} = -(4 + \varepsilon) |Weyl^+_{g_w}|^2_{g_w} - 2 \left| Ric_{g_w} - \frac{1}{4} Scal_{g_w} g_w \right|^2_{g_w} + \frac{1}{6} Scal^2_{g_w}. \tag{60}$$

De plus si $Y(M, g_0) > 0$ alors $Scal_{g_w} > 0$ sur M et si $Y(M, g_0) = 0$ alors (59) *ne peut pas se produire.*

(ii) On suppose que

$$\int_M |Weyl_{g_0}|^2_{g_0} dv_{g_0} = \frac{4\pi^2}{3}\left(2\chi(M) + 3\sigma(M)\right). \tag{61}$$

Alors il existe une métrique $g_w := e^{2w}g$ telle que

$$\Delta_{g_w} Scal_{g_w} = -4|Weyl^+_{g_w}|^2_{g_w} - 2\left|Ric_{g_w} - \frac{1}{4}Scal_{g_w}g_w\right|^2_{g_w} + \frac{1}{6}Scal^2_{g_w}. \tag{62}$$

De plus si $Y(M, g_0) > 0$ alors $Scal_{g_w} > 0$ sur M et si $Y(M, g_0) = 0$ alors g_w est Ricci-plate et anti-autoduale.

Preuve. La preuve de cette proposition est la suivante. Pour le point (i), on considère $\varepsilon > 0$ tel que

$$(1 + \varepsilon)\int_M |Weyl_{g_0}|^2_{g_0} dv_{g_0} = \frac{4\pi^2}{3}\left(2\chi(M) + 3\sigma(M)\right).$$

On choisit $\gamma_1^- = 0$, $\gamma_2 = -12$ et $\gamma_3 = -\frac{1}{2}$ et $\gamma_1^+ = 6(1 + 3\varepsilon)$ dans le lemme 0.2. Alors on a clairement $\tilde{k}_d = 0$ et on peut appliquer le lemme 0.2 et on obtient l'existence de la métrique g_w qui vérifie (58). On calcule ensuite $L_{g_w} Scal_{g_w}$ et il est très facile de voir que $L_{g_w} Scal_{g_w} \geq 0$.On applique le lemme 0.3 pour conclure sur le signe de $Scal_{g_w}$ lorsque $Y(M, g_0) > 0$. Par contre si (59) se produit avec $Y(M, g_0) = 0$ on a, toujours d'après le lemme 0.3, $Scal_{g_w} = 0$ et cela implique que $\left|Ric_{g_w} - \frac{1}{4}Scal_{g_w}g_w\right|^2_{g_w} = |Weyl^+_{g_w}|^2_{g_w} \equiv 0$ ce qui est impossible.
La preuve de (ii) se fait de manière similaire. ■

Avec ces ingrédients on est en mesure de montrer le Théorème 20. On suppose donc que M admet une métrique g_0 telle que $Y(M, g_0) \geq 0$ et

$$\mathcal{W}_+[g_0] < \frac{4\pi^2}{3}\left(2\chi(M) + 3\sigma(M)\right). \tag{63}$$

Supposons tout d'abord que $\mathcal{W}_+[g_0] = 0$ et $Y(g_0) > 0$. D'après un résultat de Bourguignon [Bou81] on a forcément $H^2_+(M) = 0$ ce qui est une contradiction avec l'hypothèse du théorème. Donc on doit avoir $Y(M, g_0) = 0$. Mais on obtient facilement en manipulant la formule de Gauss-Bonnet et la formule de Hirzebruch (pour toute métrique g définie sur M)

$$2\pi^2\left(2\chi(M) + 3\sigma(M)\right) = \mathcal{W}_+[g] - \frac{1}{4}\int_M \left|Ric_g - \frac{1}{4}Scal_g g\right|^2_g dv_g + \frac{1}{48}\int_M Scal^2_g dv_g.$$

Si $Y(M, g_0) = 0$ il existe une métrique g dans la classe conforme de g_0 telle que $Scal_g \equiv 0$. Et puisque que nous avons supposé que $\mathcal{W}_+[g_0] = \mathcal{W}_+[g] = 0$ la formule précédente nous dit que $2\chi(M) + 3\sigma(M) \leq 0$ ce qui est incompatible avec (63).

Ainsi on est forcément dans la situation où $\mathcal{W}_+[g_0] > 0$. D'après la Proposition 6 (point (i)) on doit avoir $Y(M, g_0) > 0$. Et par cette même proposition il existe une métrique $g_w := e^{2w} g_0$ telle que

$$(64)\quad \Delta_{g_w} Scal_{g_w} = -(4+\varepsilon)|Weyl^+_{g_w}|^2_{g_w} - 2\left|Ric_{g_w} - \frac{1}{4}Scal_{g_w} g_w\right|^2_{g_w} + \frac{1}{6}Scal^2_{g_w}.$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. De surcroît $Scal_{g_w} > 0$ sur M.

Considérons maintenant une forme $u \in H^2_+(M)$ et posons $G := \dfrac{|u|_{g_w}}{Scal_{g_w}}$. Un petit calcul nous donne (là où u ne s'annule pas)

$$(65)\quad \Delta_{g_w} G + 2\left\langle \nabla_{g_w} G, \frac{\nabla_{g_w} Scal_{g_w}}{Scal_{g_w}}\right\rangle_{g_w} \geq \varepsilon \frac{|Weyl^+_{g_w}|^2_{g_w}}{Scal_{g_w}} G$$
$$+ 2\frac{\left|Ric_{g_w} - \frac{1}{4}Scal_{g_w} g_w\right|^2_{g_w}}{Scal_{g_w}} G + 4\frac{G}{Scal_{g_w}}\left(|Weyl^+_{g_w}|_{g_w} - \frac{\sqrt{6}}{12}Scal_{g_w}\right)^2$$
$$+ G|u|^{-2}_{g_w}\left(|\nabla_{g_w} u|^2_{g_w} - |\nabla_{g_w}|u|_{g_w}|^2_{g_w}\right).$$

Le second membre de cette inégalité est positif donc d'après le principe du maximum G doit être constante. Mais comme on a supposé $|Weyl^+_{g_w}|_{g_w} \not\equiv 0$ cette constante doit être 0, mais cela contredit l'hypothèse $H^1_+(M) \neq 0$. Cela prouve la minoration du théorème.

Si on a l'égalité dans (63), alors par la Proposition 6 il existe une métrique $g_w := e^{2w} g_0$ telle que

$$(66)\qquad \Delta_{g_w} Scal_{g_w} = -4|Weyl^+_{g_w}|^2_{g_w} - 2\left|Ric_{g_w} - \frac{1}{4}Scal_{g_w} g_w\right|^2_{g_w} + \frac{1}{6}Scal^2_{g_w}.$$

Si $Y(M, g_0) = 0$ alors g_w est Ricci-plate et anti-autoduale. D'après un résultat de LeBrun [LeB86] g est alors une métrique de Kähler.

Maintenant si $Y(M, g_0) > 0$ alors $Scal_{g_w} > 0$ et comme précédemment, on a là où u ne s'annule pas

$$(67)\quad \Delta_{g_w} G + 2\left\langle \nabla_{g_w} G, \frac{\nabla_{g_w} Scal_{g_w}}{Scal_{g_w}}\right\rangle_{g_w} \geq 2\frac{\left|Ric_{g_w} - \frac{1}{4}Scal_{g_w} g_w\right|^2_{g_w}}{Scal_{g_w}} G$$
$$+ 4\frac{G}{Scal_{g_w}}\left(|Weyl^+_{g_w}|_{g_w} - \frac{\sqrt{6}}{12}Scal_{g_w}\right)^2 + G|u|^{-2}_{g_w}\left(|\nabla_{g_w} u|^2_{g_w} - |\nabla_{g_w}|u|_{g_w}|^2_{g_w}\right).$$

Le membre de droite est positif et donc G doit être constante d'après le principe du maximum. On en déduit que le membre de droite est nul sur M. Il vient immédiatement que g est Einstein, et donc $Scal_{g_w}$ est constante. Puisque G est constant, $|u|_{g_w}$ l'est aussi et donc, toujours d'après LeBrun [LeB86], g_w est de Kähler.

Il reste à prouver que si g est de Kähler alors on a bien égalité dans (63). Cela découle du fait que (voir Besse [Bes87] page 319)

$$\int_M Scal_{g_w} dv_{g_w} = 32\pi^2 c_1^2(M) = 32\pi^2 \left(2\chi(M) + 3\sigma(M)\right), \tag{68}$$

où $c_1^2(M)$ est le carré de la première classe de Chern de M.

La preuve du Théorème 21 et celle du Théorème 22 se font de manière similaire. On pourra consulter Gursky [Gur98] pour des détails.

9. Fonctions symétriques géométriques

Dans sa thèse Jeff Viaclovsky [Via00] a étudié une famille d'équations totalement non linéaires et qui sont une généralisation des équations de type Yamabe. Nous allons, dans ce paragraphe, introduire ce type de problèmes et parler de quelques applications à la géométrie conforme.

Considérons une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension $n \geq 3$ que l'on notera (M, g). On définit le tenseur de Schouten par

$$A_g := Ric_g - \frac{1}{2(n-1)} Scal_g g. \tag{69}$$

En dimension strictement plus grande que 2, ce tenseur joue un grand rôle à cause de la décomposition du tenseur riemannien

$$Riem_g = Weyl_g + A_g \odot g,$$

où $\odot$ est le produit de Kulkarni-Nomizu.

On peut voir A_g, en tout point x de M, comme un endomorphisme de l'espace tangent $T_x M$. Cette matrice est symétrique et on notera $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses n valeurs propres. On appellera alors (pour un entier naturel k, $1 \leq k \leq n$) k-ième fonction symétrique élémentaire associée à A_g la fonction définie par

$$\sigma_k(A_g) := \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k}. \tag{70}$$

Il est facile de voir que $\sigma_1(A_g)$ est un multiple de la courbure scalaire associée à g et que $\sigma_n(A_g)$ n'est rien d'autre que le déterminant de la matrice A_g.

Nous allons nous intéresser ici au cas de la dimension 4. Ces fonctions $\sigma_k(A_g)$ ont de nombreuses applications en géométrie conforme en dimension 4.

Pour $k = 2$, on peut écrire $\sigma_2(A_g)$ en fonction de la norme de la courbure ; plus précisément :

$$\sigma_2(A_g) = -\frac{1}{2} \left| Ric_g - \frac{1}{4} Scal_g g \right|^2 + \frac{1}{24} Scal_g^2. \tag{71}$$

On voit ainsi en utilisant la formule de Gauss-Bonnet (21) que l'on a

$$\frac{1}{4}\int_M |Weyl_g|^2 dv_g + \int_M \sigma_2(A_g)dv_g = 8\pi^2\chi(M), \tag{72}$$

puisque $Q_g = -\frac{1}{12}\Delta_g Scal_g + \frac{1}{2}\sigma_2(A_g)$. Ainsi, comme pour $\int_M Q_g dv_g$, $\int_M \sigma_2(A_g)dv_g$ est un invariant conforme en dimension 4.

Le premier résultat que nous citons est dû à Chang, Gursky et Yang [CGY02] :

Théorème 25. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que son invariant de Yamabe $Y(M, g)$ est strictement positif et que $\int_M \sigma_2(A_g)dv_g$ est aussi strictement positif. Alors, il existe une métrique $\tilde{g} = e^{2w}g$ conforme à la métrique g telle que*

$$\sigma_2(A_{\tilde{g}}) > 0.$$

En particulier, pour la métrique $\tilde{g}$, on a

$$0 < Ric_{\tilde{g}} < \frac{1}{2}Scal_{\tilde{g}}\tilde{g}.$$

Une conséquence de ce théorème est que les variétés de dimension 4 qui sont telles que $Y(M, g) > 0$ et $\int_M \sigma_2(A_g)dv_g > 0$ ont forcément un groupe fondamental fini. On pourra se reporter à Chang-Gursky-Yang [CGY02] pour des exemples de telles variétés.

La preuve du Théorème 25 nécessite de manière fondamentale la positivité de l'opérateur de Paneitz. La méthode utilisée dans celle-ci est la méthode de continuité pour la famille d'équation (où $g_w = e^{2w}g$)

$$\sigma_2(A_{g_w}) = \frac{\delta}{4}\Delta_{g_w} Scal_{g_w} - 2\gamma|Weyl_{g_w}|^2_{g_w} dv_{g_w}, \tag{73}$$

où γ est choisi tel que $\int_M \sigma_2(A_g)dv_g = -2\gamma\int_M |Weyl_g|^2 dv_g$ et où $\delta \in]0, 1]$. On suppose ici que $Weyl_g$ ne s'annule jamais. La méthode de continuité porte sur le paramètre δ : pour $\delta = 1$ on montre d'abord qu'il existe une solution $w_1 \in C^\infty(M)$ (autrement dit une métrique g_{w_1} conforme à g) qui vérifie (73) avec $\delta = 1$ et telle que $\sigma_2(A_{g_{w_1}}) > 0$. Ensuite, pour $\delta \in]0, 1]$, on montre des estimations a priori pour les solutions de (73), ce qui permet de prouver que l'ensemble des $\delta \in]0, 1]$ tels que (73) possède une solution $w_\delta \in C^\infty(M)$ vérifiant $\sigma_2(A_{g_{w_\delta}}) > 0$ est à la fois ouvert et fermé. L'obtention de ces estimations a priori est longue et délicate et se fait au prix d'un travail technique difficile. Par connexité on déduit alors que (73) possède une solution $w_0 \in C^\infty(M)$ telle que

$$\sigma_2(A_{g_{w_0}}) = -2\gamma|Weyl_{g_{w_0}}|^2_{g_{w_0}} dv_{g_{w_0}}, \tag{74}$$

ce qui montre le résultat voulu. Si $Weyl_g$ s'annule quelque part, on construit (très simplement) un 4-tenseur Z_g du même type que $Weyl_g$, qui se comporte de la même façon sous changement conforme de métrique, et on travaille avec la famille d'équations

$$\sigma_2(A_{g_w}) = \frac{\delta}{4}\Delta_{g_w} Scal_{g_w} - 2\gamma|Z_{g_w}|^2_{g_w} dv_{g_w}, \tag{75}$$

où γ est choisi tel que $\int_M \sigma_2(A_g)dv_g = -2\gamma \int_M |Z_g|^2 dv_g$ et où $\delta \in]0,1]$.

Très récemment, Gursky et Viaclovsky [GV01] ont simplifié considérablement la preuve de Chang-Gursky-Yang [CGY02] en se servant toujours de la méthode de continuité mais à partir d'un autre type de déformation. Cela leur permet d'utiliser des estimations a priori qui s'obtiennent de manière plus directe.

Une autre application remarquable de $\sigma_2(A_g)$ (ou de manière équivalente de la Q-courbure) est le résultat suivant dû à Chang, Gursky et Yang [CGY03]

Théorème 26. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4.*
(i) On suppose que son invariant de Yamabe $Y(M,g)$ est strictement positif et que

$$\int_M \sigma_2(A_g)dv_g > \frac{1}{4}\int_M |Weyl_g|_g^2 dv_g. \tag{76}$$

Alors M est difféomorphe à la 4-sphère standard $(\mathbb{S}^4, g_c)$ ou au projectif réel de dimension 4 muni de sa métrique standard $(\mathbb{R}P^4, g_c)$.
(ii) Si M n'est difféomorphe ni à la 4-sphère standard $(\mathbb{S}^4, g_c)$ ni au projectif réel de dimension 4 muni de sa métrique standard $(\mathbb{R}P^4, g_c)$ et si

$$\int_M \sigma_2(A_g)dv_g = \frac{1}{4}\int_M |Weyl_g|_g^2 dv_g, \tag{77}$$

alors (M,g) est conformément difféomorphe soit au 2-projectif complexe muni de la métrique de Fubini-Study, soit à un quotient de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ muni de la métrique produit.

Ce théorème peut se voir comme la version conforme (puisque les quantités $\int_M \sigma_2(A_g)dv_g$ et $\int_M |Weyl_g|_g^2 dv_g$ sont des invariants conformes) du résultat suivant de Margerin [Mar98]

Théorème 27. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que $Scal_g$ est partout strictement positive et que*

$$|Weyl_g|_g^2 + 2\left|Ric_g - \frac{1}{4}Scal_g g\right|_g^2 < \frac{1}{6}Scal_g^2. \tag{78}$$

Alors M est difféomorphe à la 4-sphère $\mathbb{S}^4$ ou au projectif réel $\mathbb{R}P^4$.
(ii) On suppose que $Scal_g$ est partout strictement positive et que

$$|Weyl_g|_g^2 + 2\left|Ric_g - \frac{1}{4}Scal_g g\right|_g^2 = \frac{1}{6}Scal_g^2 \tag{79}$$

Alors (M,g) est conformément difféomorphe soit au 2-projectif complexe muni de la métrique de Fubini-Study, soit à un quotient de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ muni de la métrique produit.

Pour se convaincre que le Théorème 26 est bien une version conforme du Théorème 27, il suffit d'intégrer sur M chaque coté de (78) pour obtenir exactement (76).

La preuve du point (i) de ce théorème s'inspire des méthodes développées dans Chang-Gursky-Yang [CGY02]. Là encore on utilise la résolution d'une famille d'équation du type de celles étudiées dans Chang-Gursky-Yang [CGY02] dont nous avons parlé plus haut (mais légèrement modifiées) pour montrer que sous les hypothèses $Y(M,g) > 0$ et (76), il existe une métrique g_w conforme à g telle que

$$(80) \qquad |Weyl_{g_w}|^2_{g_w} + 2\left|Ric_{g_w} - \frac{1}{4}Scal_{g_w} g_w\right|^2_{g_w} < \frac{1}{6}Scal^2_{g_w},$$

puis on applique le résultat de Margerin. On renvoie à Chang-Gursky-Yang [CGY03] pour les détails.

La preuve du point (ii) de ce théorème se fait au prix d'une caractérisation des métriques qui sont Bach-plates (i.e. dont le tenseur de Bach dont nous avons parlé au paragraphe 8 est identiquement nul), à invariant de Yamabe strictement positif et dont le tenseur de Weyl vérifie

$$\int_M |Weyl_g|^2_g dv_g = 16\pi^2\chi(M).$$

Nous renvoyons à l'article original Chang-Gursky-Yang [CGY03] pour les détails.

10. Références

[Ada88] D. R. Adams – « A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives », *Ann. of Math. (2)* **128** (1988), no. 2, p. 385–398.

[AL99] T. Aubin & Y. Y. Li – « On the best Sobolev inequality », *J. Math. Pures Appl. (9)* **78** (1999), no. 4, p. 353–387.

[Aub76] T. Aubin – « Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire », *J. Math. Pures Appl. (9)* **55** (1976), no. 3, p. 269–296.

[BC91] A. Bahri & J.-M. Coron – « The scalar-curvature problem on the standard three-dimensional sphere », *J. Funct. Anal.* **95** (1991), no. 1, p. 106–172.

[BCY92a] T. P. Branson, S.-Y. A. Chang & P. C. Yang – « Estimates and extremals for zeta function determinants on four-manifolds », *Comm. Math. Phys.* **149** (1992), no. 2, p. 241–262.

[BCY92b] ———, « Estimates and extremals for zeta function determinants on four-manifolds », *Comm. Math. Phys.* **149** (1992), no. 2, p. 241–262.

[Bes87] A. L. Besse – *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[BGM71] M. Berger, P. Gauduchon & E. Mazet – *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[BO91] T. P. Branson & B. Orsted – « Explicit functional determinants in four dimensions », *Proc. Amer. Math. Soc.* **113** (1991), no. 3, p. 669–682.

[Bou81] J.-P. Bourguignon – « Les variétés de dimension 4 à signature non nulle dont la courbure est harmonique sont d'Einstein », *Invent. Math.* **63** (1981), no. 2, p. 263–286.

[Bra85] T. P. Branson – « Differential operators canonically associated to a conformal structure », *Math. Scand.* **57** (1985), no. 2, p. 293–345.

[Bra87] ———, « Group representations arising from Lorentz conformal geometry », *J. Funct. Anal.* **74** (1987), no. 2, p. 199–291.

[Bra95] ———, « Sharp inequalities, the functional determinant, and the complementary series », *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), no. 10, p. 3671–3742.

[CC86] L. Carleson & S.-Y. A. Chang – « On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser », *Bull. Sci. Math. (2)* **110** (1986), no. 2, p. 113–127.

[CC01] S.-Y. A. Chang & W. Chen – « A note on a class of higher order conformally covariant equations », *Discrete Contin. Dynam. Systems* **7** (2001), no. 2, p. 275–281.

[CGW94] S.-Y. A. Chang, M. Gursky & T. Wolff – « Lack of compactness in conformal metrics with $L^{d/2}$ curvature », *J. Geom. Anal.* **4** (1994), no. 2, p. 143–153.

[CGY93] S.-Y. A. Chang, M. J. Gursky & P. C. Yang – « The scalar curvature equation on 2- and 3-spheres », *Calc. Var. Partial Differential Equations* **1** (1993), no. 2, p. 205–229.

[CGY99] ———, « Regularity of a fourth order nonlinear PDE with critical exponent », *Amer. J. Math.* **121** (1999), no. 2, p. 215–257.

[CGY02] ———, « An equation of Monge-Ampère type in conformal geometry, and four-manifolds of positive Ricci curvature », *Ann. of Math. (2)* **155** (2002), no. 3, p. 709–787.

[CGY03] ———, « A conformally invariant sphere theorem in four dimensions », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2003), no. 98, p. 105–143.

[CGYre] ———, « A conformally invariant sphere theorem in four dimensions », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (A paraître).

[Cha87] S.-Y. A. Chang – « Extremal functions in a sharp form of Sobolev inequality », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)* (Providence, RI), Amer. Math. Soc., 1987, p. 715–723.

[Cha96] S.-Y. A. Chang – « The Moser-Trudinger inequality and applications to some problems in conformal geometry », in *Nonlinear partial differential equations in differential geometry (Park City, UT, 1992)*, IAS/Park City Math. Ser., vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, p. 65–125.

[Cha97] ———, « On zeta functional determinant », in *Partial differential equations and their applications (Toronto, ON, 1995)*, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, With notes taken by Jie Qing, p. 25–50.

[Cha99] S.-Y. A. Chang – « On a fourth-order partial differential equation in conformal geometry », in *Harmonic analysis and partial differential equations (Chicago, IL, 1996)*, Chicago Lectures in Math., Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 1999, p. 127–150.

[CQ96] S.-Y. A. Chang & J. Qing – « Zeta functional determinants on manifolds with boundary », *Math. Res. Lett.* **3** (1996), no. 1, p. 1–17.

[CQ97a] ———, « The zeta functional determinants on manifolds with boundary. I. The formula », *J. Funct. Anal.* **147** (1997), no. 2, p. 327–362.

[CQ97b] ———, « The zeta functional determinants on manifolds with boundary. II. Extremal metrics and compactness of isospectral set », *J. Funct. Anal.* **147** (1997), no. 2, p. 363–399.

[CQY] S.-Y. A. Chang, J. Qing & P. C. Yang – « On the topology of conformally compact einstein 4-manifolds. », *J. Reine Angew. Math.* **A paraître**.

[CQY00] ———, « Compactification of a class of conformally flat 4-manifold », *Invent. Math.* **142** (2000), no. 1, p. 65–93.

[CXY98] S.-Y. A. Chang, X. Xu & P. C. Yang – « A perturbation result for prescribing mean curvature », *Math. Ann.* **310** (1998), no. 3, p. 473–496.

[CY87] S.-Y. A. Chang & P. C. Yang – « Prescribing Gaussian curvature on S^2 », *Acta Math.* **159** (1987), no. 3-4, p. 215–259.

[CY88] S.-Y. A. Chang & P. C. Yang – « Conformal deformation of metrics on S^2 », *J. Differential Geom.* **27** (1988), no. 2, p. 259–296.

[CY89a] ———, « Compactness of isospectral conformal metrics on S^3 », *Comment. Math. Helv.* **64** (1989), no. 3, p. 363–374.

[CY89b] ———, « The conformal deformation equation and isospectral set of conformal metrics », in *Recent developments in geometry (Los Angeles, CA, 1987)*, Contemp. Math., vol. 101, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, p. 165–178.

[CY90] S.-Y. A. Chang & P. C.-P. Yang – « Isospectral conformal metrics on 3-manifolds », *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), no. 1, p. 117–145.

[CY91a] S.-Y. A. Chang & P. C. Yang – « A perturbation result in prescribing scalar curvature on S^n », *Duke Math. J.* **64** (1991), no. 1, p. 27–69.

[CY91b] ______, « Spectral invariants of conformal metrics », in *Harmonic analysis (Sendai, 1990)*, ICM-90 Satell. Conf. Proc., Springer, Tokyo, 1991, p. 51–60.

[CY93] S.-Y. A. Chang & P. C. Yang – « Addendum to : "A perturbation result in prescribing scalar curvature on S^n" [Duke Math. J. **64** (1991), no. 1, 27–69 ; MR 92m :53063] », *Duke Math. J.* **71** (1993), no. 1, p. 333–335.

[CY95] S.-Y. A. Chang & P. C. Yang – « Extremal metrics of zeta function determinants on 4-manifolds », *Ann. of Math. (2)* **142** (1995), no. 1, p. 171–212.

[CY97a] ______, « Determinants and extremal metrics in conformal geometry », in *Geometry from the Pacific Rim (Singapore, 1994)*, de Gruyter, Berlin, 1997, p. 37–57.

[CY97b] ______, « On uniqueness of solutions of nth order differential equations in conformal geometry », *Math. Res. Lett.* **4** (1997), no. 1, p. 91–102.

[CY99] ______, « On a fourth order curvature invariant », in *Spectral problems in geometry and arithmetic (Iowa City, IA, 1997)*, Contemp. Math., vol. 237, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, p. 9–28.

[CY00] ______, « Fourth order equations in conformal geometry », in *Global analysis and harmonic analysis (Marseille-Luminy, 1999)*, Sémin. Congr., vol. 4, Soc. Math. France, Paris, 2000, p. 155–165.

[DD01] Z. Djadli & O. Druet – « Extremal functions for optimal Sobolev inequalities on compact manifolds », *Calc. Var. Partial Differential Equations* **12** (2001), no. 1, p. 59–84.

[Der83] A. Derdziński – « Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four », *Compositio Math.* **49** (1983), no. 3, p. 405–433.

[DHL00] Z. Djadli, E. Hebey & M. Ledoux – « Paneitz-type operators and applications », *Duke Math. J.* **104** (2000), no. 1, p. 129–169.

[DJ02] Z. Djadli & A. Jourdain – « Nodal solutions for scalar curvature type equations with perturbation terms on compact Riemannian manifolds », *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8)* **5** (2002), no. 1, p. 205–226.

[Dja] Z. Djadli – « Existence result for the mean field problem on riemann surfaces of all genuses », *Preprint*.

[Dja99a] ______, « Nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent on compact Riemannian manifolds in presence of symmetries », *Rev. Mat. Complut.* **12** (1999), no. 1, p. 201–229.

[Dja99b] ______, « Nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent on compact Riemannian manifolds », *Calc. Var. Partial Differential Equations* **8** (1999), no. 4, p. 293–326.

[DJLW99] W. Ding, J. Jost, J. Li & G. Wang – « Existence results for mean field equations », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **16** (1999), no. 5, p. 653–666.

[DMa] Z. Djadli & A. Malchiodi – « Existence of conformal metrics with constant Q-curvature », *ArXiv : math.AP/0410141. A paraître dans Annals of Mathematics*.

[DMb] ______, « A fourth order uniformization theorem on some four manifolds with large total Q-curvature », *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005), 341-346*.

[DMA02] Z. Djadli, A. Malchiodi & M. O. Ahmedou – « Prescribing a fourth order conformal invariant on the standard sphere. I. A perturbation result », *Commun. Contemp. Math.* **4** (2002), no. 3, p. 375–408.

[DMOA] Z. Djadli, A. Malchiodi & M. Ould Ahmedou – « The prescribed boundary men curvature problem on B^4 », *préprint*.

[DMOA02] ______, « Prescribing a fourth order conformal invariant on the standard sphere, part ii : Blow-up analysis and applications », *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* **1** (2002), no. 2, p. 387–434.

[DMOA03] ______, « Prescribing scalar and boundary mean curvature on the three dimensional half sphere », *J. Geom. Anal.* **13** (2003), no. 2, p. 233–267.

[Gur94] M. J. Gursky – « Locally conformally flat four- and six-manifolds of positive scalar curvature and positive Euler characteristic », *Indiana Univ. Math. J.* **43** (1994), no. 3, p. 747–774.

[Gur98] ———, « The Weyl functional, de Rham cohomology, and Kähler-Einstein metrics », *Ann. of Math. (2)* **148** (1998), no. 1, p. 315–337.

[Gur99] ———, « The principal eigenvalue of a conformally invariant differential operator, with an application to semilinear elliptic PDE », *Comm. Math. Phys.* **207** (1999), no. 1, p. 131–143.

[Gur00] ———, « Four-manifolds with $\delta W^{+} = 0$ and Einstein constants of the sphere », *Math. Ann.* **318** (2000), no. 3, p. 417–431.

[GV01] M. J. Gursky & J. A. Viaclovsky – « A new variational characterization of three-dimensional space forms », *Invent. Math.* **145** (2001), no. 2, p. 251–278.

[GV03] ———, « A fully nonlinear equation on four-manifolds with positive scalar curvature », *J. Differential Geom.* **63** (2003), no. 1, p. 131–154.

[KW74a] J. L. Kazdan & F. W. Warner – « Curvature functions for compact 2-manifolds », *Ann. of Math. (2)* **99** (1974), p. 14–47.

[KW74b] ———, « Curvature functions for open 2-manifolds », *Ann. of Math. (2)* **99** (1974), p. 203–219.

[KW75a] ———, « Existence and conformal deformation of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvatures », *Ann. of Math. (2)* **101** (1975), p. 317–331.

[KW75b] ———, « Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure », *J. Differential Geometry* **10** (1975), p. 113–134.

[LeB86] C. LeBrun – « On the topology of self-dual 4-manifolds », *Proc. Amer. Math. Soc.* **98** (1986), no. 4, p. 637–640.

[LeB95] ———, « Einstein metrics and Mostow rigidity », *Math. Res. Lett.* **2** (1995), no. 1, p. 1–8.

[Li93] Y. Y. Li – « Prescribing scalar curvature on S^3, S^4 and related problems », *J. Funct. Anal.* **118** (1993), no. 1, p. 43–118.

[Li95] ———, « Prescribing scalar curvature on S^n and related problems. I », *J. Differential Equations* **120** (1995), no. 2, p. 319–410.

[Li96] Y. Li – « Prescribing scalar curvature on S^n and related problems. II. Existence and compactness », *Comm. Pure Appl. Math.* **49** (1996), no. 6, p. 541–597.

[Li00] Y. Y. Li – « Best Sobolev inequalities on Riemannian manifolds », in *Differential equations and mathematical physics (Birmingham, AL, 1999)*, AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, p. 273–278.

[LP87] J. M. Lee & T. H. Parker – « The Yamabe problem », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **17** (1987), no. 1, p. 37–91.

[Mal] A. Malchiodi – « Compactness of solutions to some geometric fourth-order equations », *J. Reine Angew. Math., to appear.*

[Mar98] C. Margerin – « A sharp characterization of the smooth 4-sphere in curvature terms », *Comm. Anal. Geom.* **6** (1998), no. 1, p. 21–65.

[Mos71] J. Moser – « A sharp form of an inequality by N. Trudinger », *Indiana Univ. Math. J.* **20** (1970/71), p. 1077–1092.

[MP49] S. Minakshisundaram & A. Pleijel – « Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds », *Canadian J. Math.* **1** (1949), p. 242–256.

[MS67] H. P. McKean, Jr. & I. M. Singer – « Curvature and the eigenvalues of the Laplacian », *J. Differential Geometry* **1** (1967), no. 1, p. 43–69.

[Oki95a] K. Okikiolu – « The Campbell-Hausdorff theorem for elliptic operators and a related trace formula », *Duke Math. J.* **79** (1995), no. 3, p. 687–722.

[Oki95b] ———, « The multiplicative anomaly for determinants of elliptic operators », *Duke Math. J.* **79** (1995), no. 3, p. 723–750.

[Oki01] K. Okikiolu – « Critical metrics for the determinant of the Laplacian in odd dimensions », *Ann. of Math. (2)* **153** (2001), no. 2, p. 471–531.

[Ono82] E. Onofri – « On the positivity of the effective action in a theory of random surfaces », *Comm. Math. Phys.* **86** (1982), no. 3, p. 321–326.

[OPS88a] B. Osgood, R. Phillips & P. Sarnak – « Compact isospectral sets of surfaces », *J. Funct. Anal.* **80** (1988), no. 1, p. 212–234.

[OPS88b] ———, « Extremals of determinants of Laplacians », *J. Funct. Anal.* **80** (1988), no. 1, p. 148–211.

[Pan83] S. Paneitz – « A quartic conformally covariant diferential operator for arbitrary pseudo-riemannian manifolds », *Préprint* (1883).

[Pol81] A. M. Polyakov – « Quantum geometry of bosonic strings », *Phys. Lett. B* **103** (1981), no. 3, p. 207–210.

[Ric94] K. Richardson – « Critical points of the determinant of the Laplace operator », *J. Funct. Anal.* **122** (1994), no. 1, p. 52–83.

[Ros97] S. Rosenberg – *The Laplacian on a Riemannian manifold*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 31, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, An introduction to analysis on manifolds.

[RS71] D. B. Ray & I. M. Singer – « R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds », *Advances in Math.* **7** (1971), p. 145–210.

[Sch84] R. Schoen – « Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature », *J. Differential Geom.* **20** (1984), no. 2, p. 479–495.

[Sob38] S. Sobolev – « Sur un théorème d'analyse fonctionnelle », *Math. Sb.* **46** (1938), p. 471–496.

[Str90] M. Struwe – *Variational methods*, Springer-Verlag, Berlin, 1990, Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.

[SZ96] R. Schoen & D. Zhang – « Prescribed scalar curvature on the n-sphere », *Calc. Var. Partial Differential Equations* **4** (1996), no. 1, p. 1–25.

[Tru67] N. S. Trudinger – « On imbeddings into Orlicz spaces and some applications », *J. Math. Mech.* **17** (1967), p. 473–483.

[Tru68] ———, « Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)* **22** (1968), p. 265–274.

[UV00] K. K. Uhlenbeck & J. A. Viaclovsky – « Regularity of weak solutions to critical exponent variational equations », *Math. Res. Lett.* **7** (2000), no. 5-6, p. 651–656.

[Via00] J. A. Viaclovsky – « Conformal geometry, contact geometry, and the calculus of variations », *Duke Math. J.* **101** (2000), no. 2, p. 283–316.

[Yam60] H. Yamabe – « On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds », *Osaka Math. J.* **12** (1960), p. 21–37.

[YY80] P. C. Yang & S. T. Yau – « Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **7** (1980), no. 1, p. 55–63.