



© Ken Ribet

Serge Lang, Université de Berkeley, 13 juillet 2000

MATHÉMATIQUES

HOMMAGE À SERGE LANG (1927-2005)

Serge Lang est né à Paris et a émigré à Los Angeles pendant l'adolescence. Il passe sa thèse en 1951 sous la direction d'Emil Artin. Il est nommé professeur à l'Université de Columbia en 1955, position dont il démissionne en 1971 pour protester contre l'attitude de l'Université face aux manifestants opposés à la guerre du Viet-Nam. Il trouve un travail à l'Université de Yale début 1972 et y restera jusqu'à la fin de sa carrière. Il s'était retiré de l'Université de Yale au printemps 2005. Il est mort le 12 Septembre 2005 dans son appartement de Berkeley. Serge Lang a reçu en 1959 le prix Nelson Cole pour son travail de recherche et en 1999 le prix Steele pour ses écrits. Il était membre de la National Academy of Sciences depuis 1985.

La géométrie diophantienne, selon Serge Lang

Marc Hindry

« Diophantine problems represent some of the strongest aesthetic attractions to algebraic geometry. They consist in giving criteria for the existence of solutions of algebraic equations in rings and fields, and eventually for the number of such solutions.

The fundamental ring of interest is the ring of ordinary integers \mathbf{Z} , and the fundamental field of interest is the field \mathbf{Q} of rational numbers. One discovers rapidly that to have all the technical freedom needed in handling general problems, one must consider rings and fields of finite type over the integers and the rationals. Furthermore, one is led to consider also finite fields, \wp -adic fields (including the real and complex numbers) as representing a localization of the problems under consideration. » (Lang [L12])

Ces premiers mots de la préface du livre visionnaire (1962) de Serge Lang *Diophantine Geometry* fournissent une bonne présentation du sujet. En fait le terme « géométrie diophantienne » a été, sinon inventé, au moins popularisé par Serge Lang pour désigner une branche féconde des mathématiques qu'il a énormément irriguée, par ses travaux, sa vision et, le mot est un peu inévitable quand on parle de Serge Lang, ses conjectures. Je vais essayer dans ce court texte de donner un échantillon des résultats de Serge Lang et de faire un petit panorama de quelques magnifiques problèmes qu'ils nous a laissés. Toute l'œuvre de Serge Lang tend à regrouper, croiser de multiples domaines, théorie des nombres, géométrie algébrique, analyse et géométrie complexe, théorie des groupes, etc, etc. Je me concentrerai sur l'aspect « diophantien » et laisserai de côté ses travaux modulaires ou liés à

la théorie d'Iwasawa, je renvoie également à l'article de Michel Waldschmidt pour l'aspect « approximations rationnelles et nombres transcendants » qui est pourtant intimement lié aux thèmes abordés. Le lecteur désirant en savoir davantage pourra se délecter en se plongeant dans le volume de l'encyclopédie russe « *Survey of Diophantine Geometry* » alias « *Number Theory III* » écrit par Serge Lang [L25].

1. Serge Lang et la géométrie diophantienne

Ainsi le problème originel de la géométrie diophantienne est la détermination des points rationnels ou entiers sur une variété algébrique V définie sur un corps de nombres k . Une fois qu'on s'est posé la question pour un corps de nombres k ou sur \mathcal{O}_k l'anneau des entiers algébriques de k (par exemple sur \mathbf{Z} ou \mathbf{Q}), on est rapidement amené à réduire modulo un idéal premier \wp et considérer donc des variétés sur un corps fini $\mathbf{F}_q = \mathcal{O}_k/\wp$; on a envie de compléter selon une place \wp -adique ou archimédienne, ce qui amène à regarder la situation sur un corps \wp -adique ou les corps \mathbf{R} ou \mathbf{C} . On notera k_v le complété d'un corps de nombres pour une place v . Les célèbres analogies entre corps de nombres et corps de fonctions amènent aussi à considérer les corps comme $k[T]$ ou $k[T_1, \dots, T_n]$ ou plus généralement $k(V)$ le corps de fonctions d'une variété algébrique V ainsi que ses complétés du type $k[[T_1, \dots, T_n]]$. Pour mesurer l'intérêt d'une telle généralisation il est important d'observer avec Lang que toute variété algébrique V définie *a priori* sur un corps K quelconque (par exemple $K = \mathbf{C}$) peut être définie *a posteriori* sur une extension de type fini du sous-corps premier, i.e. sur $\mathbf{F}_p[t_1, \dots, t_n]$ ou $\mathbf{Q}[t_1, \dots, t_n]$ (avec des t_i non nécessairement algébriquement indépendants). Dans ce mariage entre arithmétique et géométrie (algébrique pour le moment), on dira qu'une propriété est géométrique si elle peut être regardée sur la clôture algébrique \bar{k} (ou sur \mathbf{C} , ce qui revient souvent au même d'après le principe de Lefschetz classique). Les questions posées peuvent être dans l'ordre :

- (a) A-t-on $V(k) \neq \emptyset$?
- (b) L'ensemble $V(k)$ est-il infini ?
- (c) Décrire une paramétrisation ou la répartition de $V(k)$, densité, etc.

En fait la question (b) n'est vraiment pertinente que si V est une courbe; si $\dim(V) > 1$ il est plus naturel de demander :

- (b') L'ensemble $V(k)$ est-il dense pour la topologie de Zariski ?

Rappelons que la *topologie de Zariski* sur une variété algébrique est ainsi définie : les *fermés* sont les sous-ensembles algébriques, i.e. les zéros communs d'une famille (ou d'un idéal) de polynômes dans V . Ainsi un ensemble infini de points de V est dense si V est une courbe, mais dans le cas général un ensemble de points de V est dense s'il n'est contenu dans aucune hypersurface de V .

La question (c) peut être rendue plus précise de plusieurs façons; les deux variantes les plus intéressantes sont :

(c') On choisit un ensemble fini S de places de k (par exemple un plongement de k dans \mathbf{R} ou \mathbf{C} ou dans un corps \wp -adique), on note k_v le complété de k en v et on demande si

$$V(k) \hookrightarrow \prod_{v \in S} V(k_v) \quad \text{est une inclusion dense ?}$$

Ici on considère à droite la topologie produit de la topologie usuelle sur la variété analytique $V(k_v)$.

(c'') On choisit une *fonction de comptage* $H : V(k) \rightarrow \mathbf{R}$ et on demande une estimation asymptotique de la fonction

$$N(V(k), H, B) := \text{card}\{x \in V(k) \mid H(x) \leq B\}$$

On choisit généralement H une fonction *hauteur* (voir le paragraphe suivant pour des définitions).

Remarque. Un invariant important de V est son *corps de fonctions* qu'on notera $k(V)$; on dit que V et V' sont *birationnelles* (ou k -*birationnelles*) s'il existe $f : V \rightarrow V'$ application rationnelle qui induise un isomorphisme $f^* : k(V') \rightarrow k(V)$. Il revient au même de demander que f induise un isomorphisme $U \rightarrow U'$ entre deux ouverts de Zariski de V et V' . Notons que la propriété (b') est invariante birationnellement, la propriété (a) ne l'est pas sauf si on se restreint aux variétés projectives lisses (voir plus loin), la propriété (c') l'est également mais une transformation birationnelle peut changer les estimations dans (c''). Plus loin nous utiliserons un autre invariant géométrique : le *groupe de Picard* de V noté $\text{Pic}(V)$, c'est-à-dire le groupe des fibrés en droites inversibles modulo isomorphismes (muni du produit tensoriel).

On sait répondre aujourd'hui à ces questions de façon (presque) totalement satisfaisante dans le cas où V est une courbe algébrique. Rappelons qu'une courbe algébrique est birationnellement équivalente à une unique courbe lisse et projective, donc on peut supposer V lisse et complète (ou projective). L'invariant crucial est alors le *genre* et la courbe a un comportement différent suivant que $g = 0$, $g = 1$ ou $g \geq 2$. On dispose dans le cas des courbes d'un merveilleux dictionnaire entre courbes algébriques (disons lisses et projectives sur \mathbf{C}), corps de type fini et degré de transcendance 1 sur \mathbf{C} et surfaces de Riemann compactes.

Si V est de genre 0, elle est k -isomorphe à une conique; de plus cette conique est isomorphe à la droite projective \mathbf{P}^1 si et seulement si $V(k) \neq \emptyset$. Enfin, d'après le théorème de Hasse-Minkowski, on a $V(k) \neq \emptyset$ si et seulement si $\prod_v V(k_v) \neq \emptyset$. Si H_k est la hauteur usuelle sur \mathbf{P}^1 (voir plus loin) on a $N(\mathbf{P}^1(k), H_k, B) \sim cB^2$. Par exemple, pour $k = \mathbf{Q}$, la constante c vaut $12/\pi^2$.

Si V est de genre 1 et si $V(k) \neq \emptyset$ alors V est k -isomorphe à une cubique projective plane, on peut définir une loi de groupe (c'est une courbe elliptique) et $V(k)$ est alors un groupe de type fini (théorème de Mordell-Weil) et $N(V(k), H_k, B) \sim c(\log B)^{r/2}$ où r est le rang de $V(k)$ (théorème de Néron). Ainsi une courbe elliptique peut posséder une infinité de points rationnels, mais ceux-ci sont « beaucoup moins nombreux » que sur une courbe de genre 0.

Si V est de genre $g \geq 2$ alors $V(k)$ est fini; c'est la célèbre conjecture de Mordell démontrée en 1983 par Faltings [Fa1], et dont Vojta [Vo2] a donné une deuxième démonstration sur laquelle nous reviendrons.

On dispose d'une description qualitativement complète des points rationnels sur une courbe. Cependant indiquons que c'est seulement pour les courbes de genre 0 que l'on a des solutions *effectives* (i.e. que l'on peut calculer par un algorithme donnant les solutions en un temps déterminé).

Pour une courbe affine V (qu'on peut voir comme une courbe projective \bar{V} privée de s points), la question des points entiers a été résolue par Siegel (1929) :

si la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(V) := 2 - 2g - s$ vérifie $\chi(V) < 0$, alors l'ensemble des points entiers est fini. Ainsi aussi bien un ouvert affine d'une courbe elliptique que la droite projective privée de trois points ou plus n'ont qu'un nombre fini de points entiers.

Siegel démontrait son résultat en utilisant un théorème d'approximation diophantienne (démontré par lui-même). Rappelons quelques étapes historiques de ces questions d'approximation diophantienne pour un nombre réel α algébrique (non rationnel) de degré d (i.e. $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] = d$).

(i) En 1844 Liouville démontre que, pour tout rationnel p/q , on a (avec $c = c(\alpha)$ constante adéquate) :

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^d}$$

(ii) Thue (1909) montre qu'on peut remplacer l'exposant d par $\frac{d}{2} + 1 + \varepsilon$ (pour tout $\varepsilon > 0$ avec $c = c(\alpha, \varepsilon)$).

(iii) Siegel (1921) montre qu'on peut remplacer l'exposant d par $2\sqrt{d} + \varepsilon$.

(iv) Gelfond et Dyson (1947) montrent qu'on peut remplacer l'exposant d par $\sqrt{2d} + \varepsilon$.

(v) Roth (1954) montre qu'on peut remplacer l'exposant d par $2 + \varepsilon$, ce qui est optimal.

Le résultat ultérieur le plus important est le théorème du sous-espace de Schmidt [Sch1,Sch2]. Réécrivons le théorème de Roth sous la forme $|q(q\alpha - p)| \geq q^{-\varepsilon}$ sauf pour un nombre fini d'exceptions. Une des généralisations de Schmidt s'écrit en prenant L_1, \dots, L_n formes linéaires en n variables, à coefficients algébriques et indépendantes; on obtient alors

$$\prod_i |L_i(x_1, \dots, x_n)| \geq \max_i |x_i|^{-\varepsilon}$$

pour $x \in \mathbf{Z}^n$ situé hors d'une réunion finie de sous-espaces vectoriels propres.

L'idée de départ sous-jacente à la méthode de Siegel est très simple, expliquons-la pour $k = \mathbf{Q}$ et $\mathcal{O}_k = \mathbf{Z}$. On peut tout d'abord se ramener au cas d'une courbe plane d'équation

$$f(x, y) = f_d(x, y) + \dots + f_1(x, y) + f_0 = 0,$$

où $f_j(x, y)$ est homogène de degré j et disons $f_d(x, y) = \prod_{i=1}^d (x - \alpha_i y)$. Si l'on trouve une suite de points entiers $P_n = (x_n, y_n) \in \mathbf{Z}^2$, alors cette suite tend vers l'infini et une sous-suite se rapprochera d'une des asymptotes $x - \alpha_i y = 0$; c'est-à-dire en particulier que les x_n/y_n fournissent de très bonnes approximations rationnelles de α_i . Dans le cas où le genre de la courbe est ≥ 1 Siegel montre par un argument transcendant (utilisant des fonctions thêta et leurs lois d'addition) que l'on peut encore améliorer la qualité des approximations à l'aide de transformations. La version moderne, due à Serge Lang, utilise plutôt la jacobienne de la courbe et les revêtements non ramifiés d'icelle. La présentation du théorème de Siegel par Lang dans [L9], reprise dans [L12], est bien sûr simplifiée par l'utilisation du théorème de Roth mais aussi par l'utilisation de la géométrie de la jacobienne de la courbe, ce qui lui permet de généraliser le théorème aux anneaux de S -entiers d'un corps de

nombre et aux anneaux de type fini. La version géométrique des inégalités d'approximation rationnelle donnée par Lang est la suivante (voir le paragraphe suivant pour la définition des valeurs absolues normalisées $\|\cdot\|_v$ et de la hauteur H) :

Proposition. — (Lang-Siegel, [L9]) *Soit V une courbe projective lisse définie sur k , soit $f \in k(V)$ non constante.*

(i) *Si r est la plus grande multiplicité d'un pôle de f , si S est un ensemble fini de places de k , l'ensemble des points $P \in V(k)$ vérifiant*

$$\prod_{v \in S} \max(1, \|f(P)\|_v) \geq H_k(P)^{(2+\varepsilon)r}$$

est fini (de hauteur bornée).

(ii) *Si la courbe est de genre $g \geq 1$ on peut remplacer l'exposant $(2 + \varepsilon)r$ par ε en gardant la même conclusion.*

Comme il découle aisément de la définition de H_k que, si $f(P)$ est S -entier et S contient les places archimédiennes, on a $H_k(f(P)) = \prod_{v \in S} \max(1, \|f(P)\|_v)$, le théorème de Siegel s'ensuit immédiatement pour les courbes de genre $g \geq 1$. Tout comme les théorèmes de Mordell-Weil et Faltings, le théorème de Siegel n'est pas effectif, cependant les travaux de Baker ont permis de rendre effective la détermination des points entiers pour $g \leq 1$ et dans un certain nombre de cas en genre supérieur. On peut noter qu'on a longtemps cru que la méthode de Siegel ne permettait pas d'attaquer la question des points rationnels. En effet on se heurte à une difficulté : si $P_n = (x_n, y_n)$ est maintenant une suite de points rationnels, on peut en extraire un sous-suite convergente (au sens archimédien ou p -adique) mais alors cette limite sera en général un point (α, β) avec des coordonnées transcendentes ! Néanmoins Vojta [Vo2], huit ans après la preuve de Faltings, soixante ans après l'article de Siegel, a trouvé un moyen de contourner cette difficulté et d'utiliser l'approximation rationnelle pour les points rationnels.

Ces travaux phares du XX^e siècle se poursuivent grosso modo dans deux directions.

(A) Tenter de rendre *effectifs* ces résultats (Mordell-Weil, Siegel, Roth, Faltings). C'est l'objet notamment des travaux de Baker et plus récemment de Masser-Wüstholz et de manière générale des « méthodes de transcendance ». Je renvoie à l'article de Michel Waldschmidt [ce volume] pour une description de la contribution de Lang à ces questions.

(B) Tenter d'étendre ces résultats *qualitatifs* aux variétés algébriques de dimension > 1 . Cette question est discutée dans le paragraphe suivant.

Avant d'aborder les généralisations (pour la plupart conjecturales), je clos ce paragraphe avec un échantillon à la Prévert de quelques théorèmes de Serge Lang en géométrie diophantienne.

La propriété d'avoir un point k -rationnel est k -birationnelle parmi les variétés lisses et projectives et peut donc être lue sur $k(V)$ le corps de fonctions de la variété [L1].

Deux groupes algébriques isogènes sur un corps fini \mathbf{F}_q ont le même nombre de points sur \mathbf{F}_q ; un espace homogène sous un groupe algébrique possède un point rationnel sur \mathbf{F}_q (Cf [L3], [LT6]). Le dernier énoncé était connu pour une

courbe C de genre 1; on peut en fait le déduire de la majoration de Hasse $|\text{card } C(\mathbf{F}_q) - (q + 1)| \leq 2\sqrt{q}$ (c'est l'« hypothèse de Riemann » pour les courbes de genre 1 sur \mathbf{F}_q).

Le décompte approché du nombre de points d'une variété algébrique V sur \mathbf{F}_q obtenu en collaboration avec Weil [LW2] s'énonce ainsi. Si V est fermée dans \mathbf{P}^n , et $r = \dim V$, $d = \deg V$

$$|\text{card } V(\mathbf{F}_q) - q^r| \leq (d - 1)(d - 2)q^{r-1/2} + C(n, d, r)q^{r-1}$$

que l'on peut réécrire de manière peut-être plus suggestive

$$|\text{card } V(\mathbf{F}_q) - \text{card } \mathbf{P}^r(\mathbf{F}_q)| \leq (d - 1)(d - 2)q^{r-1/2} + C'(n, d, r)q^{r-1}.$$

Cette estimation peut-être améliorée dans le cas où V est lisse et on a des renseignements sur les nombres de Betti de V , grâce aux conjectures de Weil (démontrées par Grothendieck et Deligne), mais reste extrêmement utile dans le cas général.

Tout revêtement d'une courbe algébrique lisse projective s'obtient par image réciproque via une isogénie de sa jacobienne; c'est une belle formulation géométrique de la théorie du corps de classes non ramifié d'une courbe [L4]. Les extensions abéliennes ramifiées s'obtiennent en utilisant les « jacobienes généralisées » construites par Rosenlicht. Cette théorie, due à Lang, est exposée dans le livre de Serre [Se1]. Dans un article aussi court que remarquable [L5],

Lang montre comment l'énoncé sur les revêtements abéliens peut être démontré à partir du cas des courbes définies sur un corps fini (cas que Lang avait déjà traité). Ainsi le « principe de Lefschetz » devient un mode de voyage entre corps finis, corps de type fini sur \mathbf{F}_p ou \mathbf{Q} , et le corps des complexes \mathbf{C} . Cette idée a été reprise dans un contexte différent et de façon spectaculaire par Mori et son fameux « *bend-and-break lemma* » (Cf [Mo]).

2. Les conjectures et la vision de Serge Lang

Dans son livre fondateur [L12] Lang met en avant quatre résultats diophantiens : les théorèmes de Mordell-Weil, Siegel, Roth et le théorème d'irréductibilité de Hilbert. Ce dernier affirme que si un polynôme $P(X_1, \dots, X_n)$ dans $k[X_1, \dots, X_n]$ est irréductible, les spécialisations $P(X_1, \dots, X_m, t_{m+1}, \dots, t_n)$ dans $k[X_1, \dots, X_m]$ restent irréductibles pour une infinité de valeurs des paramètres $t_i \in k$. Les outils fondamentaux sont la théorie des hauteurs et l'utilisation systématique de la géométrie algébrique. Je commencerai donc par des préliminaires sur ces deux aspects (les spécialistes sauteront sans hésiter cette liste de définitions).

2.1. Géométrie et hauteurs

Donnons maintenant un peu de vocabulaire issue de la géométrie algébrique et de la géométrie complexe. Le *fibré canonique* sur une variété V de dimension r est le fibré en droites dont les sections sont les r -formes différentielles algébriques; on le note ω_V . C'est un invariant important habitant dans le groupe de Picard $\text{Pic}(V)$ de la variété. Soit L un fibré en droites sur une variété projective V , alors pour chaque $m \geq 1$ l'espace vectoriel des sections globales $H^0(X, L^{\otimes m})$ permet de définir une application rationnelle $\Phi_m : V \dashrightarrow \mathbf{P}H^0(X, L^{\otimes m})$. On note $\kappa(V, L) = \max \dim \Phi_m(V)$ et, si $L = \omega_V$ on pose $\kappa(V) = \kappa(V, \omega_V)$ qu'on

appelle *dimension de Kodaira* de V . Un fibré en droites L est dit *très ample* (resp. *ample*) si L (resp. une puissance de celui-ci) fournit un plongement, autrement dit si $\Phi_L : V \hookrightarrow \mathbf{P}^n$, resp. si pour un certain $m \geq 1$, on a $\Phi_{L^{\otimes m}} : V \hookrightarrow \mathbf{P}^n$. Un fibré en droites L est dit *gros* (« *big* » en anglais) si $\kappa(V, L) = \dim(V)$. On peut montrer (lemme de Kodaira) que, quitte à tensoriser par \mathbf{Q} , un fibré gros est produit tensoriel d'un fibré ample par un fibré effectif (i.e. admettant une section globale non nulle). Suivant Lang une variété est dite *canonique* (resp. *pseudo-canonique*) si son fibré canonique est ample (resp. son fibré canonique est gros). Du côté analytique la notion de fibré en droites ample correspond à la notion de fibré positif. La définition suivante est importante dans la philosophie de Lang.

Définition. — Une variété complexe $V(\mathbf{C})$ est dite *hyperbolique* (au sens de Brody) si toute application holomorphe de \mathbf{C} vers $V(\mathbf{C})$ est constante.

Note. Si la variété est projective (compacte) cette définition coïncide avec celle donnée par Kobayashi, mais pas en général.

La théorie des hauteurs, associées à un diviseur, avait été développée par Weil. Sur les variétés abéliennes Néron et Tate en ont donné une version plus canonique et jolie. On note respectivement $H, h = \log H, \hat{h}$ ces objets. Serge Lang prêtait beaucoup d'attention aux notations dont il estimait qu'elles devaient être « fonctorielles avec les idées »¹. Pour la théorie des hauteurs on peut consulter bien sûr l'ouvrage de Lang [L12] ou encore [Se2], [H-S2] et [B-G]. Considérons donc un corps k muni d'une famille de valeurs absolues M_k normalisées de sorte que la *formule du produit* soit vérifiée :

$$\forall \lambda \in k^*, \quad \prod_{v \in M_k} \|\lambda\|_v = 1.$$

Donnons deux exemples typiques. Tout d'abord $k = \mathbf{Q}$ avec $M_{\mathbf{Q}}$ l'ensemble constitué par la valeur absolue « usuelle » (c'est-à-dire archimédienne) et des valeurs absolues p -adiques normalisées par $\|p\|_p = 1/p$; autrement dit si $x = p^m a/b \in \mathbf{Q}$ avec $m \in \mathbf{Z}$ et a, b non divisibles par p , on a $\|x\|_p = p^{-m}$. Ensuite, si K est un corps algébriquement clos et $k = K(T)$ on peut choisir $M_k = \mathbf{P}^1(K)$ avec $\|f\|_v := \exp(\text{ord}_v(f))$. Une fois qu'on a une normalisation avec formule du produit sur un corps k , on peut en tirer une normalisation avec formule du produit sur toute extension finie k' de sorte que $\prod_{w|v} \|\alpha\|_w = \|N_k^{k'}(\alpha)\|_v$.

On pose alors :

$$H_k(P) = \prod_{v \in M_k} \max \{ \|x_0(P)\|_v, \dots, \|x_n(P)\|_v \} \quad \text{ou} \quad h_k(P) := \log H_k(P).$$

On peut montrer que si $P \in \mathbf{P}^n(k)$ et $k \subset k'$ alors $H_{k'}(P) = H_k(P)^{[k':k]}$ d'où l'on tire que

$$H(P) := H_k(P)^{\frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}} \quad \text{et} \quad h(P) := \log H(P) = \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]} h_k(P)$$

¹ Il est connu pour avoir effacé systématiquement, dans le dos d'un orateur réputé parlant au tableau de hauteurs, des « h » pour les remplacer par des « H » et avoir émis, à une autre occasion l'affirmation péremptoire « *Your notation stinks!* », d'autres m'ont rapporté un sonore « *Your notation sucks!* »

est une hauteur *absolue* indépendante du corps de définition du point ; on obtient ainsi une fonction $h = \log H : \mathbf{P}^n(\bar{\mathbf{Q}}) \rightarrow \mathbf{R}$ dont la principale propriété est que les ensembles $\{P \in \mathbf{P}^n(\bar{\mathbf{Q}}) \mid h(P) \leq B, [\mathbf{Q}(P) : \mathbf{Q}] \leq d\}$ sont finis.

Si L est un fibré en droites très ample sur V et $\Phi_L : V \rightarrow \mathbf{P}H^0(V, L) \cong \mathbf{P}^n$ est le plongement associé on pose

$$H_L(P) := H(\Phi_L(P)).$$

Comme ce plongement est unique à un automorphisme linéaire près (un élément α de $\mathrm{PGL}(n+1)$), la hauteur ainsi définie dépend du plongement. Cependant on a $H \circ \alpha \gg H$, ce qui veut dire $h_L \circ \alpha - h_L$ est bornée sur $V(\bar{k})$. Ces hauteurs jouissent de bonnes propriétés fonctorielles par rapport au groupe de Picard de V , par exemple

$$h_{L \otimes M}(P) = h_L(P) + h_M(P) + O(1), \quad \text{et} \quad h_L(\varphi(P)) = h_{\varphi^*L}(P) + O(1),$$

pour L, M fibrés en droites et $\varphi : W \rightarrow V$ morphisme de variétés projectives. La première formule permet de définir la hauteur associée à n'importe quel fibré en droites L en le décomposant $L = L_1 \otimes (L_2)^{-1}$, où L_1, L_2 sont très amples, et en posant $h_L := h_{L_1} - h_{L_2} + O(1)$.

2.2. Hauteurs de Néron-Tate et théorème de Mordell-Weil

Dans le cas d'une variété abélienne on peut faire un choix plus canonique de hauteurs, en posant, pour un fibré symétrique (i.e. tel que $[-1]^*L \cong L$) :

$$\hat{h}_L(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_L([2^n](P))}{4^n}.$$

Cette hauteur diffère de la hauteur initiale par une fonction bornée : $\hat{h}_L(P) - h_L(P) = O(1)$. La hauteur $\hat{h}_L : A(\bar{k}) \rightarrow \mathbf{R}$, associée à un fibré ample et symétrique, est alors une forme quadratique définie positive au sens que la forme

$$\hat{h}_{L, \mathbf{R}} : A(\bar{k}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

est définie positive. Ainsi la positivité analytique du fibré se traduit par une positivité arithmétique de la hauteur associée. On définit de même le produit scalaire de Néron-Tate :

$$\langle P, Q \rangle_L := \frac{1}{2} \left(\hat{h}_L(P + Q) - \hat{h}_L(P) - \hat{h}_L(Q) \right).$$

En particulier on peut voir $A(k)$ ou plutôt $A(k)/A(k)_{\mathrm{tor}}$ comme un réseau dans l'espace euclidien $A(k) \otimes \mathbf{R}$ (le théorème de Mordell-Weil dit que $A(k)$ est un groupe de type fini donc $A(k) \otimes \mathbf{R}$ est un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension finie).

Une question fondamentale est de donner une borne pour la hauteur de générateurs de la partie infinie de $A(k) = \mathbf{Z}P_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}P_r \oplus A(k)_{\mathrm{tor}}$. Au vu de ce qui précède, en utilisant un peu de géométrie euclidienne des réseaux, on voit que le problème se réduit à donner une *minoration* de la hauteur d'un point d'ordre infini de $A(k)$ et une *majoration* du volume de la maille du réseau ou encore une majoration du régulateur $\mathrm{Reg}(A/k) := \det(\langle P_i, P_j \rangle)$. Serge Lang a proposé deux conjectures dans cette direction que je formule sous leur forme la plus élémentaire sur les courbes elliptiques sur \mathbf{Q} (les généralisations aux corps de nombres et

variétés abéliennes de dimension quelconque sont données en commentaires).

Conjecture. — (Lang [L17], [L18]) *Il existe une constante absolue $c > 0$ vérifiant l'énoncé suivant. Soit E une courbe elliptique définie sur \mathbf{Q} , soit $y^2 = x^3 + ax + b$ un modèle de Weierstrass entier minimal (i.e. $a, b \in \mathbf{Z}$ et, pour tout p premier, ou bien p^4 ne divise pas a , ou bien p^6 ne divise pas b) et soit $\Delta_E := |4a^3 + 27b^2|$ la valeur absolue de son discriminant, si $P \in E(\mathbf{Q})$ est d'ordre infini :*

$$\hat{h}(P) \geq c \log \Delta_E.$$

On dispose d'un certain nombre de résultats positifs en direction de cette conjecture (voir [H-S1] et [Da]); une généralisation aux variétés abéliennes A/k a été proposée par Joe Silverman, l'inégalité s'écrivant alors $\hat{h}_L(P) \geq ch(A)$ où $h(A)$ est une hauteur pour les variétés abéliennes, par exemple la hauteur de Faltings définie dans [Fa1] et où l'on suppose que le point P est non seulement d'ordre infini, mais reste d'ordre infini dans A modulo toute sous-variété abélienne propre de A .

Conjecture. — (Lang [L18]) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c_\varepsilon > 0$ vérifiant l'énoncé suivant. Soit E une courbe elliptique définie sur \mathbf{Q} , soit $y^2 = x^3 + ax + b$ un modèle de Weierstrass entier minimal, il existe P_1, \dots, P_r générateurs de la partie infinie de $E(\mathbf{Q})$ tels que*

$$\max \{ \hat{h}(P_1), \dots, \hat{h}(P_r) \} \leq c_\varepsilon \Delta_E^{\frac{1}{2} + \varepsilon}.$$

Cette dernière conjecture est motivée par la conjecture de Birch & Swinnerton-Dyer qui fait apparaître le régulateur $\text{Reg}(E/\mathbf{Q})$ dans le terme dominant du développement de Taylor de la série de Dirichlet $L(E, s)$ associée à E , en $s = 1$. J'ai omis un terme c^r présent dans [L18], mais qui n'a que peu d'intérêt tant qu'on ignore même si r est borné ou non. La majoration dans le cas d'une variété abélienne devrait s'écrire $c_\varepsilon H(A)^{1+\varepsilon}$ avec $H(A) = \exp h(A)$. Les théorèmes en direction de la majoration du régulateur sont inexistantes aujourd'hui, ce qui est dommage car ils permettraient un calcul effectif de $E(\mathbf{Q})$.

Le théorème de Mordell-Weil – Mordell (1922) pour les courbes elliptiques sur \mathbf{Q} , Weil (1929) pour les jacobiniennes sur les corps de nombres – a été clarifié et étendu par Serge Lang aux variétés abéliennes. Le résultat vraiment nouveau est le théorème de Lang-Néron [LN7] que nous énonçons ci-dessous. Pour cela rappelons la définition de la K/k -trace de Chow (voir [L8]) : si K/k est une extension régulière (i.e. k est algébriquement clos dans K ou encore, si K est de type fini sur k , on a $K = k(V)$ avec V variété définie sur k) et si A est une variété abélienne définie sur K , il existe une « plus grande sous-variété abélienne définie sur k » ; plus précisément il existe B , variété abélienne définie sur k et $\tau : B_K \rightarrow A$ morphisme universel, tels que tout homomorphisme $\varphi : C_K \rightarrow A$ à partir d'une variété abélienne C définie sur k se factorise à travers τ .

Théorème. — (Lang-Néron) Soit K une extension régulière de type fini de k , soit A une variété abélienne sur K , soit B sa K/k -trace et $\tau : B_K \rightarrow A$ l'application universelle. Alors

$$A(K)/\tau(B(k)) \text{ est un groupe de type fini.}$$

En particulier si $K = F(t_1, \dots, t_r)$ est une extension de type fini de F , si A est une variété abélienne sur K ne contenant pas de partie constante sur F , alors $A(K)$ est un groupe de type fini.

2.3. Intersection d'une sous-variété avec un sous-groupe

Dans un effort pour aborder la conjecture de Mordell et la généraliser, Lang a été amené à considérer l'intersection d'un sous-groupe de type (ou rang) fini de A avec une courbe.

La conjecture suivante (parfois dite de Manin-Mumford-Lang ou Mordell-Lang) est aujourd'hui un théorème grâce principalement aux travaux de Faltings [Fa2], complétés par [H], [Vo3] et [McQ]. Elle (ou ses analogues) a été et continue à être la source de travaux intéressants comme par exemple la théorie différentielle algébrique des jets (Cf Buium [Bu]) elle-même inspirée des travaux pionniers de Manin [Ma], l'apparition surprenante (au moins pour certains) de la théorie des modèles dans ces questions (Cf Hrushovski [HR]) ou des simplifications (dans le cas où Γ est le groupe de torsion, Cf Pink-Roessler [P-R]), voir aussi les travaux de Raynaud [Ra] et Rémond [Ré].

Conjecture. — (Lang). Soit A une variété semi-abélienne définie sur \mathbf{C} , soit Γ un sous-groupe de $A(\mathbf{C})$ de rang fini et V une sous-variété fermée de A alors il existe un ensemble fini de $\gamma_i \in \Gamma$ et de sous-groupes algébriques B_i tels que $\gamma_i + B_i \subset V$ et

$$V(\mathbf{C}) \cap \Gamma = \cup_{i=1}^s \gamma_i + (B_i(\mathbf{C}) \cap \Gamma).$$

En particulier si $V(\mathbf{C}) \cap \Gamma$ est Zariski dense dans V alors V est le translaté d'un sous-groupe algébrique par un élément de Γ .

Rappelons qu'un groupe abélien Γ est de rang fini r si $\Gamma \otimes \mathbf{Q}$ est un \mathbf{Q} -espace vectoriel de dimension r . Pour l'énoncé de Lang, on peut penser au cas où l'on part d'un groupe de type fini Γ_0 et on prend le saturé $\Gamma := \{x \in A(\mathbf{C}) \mid \exists m \geq 1, mx \in \Gamma_0\}$.

Cet énoncé généralise la conjecture de Mordell : prendre pour V une courbe dans sa jacobienne J et pour Γ le groupe de Mordell-Weil $J(k)$. Dans [L14] est énoncée la conjecture de Lang pour les courbes ; dans [L13] il prouve l'analogie pour une courbe dans un tore $(\mathbf{G}_m)^n$.

Serge Lang était friand de l'énoncé suivant que l'on peut voir comme un énoncé purement d'analyse complexe dont la preuve est en fait essentiellement équivalente à celle de la conjecture de Mordell et passe par l'utilisation massive d'arithmétique.

Corollaire. — Soit S une surface de Riemann compacte de genre g , soit $T := \mathbf{C}^n/\Lambda$ un tore complexe ($\Lambda \cong \mathbf{Z}^{2n}$ sous-groupe discret de rang maximal dans \mathbf{C}^n) et $f : S \rightarrow T$ une application holomorphe, soit Γ un sous-groupe de type fini (ou même de rang fini) de T , alors l'ensemble $\{z \in S \mid f(z) \in \Gamma\}$ est

fini, sauf si $f(S)$ est un translaté par un élément de Γ d'un sous-tore complexe, i.e. si il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma + f(S) = \mathbf{C}/(\Lambda \cap \mathbf{C})$ pour une droite complexe $\mathbf{C} \subset \mathbf{C}^n$.

L'énoncé a de multiples applications arithmétiques mais aussi géométriques. Ainsi, par exemple, l'article de Cutkosky et Srinivas [C-S], concernant le problème de Zariski sur la dimension des systèmes linéaires sur les surfaces, utilise le cas particulier $r = 1$ de la conjecture de Lang.

2.4. Arithmétique et géométrie algébrique et analytique

Un des problèmes les plus fondamentaux soulevés par Serge Lang est l'existence d'un dictionnaire entre propriétés arithmétiques d'une variété, propriétés géométriques et propriétés analytiques. Les livres et articles [L19], [L20], [L21] y sont consacrés; le livre [L22] développe la géométrie hyperbolique en introduisant le point de vue qui intéressait Lang.

L'observation suivante est frappante. Il existe des applications holomorphes non constantes de \mathbf{C} vers \mathbf{P}^1 , $\mathbf{P}^1 \setminus \{\text{un point}\}$ ou même $\mathbf{P}^1 \setminus \{\text{deux points}\}$ (prendre $\exp(z) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$) et vers une surface de Riemann de genre 1 (prendre $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/\Lambda$). Cependant il n'existe aucune application holomorphe non constante de \mathbf{C} vers une surface de Riemann de genre ≥ 2 (car son revêtement universel est le disque \mathbf{D}), vers une surface de Riemann de genre 1 privée d'un point ou vers $\mathbf{P}^1 \setminus \{a, b, c\}$ d'après le théorème de Picard. En termes différentiels, les surfaces de Riemann (algébriques) n'admettant pas de fonctions entières non constantes sont celles qui ont une courbure constante négative. En comparant avec les théorèmes diophantiens, on voit apparaître une remarquable correspondance entre propriétés arithmétiques, géométriques et analytiques.

Ainsi, si une variété contient une courbe rationnelle $\mathbf{P}^1 \rightarrow V$, ou une application non constante d'un groupe algébrique $G \rightarrow V$, on obtient donc une infinité de points rationnels. Dans ce cadre, Lang a proposé la conjecture élégante suivante (voir [L15]).

Conjecture. — (Lang) *Soit V une variété algébrique projective et lisse définie sur un corps de nombres k ; les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) *Pour tout corps de nombres K contenant k , l'ensemble des points rationnels $V(K)$ est fini (on dit que la variété est mordellique²).*
- (ii) *La variété V ainsi que toutes ses sous-variétés sont pseudo-canoniques³ (i.e. de dimension de Kodaira maximale).*
- (iii) *La variété $V(\mathbf{C})$ est hyperbolique (au sens de Brody, i.e. toute application holomorphe $\mathbf{C} \rightarrow V(\mathbf{C})$ est constante).*

Le *lieu spécial* d'une variété est l'adhérence de Zariski de l'union de ses sous-variétés images par un morphisme non constant d'un groupe algébrique (on peut se restreindre aux variétés abéliennes). Cette définition est due à Serge Lang qui demande au passage s'il est nécessaire de prendre la clôture de Zariski (autrement

² La dissonance du mot (au moins en français) est une pointe d'humour qui n'a vraisemblablement rien d'involontaire chez Serge Lang.

³ Dans la littérature, ces variétés sont appelées « de type général », le terme « pseudo-canonique » a été proposé par Serge Lang et est utilisé ici en son honneur. Je pense que le terme « log-canonique », utilisé plus loin, lui aurait fait plaisir.

dit si l'union des sous-variétés images par un morphisme d'un groupe algébrique n'est pas automatiquement fermée). On notera ce lieu $\text{spéc}(V)$. Une autre question purement géométrique est de savoir si $\text{spéc}(V)$ est un sous-ensemble propre de V quand on suppose que celle-ci est pseudo-canonique. D'un point de vue analytique, on peut définir un *lieu spécial analytique* : c'est l'adhérence de Zariski de l'union de toutes les images d'applications holomorphes non constantes $\mathbf{C} \rightarrow V(\mathbf{C})$; les conjectures de Lang suggèrent que le lieu spécial (algébrique) coïncide avec le lieu spécial analytique (ce qui n'est pas connu).

Conjecture. — (Lang) *La variété quasi-projective $V \setminus \text{spéc}(V)$ est mordellique.*

Ces conjectures ont été formulées comme des généralisations de la trichotomie pour les courbes algébriques, appelées aussi (sur \mathbf{C}) surfaces de Riemann... Une courbe de genre 0 est isomorphe à la droite projective \mathbf{P}^1 (dès qu'elle a un point rationnel) et a donc beaucoup de point rationnels ; une courbe de genre 1 est isomorphe à une cubique plane (dès qu'elle a un point rationnel) et a donc « peu » de point rationnels même s'ils sont en nombre infini (Mordell-Weil). Une courbe de genre $g \geq 2$ n'a qu'un nombre fini de point rationnels (conjecture de Mordell, théorème de Faltings). Ces conjectures générales ne sont connues en dimension supérieure essentiellement que pour les sous-variétés de variétés abéliennes [Fa2]. En effet on sait que si V est une sous-variété d'une variété abélienne A , alors $\text{spéc}(V)$ est l'union des translatées de sous-variétés abéliennes $t + B$ contenues dans V et de plus on sait que l'union est fermée. On peut ajouter aussi l'exemple des variétés de Shimura qui, comme l'a remarqué Ullmo [UI], peuvent être traitées en utilisant les travaux de Faltings. Ainsi tous les exemples connus passent par les variétés abéliennes.

Il est relativement aisé de formuler une conjecture plus générale à condition d'introduire le *bord* d'une variété algébrique non nécessairement complète. Une façon « économique » de faire cela est, partant d'une variété quasi-projective lisse V , de la compactifier en une variété complète $V \subset \bar{V}$, puis, quitte à éclater le bord $\bar{V} \setminus V$ et utiliser le théorème de résolution des singularités d'Hironaka (cela force à laisser le monde de la caractéristique p dans le conditionnel) on peut supposer que $\partial V := \bar{V} \setminus V$ est un diviseur à croisements normaux. La variété sera alors dite *log-canonique* si $\omega_{\bar{V}}(\partial V)$ est « gros » (observer que la définition ne dépend que de V et pas de la compactification choisie).

Conjecture. — (Lang) *Soit V une variété algébrique affine lisse définie sur un corps de nombres k ; les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) *Pour tout corps de nombres K contenant k , l'ensemble des points entiers $V(\mathcal{O}_K)$ est fini.*⁴
- (ii) *La variété V ainsi que toutes ses sous-variétés sont log-canoniques.*
- (iii) *La variété $V(\mathbf{C})$ est hyperbolique (i.e. toute application holomorphe $\mathbf{C} \rightarrow V(\mathbf{C})$ est constante).*

On pourrait formuler cette conjecture de manière à ce qu'elle contienne la précédente puisque, si V est projective, points rationnels et points entiers

⁴ Lang aurait pu appeler *siegelienne* ou *siegelsche* une telle variété affine mais il ne l'a, semble-t-il, pas fait.

coïncident, cependant la restriction aux variétés affines est assez naturelle et, pour les variétés quasi-projectives générales, il y a plusieurs définitions non équivalentes d'hyperbolicité. Hormis le cas des courbes où elle équivaut au théorème de Siegel, cette conjecture est démontrée par Faltings dans le cas d'un ouvert affine d'une variété abélienne [Fa2], ce qui avait été conjecturé depuis longtemps . . . par Serge Lang [L10].

Caporaso, Harris et Mazur [C-H-M] ont montré une conséquence surprenante de la conjecture de Lang sur les variétés pseudo-canoniques : elle entraîne que pour $g \geq 2$ et k corps de nombres, il existe une constante $c(k, g)$ telle que pour toute courbe V de genre g définie sur k on a $\text{card } V(k) \leq c(k, g)$. La force de cette conclusion (dont la fausseté n'est pas démontrée) fait douter certains de la validité de la conjecture de Lang ; on peut aussi dire que cela renforce l'intérêt évident de la conjecture de Lang.

Lang a fait beaucoup de publicité pour les travaux de Vojta, qui développent une analogie remarquable entre théorie de Nevanlinna (appartenant donc à la théorie de la variable complexe) et approximations rationnelles (appartenant donc à la théorie des nombres). Par exemple le théorème du sous-espace de Schmidt en approximation diophantienne correspond au théorème de Cartan en théorie de Nevanlinna. Je renvoie au livre de Vojta [Vo1] et aux exposés de Lang dans [L19], [L22], [L24] et [L25] pour l'énoncé des conjectures que Vojta tire de cette analogie. Indiquons simplement ici qu'elles fournissent une sorte de version quantitative des conjectures de Lang.

3. Conclusion avec quelques souvenirs personnels.

Il est difficile de parler de Serge Lang en évoquant seulement ses mathématiques et sans évoquer quelques touches vertes ou rouges du personnage haut en couleurs. J'ai d'abord connu Lang par ses livres, son *Algebra* m'accompagne depuis la maîtrise et, préparant ma thèse, j'ai appris mes mathématiques dans ses livres *Abelian varieties*, *Diophantine Geometry*, *Elliptic curves*, *Elliptic functions*. Il m'a fait le plaisir et l'honneur de participer au jury de ma thèse. Comme tous ceux qui l'ont connu ne serait-ce qu'un peu, j'ai été frappé par son intensité, son exigence, voire son incandescence qui ne laissaient personne indifférent. Son exigence n'était pas que dureté, je ne suis pas le seul jeune mathématicien à avoir été encouragé par Lang. Et puis évidemment . . . ses fameuses polémiques ont égayé, stimulé, parfois effrayé ou irrité beaucoup d'entre nous. Je ne citerai que la polémique directement en rapport avec la géométrie diophantienne, celle qui l'opposa à Mordell et Siegel. Mordell publia en effet une recension fort critique du livre *Diophantine Geometry* [L12] et reçut un soutien de la part de Siegel, dans une lettre au langage étonnamment virulent. Lang se régala d'ailleurs un peu plus tard à écrire une recension d'un livre de Mordell (les deux reviews cités sont reproduits dans la réédition de [L12]). L'histoire a totalement donné raison à Lang et celui-ci s'est de nouveau régalé en publiant il y a quelques années un texte [L26] dans la *Gazette* relatant la polémique, les idées, l'histoire (il m'avait écrit à cette occasion « *on va bien s'amuser* »). Serge était toujours prompt à réagir et dégainer, ainsi une lettre d'Arnold publiée dans la *Gazette* citant une phrase de Landau « *les nombres premiers sont fait pour être multipliés, pas additionnés* » l'avait fait bondir et ils nous envoya donc une missive « de représailles »

qui fut aussi publiée dans la *Gazette* et contient une très jolie présentation de la conjecture de Bateman-Horn [L27] décrivant les valeurs premières prises par un ou plusieurs polynômes. Lang aimait les mathématiques nouvelles et avait un flair remarquable pour voir ce qui allait devenir important. Ainsi, bien qu'il ait lui-même plutôt écrit la géométrie algébrique dans le langage des *foundations* de Weil, il salua l'arrivée de la géométrie des schémas de Grothendieck avec un *review* très intéressant [L11] et suivit avec passion les développements de la théorie d'Arakelov (Szpiro, Faltings ... et Gillet-Soulé) écrivant même un ouvrage de référence sur les bases du sujet [L23]. Parmi les buts multiples poursuivis par Serge Lang, j'ai insisté sur celui qui consiste à établir un dictionnaire entre les propriétés arithmétiques (l'ensemble $V(k)$) et géométriques (la variété algébrique $V(\mathbf{C})$) et analytiques (la variété complexe analytique ou différentielle $V(\mathbf{C})$). Ce croisement d'idées venues de l'approximation rationnelle, de l'analyse complexe, de la géométrie différentielle analytique s'est déjà montré très fécond, renouvelant même les problématiques de tous ces domaines. L'avenir dira si le dictionnaire proposé par Serge Lang devra être rectifié ou modifié; il a d'ores et déjà éclairé le chemin à suivre.

Je conclus avec une autre citation de Serge Lang extraite de l'ouvrage [L25] (page 206) qui se réfère en fait à des travaux et conjectures de Vojta (utilisant la géométrie d'Arakelov et s'inspirant d'analogies avec la théorie de Nevanlinna), mais décrit assez bien la conception du Graal mathématique selon Serge Lang. Sa grande ombre sur ces mathématiques va nous manquer.

« *Thus we behold the grand unification of algebraic geometry, analysis and PDE, Diophantine approximation, Nevanlinna theory and classical Diophantine problems about rational and integral points.* »

4. Références.

4.1. Références citées de Serge Lang

- [L1] *Some applications of the local uniformization theorem.* Amer. J. Math. 76, 1954, 362-374.
- [LW2] (avec A. Weil) *Number of points of varieties in finite fields.* Amer. J. Math. 76, 1954, 819-827.
- [L3] *Algebraic groups over finite fields.* Amer. J. Math. 78, 1956, 555-563.
- [L4] *Unramified class field theory over function fields in several variables.* Annals of Math. 64, 1956, 39-330.
- [L5] *On the Lefschetz principle.* Annals of Math. 64, 1956, 326-327.
- [LT6] (avec J. Tate) *Principal homogeneous spaces over abelian varieties.* Amer. J. Math. LXXX, 1958, 659-684.
- [LN7] (avec A. Néron) *Rational points of abelian varieties over function fields.* Amer. J. Math. 81, 1959, 95-118.
- [L8] *Abelian varieties.* Interscience, New York 1959, réédité par Springer-Verlag, 1983.
- [L9] *Integral points on curves.* Pub. Math. IHES, 1960, 319-335.
- [L10] *Some theorems and conjectures in diophantine equations,* Bull. Amer. Math. Soc. 66, 1960, 240-249.
- [L11] *Review of Eléments de géométrie algébrique (par Grothendieck et Dieudonné).* Bull. Amer. Math. Soc. 67, 1961, 239-246.

- [L12] *Diophantine geometry*. Wiley, Interscience, 1962. Une ré-édition fortement augmentée *Fundamentals of Diophantine Geometry*, a été publié par Springer en 1983.
- [L13] *Diophantine approximations on toruses*. Amer. J. Math. 86, 1964, 521–533.
- [L14] *Division points on curves*. Ann. Mat. Pura Appl. LXX, 1965, 229–234.
- [L15] *Higher dimensional diophantine problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 80, 1974, 770–787.
- [L16] *Division points of elliptic curves and abelian functions over number fields*. Amer. J. Math. 97, 1975, 124–132.
- [L17] *Elliptic curves : Diophantine analysis*. Springer-Verlag 1978.
- [L18] *Conjectured diophantine estimates on elliptic curves*. In *Arithmetic geometry*, dédié à Shafarevic, Birkhäuser, 1983, 155–171.
- [L19] *Variétés hyperboliques et analyse diophantienne*. Séminaire de théorie des nombres de Paris 1984–85, Birkhäuser PM 63, 1986, 177–184.
- [L20] *Hyperbolic and diophantine analysis*. Bull. Amer. Math. Soc. 14, 1986, 159–205.
- [L21] *Diophantine problems in complex hyperbolic analysis*. Contemporary Math. 67, 1987, 229–246.
- [L22] *Introduction to complex hyperbolic spaces*. Springer-Verlag 1987.
- [L23] *Introduction to Arakelov theory*. Springer-Verlag 1988.
- [L24] *Old and new conjectures in diophantine inequalities*. Bull. Amer. Math. Soc. 23, 1990, 37–75.
- [L25] *Number Theory III. Diophantine Geometry*. Volume 60 (Teoriya Chisel 3) de l'encyclopédie russe. Springer-Verlag, 1991. [réédité sous le titre *Survey of Diophantine Geometry*, 1997].
- [L26] *Mordell's review, Siegel's letter to Mordell, diophantine geometry, and 20th century mathematics*. Gazette Math., S.M.F. 63, 17–36 (1995).
- [L27] *La conjecture de Bateman-Horn*. Gazette Math., S.M.F. 67, 82–84 (1996).
(Hormis les livres [L8], [L12], [L17], [L22], [L23] et [L25], tous ces textes figurent dans les *Collected Papers* de Serge Lang publiés par Springer).

4.2. Autres références.

- [B-G] E. Bombieri, W. Gubler. *Heights in Diophantine Geometry*. Cambridge University Press, 2006.
- [Bu] A. Buium. *Intersections in jet spaces and a conjecture of S. Lang*. Annals of Math. 136, 1992, 557–567.
- [C-H-M] L. Caporaso, J. Harris, B. Mazur. *Uniformity of rational points*. J. Am. Math. Soc. 10, 1997, 1–35.
- [C-S] S. Cutkosky ; V. Srinivas. *On a problem of Zariski on dimensions of linear systems*. Annals of Math. 137, 1993, 531–559.
- [Da] S. David. *Autour d'une conjecture de S. Lang*. In *Approximations diophantiniennes et nombres transcendants* (Luminy, 1990), 65–98, de Gruyter, Berlin, 1992.
- [Fa1] G. Faltings. *Endlichkeitssätze für abelschen Varietäten Über Zahlkörpern*. Inventiones math. 73, 1983, 9–27.
- [Fa2] G. Faltings. *Diophantine approximations on abelian varieties*. Annals of Math. 133, 1991), 549–576.
- [H] M. Hindry. *Autour d'une conjecture de Serge Lang*. Inventiones Math. 94, 1988, 575–603.
- [H-S1] M. Hindry, J. Silverman. *The canonical height and integral points on elliptic curves*. Inventiones Math. 93, 1988, 419–450.
- [H-S2] M. Hindry, J. Silverman. *Diophantine Geometry. An introduction*. GTM 201, Springer, 2000.

- [HR] E. Hrushovski. *The Mordell-Lang conjecture for function fields*. J. Am. Math. Soc. 9, 1996, 667–690.
- [Ma] Y. Manin. *A proof of the analog of the Mordell conjecture for algebraic curves over function fields* (en russe) Dokl. Akad. Nauk SSSR 152, 1963, 1061–1063; (traduction anglaise) Sov. Math., Dokl. 4, 1963, 1505–1507.
- [McQ] M. McQuillan. *Division points on semi-abelian varieties*. Inventiones Math. 120, 1995, 143–159.
- [Mo] S. Mori. *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective*. Annals of Math. 116, 1982, 133–176.
- [P-R] R. Pink, D. Roessler. *On Hrushovski's proof of the Manin-Mumford conjecture*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Beijing), Vol. I, Higher Ed. Press, 2002, 539–546.
- [Ra] M. Raynaud. *Around the Mordell conjecture for function fields and a conjecture of Serge Lang*. In Algebraic geometry, Springer LN 1016, 1983, 1–19.
- [Ré] G. Rémond. *Décompte dans une conjecture de Lang*. Inventiones Math. 142, 2000, 513–545.
- [Sch1] W. Schmidt. *Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals*. Acta Math. 125, 1970, 189–201.
- [Sch2] W. Schmidt. *The subspace theorem in diophantine approximations*. Compos. Math. 69, 1989, 121–173.
- [Se1] J.-P. Serre. *Groupe algébriques et corps de classes*. Herman, 1959.
- [Se2] J.-P. Serre. *Lectures on the Mordell-Weil theorem*. Vieweg, 1989.
- [Ul] E. Ullmo. *Points rationnels des variétés de Shimura*. Int. Math. Res. Not. 76, 2004, 4109–4125.
- [Vo1] P. Vojta. *Diophantine approximations and value distribution theory*. Springer LN 1239, 1987.
- [Vo2] P. Vojta. *Siegel's theorem in the compact case*. Annals of Math. 133, 1991, 509–548.
- [Vo3] P. Vojta. *Integral points on subvarieties of semiabelian varieties I*. Inventiones Math. 126, 1996, 133–181.

Serge Lang

David E. Rohrlich¹

Serge Lang was a man of exceptional generosity. If you happened to be taking one of his afternoon courses then after almost every class you were treated to a snack at a local café, where your mathematical education continued in a more informal setting. If you were one of Serge's research students then he would shower you with complimentary copies of his books and do everything in his power to advance your career. If you were not one of his students but simply a young mathematician whose research had excited his interest then he would likewise champion your efforts and do what he could to help you. On occasion Serge's generosity appears to have taken the form of direct financial assistance to impecunious members of the mathematical community. These subventions were discreet and their scope is unknown to me.

Serge was also a man of intense interests and strong convictions, and his occasionally unconventional reactions to conventional situations were in part an uncensored expression of his intensity. When I went to his office one day to request a thesis problem, his immediate response was something like this: "Well, of course there are always hopeless problems, for example – [a problem is mentioned in a flash of lightning] – I don't recommend that you work on that." I suspect that the problem in question was something that he had been thinking about very hard, and apparently he felt that he had not gained any insight that could be passed on to a graduate student. But such was the hold of the problem on his imagination that he could not help alluding to it anyway. Uttered by anybody else, his words to me might have sounded discouraging, but coming from Serge their effect was if anything inspiring. I did not leave his office with a thesis problem that day, but perhaps I left in greater awe of mathematics itself.

The problem, by the way, was not something that I grasped at the time, but in retrospect it amounted to this: which smooth projective curves defined over \mathbb{Q} arise as quotients of the upper half-plane by arithmetic subgroups of $SL(2, \mathbb{Q})$? The conversation occurred around 1974, and five years later Belyi published his remarkable discovery: they all do. The episode illustrates Lang's knack for asking prescient questions, but it also represents an atypical failure to make the appropriate conjecture. More emblematic of Lang's career are the many conjectures – in particular those pertaining to diophantine properties of varieties over number fields – which stimulated research and received at least partial validation in his lifetime. For example there is the conjectured lower bound for heights of nontorsion points on elliptic curves (proved for elliptic curves with integral j -invariant by Silverman in 1981, and reduced to Szpiro's conjecture by Silverman and Hindry in 1988), or the conjecture that if a subvariety of an abelian variety contains infinitely many rational points then it contains a translate of an abelian subvariety of dimension > 0 (proved by Faltings in 1990), or the conjecture that the set of rational points on a variety of general type is not Zariski-dense (explored from a geometric as well as an arithmetic standpoint

¹ Université de Boston

in work of Caporaso-Harris-Mazur, Abramovich, Pacelli, Abramovich-Voloch, Hassett, and others). As Lang was well aware, this last conjecture has a striking application to \mathcal{M}_g , the moduli space of curves of genus g : since \mathcal{M}_g is of general type for large g (Harris-Mumford), it would follow that certain algebraic identities are forced on a curve of genus g simply by virtue of its being defined over a given number field.

The conjectures just mentioned pertain to refinements of Siegel's theorem on the finiteness of integral points on curves of genus ≥ 1 and generalizations of Mordell's conjecture (now Faltings's theorem) on the finiteness of rational points on curves of genus ≥ 2 . But as dear as such matters were to Lang's heart, and as prominently as they must figure in an appraisal of his legacy, the fact remains that many of Lang's best-known results and conjectures lie outside the domain of diophantine geometry. Consider for instance the theorem on the triviality of principal homogeneous spaces over finite fields, or the formulas for orders of cuspidal divisor class groups on modular curves (joint work with Kubert), or the conjectures on Frobenius distributions in $GL(2)$ extensions (joint work with Trotter). There are also substantial portions of Lang's work, such as the forays into Nevanlinna theory or into complex hyperbolic geometry, which lie outside of number theory altogether, even if the motivation is number-theoretic. In any case, however broad his interests as a research mathematician, Lang's interests as a mathematical educator were broader: his graduate and undergraduate textbooks and his talks for high school students and the general public span much of mathematics, making him a "one-man Bourbaki," in the words of a German reviewer of one of his books. There are not many figures in mathematics to whom this epithet could be applied.

I last saw Serge on May 2, 2005, when he gave a talk in the algebra seminar at Boston University. He was his usual lively self, excited not only about his lecture topic ("The error term in the abc conjecture and diophantine approximation") but also about what he saw as an impending reorientation of algebraic geometry toward closer connections with analysis and toward a reduction of general theories to fundamental special cases. In part the issue that concerned him seemed to be pedagogical, for he stressed the need to rewrite the textbooks in the field, adding in the same breath that he could not be the one to do it. But he had more than pedagogy in mind, and given his prescience I do not doubt that he was on to something, even if he was unable to formulate it precisely. Perhaps subsequent developments in mathematics will confirm the soundness of his instincts. Be that as it may, his seminar talk was well received, and as so often in the past, the name Serge Lang had drawn a good crowd. After the seminar dinner we adjourned to my house for coffee and ice cream, but I don't recall that Serge had either: It seemed that he was standing by the piano the whole evening, engaged in animated conversation with one person after another, or with several at once.

There is a lot more to say about Serge, but at some point the reminiscences of those who knew him may be less evocative than the lyrics of a songwriter who didn't. Serge loved a variety of genres of music, and at Yale he even performed as the lutenist in a recital of Elizabethan songs. Here the final word will be left not to John Dowland but rather to another of Serge's favorites, the folksinger Phil Ochs, whose death in 1976 affected him deeply. If you never knew Serge, then listen to the song *When I'm gone*. It captures some of his spirit.

Les contributions de Serge Lang à la théorie des nombres transcendants ¹

Michel Waldschmidt²

Présenter l'ensemble des travaux de Serge Lang, même sans parler de ses fameuses controverses, nécessiterait plusieurs auteurs pour couvrir tous les domaines concernés. Dans cette présentation je vais limiter mon propos à un aspect bien particulier de son œuvre, qui est la partie concernant la théorie des nombres transcendants. Ses premières contributions remontent au début des années 1960. Depuis près d'un demi siècle le sujet a connu un développement incontestable; S. Lang n'est certainement pas le seul à l'origine de ce renouveau du sujet, mais il y a joué un rôle de premier plan de diverses manières, comme nous allons le voir.

1. Présentation des travaux de Serge Lang

Quand S. Lang a commencé à s'intéresser à la théorie des nombres transcendants, dans les années 1960, ce sujet n'était pas encore à la mode. Il ne le deviendra que quelques années plus tard, à la suite des travaux de S. Lang certainement, mais aussi de ceux d'autres mathématiciens comme A. Baker. En dehors d'un petit nombre de spécialistes, peu de gens s'intéressaient à ces questions souvent jugées marginales et abominablement techniques. Les idées sous-jacentes n'étaient pas dégagées, les preuves restaient entourées d'un voile mystérieux : pourquoi arrivait-on à démontrer certains énoncés et pas d'autres ?

Armé d'une formidable intuition et d'un sens aigu de la clarté, S. Lang intervient alors et explique de façon limpide la stratégie des démonstrations. Il les simplifie (parfois excessivement), il simplifie aussi les énoncés, en même temps il introduit dans le sujet la théorie des groupes algébriques commutatifs. Il y avait déjà, bien sûr, des résultats sur les courbes elliptiques, et même sur les variétés abéliennes (dus à C.L. Siegel [51] et Th. Schneider [43, 44, 45] notamment), mais c'est vraiment S. Lang qui a permis le développement de la transcendance sur les groupes algébriques, qui jouent maintenant un rôle tellement important.

La source de ce travail, comme le précise S. Lang dans [14], est une conjecture de P. Cartier. S. Lang m'a raconté qu'au début des années 1960, lors d'une rencontre des membres de Bourbaki à laquelle il avait été invité (il n'en restera pas longtemps membre), P. Cartier lui avait posé deux questions. La première portait sur le théorème de Hermite-Lindemann qui concerne l'exponentielle usuelle e^z , ou si on préfère — et P. Cartier préfère — l'application exponentielle du groupe multiplicatif. Ce théorème affirme que 0 est le seul point algébrique en lequel la fonction

¹ Cette rédaction est celle d'un exposé de colloquium donné à l'Université de Caen le 15 novembre 2005. L'auteur remercie ses collègues caennais, et particulièrement Francesco Amoroso, pour leur invitation et leur accueil.

² Université P. et M. Curie (Paris VI), Institut de Mathématiques de Jussieu

exponentielle prenne une valeur algébrique. Est-il possible de l'étendre à l'application exponentielle d'une variété en groupe ? C'est cette question que S. Lang résout (théorème 1, voir [14]), ouvrant ainsi la voie à des développements qui ne sont pas encore épuisés. L'autre question de P. Cartier à S. Lang est un mystère : S. Lang m'en a parlé en me disant qu'elle concernait le théorème de C.L. Siegel [50, 52] sur la transcendance des valeurs de fonctions de Bessel (théorème 2), mais qu'il ne se souvenait plus de la suggestion que faisait P. Cartier pour le généraliser - qu'il ait oublié était exceptionnel chez Lang, il avait une mémoire impressionnante. Malheureusement P. Cartier ne s'en souvient plus non plus !

Un exemple spectaculaire de simplification apportée par S. Lang à la théorie des nombres transcendants est le théorème appelé *critère de Schneider-Lang* (théorème 3). Le premier énoncé dans cette direction [46] a été publié par Th. Schneider en 1949. Il porte sur les valeurs algébriques de fonctions algébriquement indépendantes : sous des hypothèses techniques convenables, ces valeurs algébriques ne peuvent pas être trop nombreuses. L'énoncé de Schneider est puissant, il contient un grand nombre de résultats antérieurs. Son principal défaut est la complication de l'énoncé : il prend une page complète des *Mathematische Annalen* [46]. Un énoncé légèrement simplifié de ce résultat est donné par Th. Schneider dans son livre [47], mais ce deuxième énoncé reste encore assez technique.

S. Lang a trouvé des hypothèses élégantes qui donnent un énoncé simple, profond, qui a de multiples corollaires. Il l'a d'ailleurs publié non seulement dans un de ses premiers articles [16] et dans son livre [19] sur les nombres transcendants (Chap. III, § 1), mais aussi en appendice de son livre *Algebra* [35].

Un des corollaires que l'on peut déduire de l'énoncé initial de Th. Schneider en 1949 est le *théorème des six exponentielles* (théorème 4 ; voir [20]). La simplification qu'a apportée S. Lang a un coût : le critère de Schneider-Lang ne contient pas le théorème des six exponentielles. C'est un petit paradoxe, étant donné que Th. Schneider n'a pas formulé explicitement le théorème des six exponentielles ; qu'il en ait connu l'existence est plausible, car le premier des 8 problèmes qu'il pose dans son livre [47] sur les nombres transcendants (conjecture 6) est équivalent à la conjecture des quatre exponentielles (conjecture 5). Le théorème des six exponentielles était aussi apparemment connu de C.L. Siegel : il en a communiqué un cas particulier à L. Alaoglu et P. Erdős [2] qui auraient eu besoin de la conjecture des quatre exponentielles pour préciser un argument de S. Ramanujan. A. Selberg m'a dit qu'il avait cherché à résoudre le problème des quatre exponentielles dans les années 1940, qu'il savait alors démontrer le théorème des six exponentielles, mais qu'il estimait que cela ne méritait pas d'être publié. S. Lang a été le premier à publier l'énoncé et la démonstration de ce théorème, suivi peu après par K. Ramachandra [42] (notons que K. Ramachandra remercie C.L. Siegel dans son article). Aussi bien S. Lang que K. Ramachandra ont formulé la conjecture des quatre exponentielles, qui reste un des défis majeurs de la théorie.

La démonstration par S. Lang ([19], Chap. II, § 1 et [20]) du théorème des six exponentielles reste une des plus simples de la théorie des nombres transcendants. Elle permet d'expliquer clairement la stratégie, de voir quels sont les arguments qui permettent d'aboutir à la conclusion. Cette simplicité peut expliquer, au moins

en partie, que les personnes qui connaissaient le résultat avant S. Lang et K. Ramachandra n'aient pas daigné publié leur preuve – ils n'avaient sans doute pas anticipé les développements ultérieurs, dont les plus récents se trouvent dans les travaux de D. Roy [54].

Une version ultramétrique du théorème des six exponentielles a été établie par J-P. Serre (avec une extension en plusieurs variables), qui l'applique à une question de représentation ℓ -adique de courbes elliptiques [48, 49].

Le critère de Schneider-Lang ne contient pas le théorème des six exponentielles, mais une variante, ne faisant pas intervenir d'équations différentielles, le contient. Cela a fait l'objet aussi bien de travaux de S. Lang [18] que de K. Ramachandra [42].

Il existe une version du critère de Schneider-Lang en plusieurs variables, énoncée encore une fois par S. Lang [16], reposant sur la démonstration par Th. Schneider en 1948 de la transcendance des valeurs de la fonction Beta aux points rationnels [45]. Ce critère de Schneider-Lang en plusieurs variables concerne les produits cartésiens (théorème 7 ; voir [16] et [19] Chap. IV). S. Lang dit dans [19] (Chap. IV, historical note) que M. Nagata a suggéré un énoncé plus fort faisant intervenir des hypersurfaces algébriques. Formuler une telle conjecture aurait été difficilement envisageable avec l'énoncé antérieur de Th. Schneider. Cette conjecture de Nagata a été résolue par E. Bombieri en 1970 (théorème 8). La démonstration de E. Bombieri [5] utilise la méthode des estimations L^2 de Hörmander. Elle utilise aussi une extension en plusieurs variables du lemme de Schwarz, obtenue dans un travail en commun antérieur de E. Bombieri et S. Lang [6], où la masse moyenne des zéros de Lelong est l'outil essentiel.

Un second paradoxe est que le théorème de E. Bombieri ne contient pas, dans l'état actuel des connaissances des spécialistes, de résultat concret de transcendance nouveau par rapport au critère sur les produits cartésiens, alors que les outils intervenant dans sa démonstration sont pourtant beaucoup plus sophistiqués. Une des conséquences inattendues du critère en plusieurs variables a été trouvée en 1980 par D. Bertrand et D.W. Masser [4] : ils ont montré que ce critère avec les produits cartésiens contient le théorème de Baker (théorème 9) sur l'indépendance linéaire de logarithmes de nombres algébriques, puis ont étendu ce théorème de Baker aux logarithmes elliptiques (théorème 10). Seul le cas d'une courbe elliptique à multiplication complexe avait été obtenu par D.W. Masser [37], grâce à une extension de la méthode de Baker. La généralisation du théorème de Baker aux groupes algébriques (théorème 11), après avoir fait l'objet de nombreux travaux, notamment par D.W. Masser, a finalement été obtenue par G. Wüstholz [55]. Notons que D.W. Masser d'une part [38, 39, 40], S. Lang [23], J. Coates et S. Lang [8] d'autre part, ont contribué au développement de la théorie dans le cas particulier des variétés abéliennes de type CM.

Une autre conjecture, qui est née dans les mêmes conditions que celle de Nagata, mais qui en revanche n'est toujours pas résolue, est celle de Schanuel (conjecture 12). M. Nagata comme S. Schanuel assistaient au cours que donnait à Yale S. Lang sur les nombres transcendants, c'est alors qu'ils ont formulé ces suggestions. Ont-ils deviné l'importance de la contribution qu'ils apportaient à la théorie en proposant ces énoncés ? En tout cas ils ne les ont pas publiés eux-même, laissant à S. Lang le soin de le faire [19], et de donner à ce que devrait être la théorie

un éclairage nouveau. La conjecture de Schanuel contient la conjecture selon laquelle *des logarithmes de nombres algébriques linéairement indépendants sur \mathbb{Q} sont algébriquement indépendants*. Les conjectures de Y. André [3] vont plus loin : elles contiennent aussi la conjecture de Grothendieck ([19] Chap. IV, historical note).

J'ai affirmé que les simplifications apportées par S. Lang étaient parfois excessives. En voici un exemple (voir en haut de la page 49 du livre de S. Lang [19] sur les nombres transcendants). On définit la hauteur (*usuelle* ou *naïve*) $H(P)$ d'un polynôme à coefficients entiers $P \in \mathbb{Z}[X]$ comme étant le maximum des valeurs absolues de ses coefficients. Il est tentant de dire qu'une fraction rationnelle $R \in \mathbb{Q}(X)$ a une hauteur $\leq H$ si on peut écrire R comme quotient $R = P/Q$ de deux polynômes P et Q dans $\mathbb{Z}[X]$ qui sont tous deux de hauteur $\leq H$. Mais une telle définition n'est pas licite : le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est de hauteur 2, pourtant il est quotient de deux polynômes de hauteur 1 :

$$(X - 1)^2 = \frac{X^3 - X^2 - X + 1}{X + 1}.$$

De nos jours on utilise plutôt la *mesure de Mahler* que la hauteur usuelle (voir par exemple [10]), ce qui permet d'éviter cet écueil.

S. Lang utilise le même type de considérations pour définir l'ordre d'une fonction méromorphe : il a le droit de le faire dans ce cas, car si une fonction entière f peut s'écrire comme quotient de deux fonctions entières d'ordre $\leq \rho$, alors f elle-même est d'ordre $\leq \rho$.

L'intuition de S. Lang était spécialement bonne. Parmi les nombreuses conjectures qu'il a émises il faut bien chercher pour en trouver qui se soient révélées fausses. Voici un exemple, concernant des questions d'indépendance algébrique, où son optimisme a été excessif. Un critère de Gel'fond (théorème 13) affirme qu'il n'y a pas de suite de polynômes en une variable à coefficients entiers, qui, en un point donné $\theta \in \mathbb{C}$, prennent des valeurs suffisamment petites. Cela permet d'établir des énoncés d'indépendance algébrique de deux nombres (souvent parmi une collection de nombres). Par exemple A.O. Gel'fond a utilisé cet argument pour montrer que si α est un nombre algébrique différent de 0 et 1 et si β est un nombre algébrique de degré $d \geq 3$, alors parmi les nombres

$$\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2}, \dots, \alpha^{\beta^{d-1}},$$

il y en a au moins 2 qui sont algébriquement indépendants. C'est un des exemples de théorèmes portant le qualificatif *petit degré de transcendance*. Pour obtenir de *grands degrés de transcendance*, il suffirait d'étendre le critère de Gel'fond en plusieurs variables. S. Lang a proposé un énoncé dans cette direction. Mais, comme le lui a fait remarquer E. Bombieri [21], un exemple trouvé antérieurement par A.Ya. Khintchine [12] et cité dans le livre de J.W.S. Cassels [7] - cf. théorème 14) montre qu'en dimension supérieure il faut introduire une hypothèse supplémentaire. Après les travaux de W.D. Brownawell et G.V. Čudnovs'kiï, la question a été résolue par P. Philippon [41] (voir le théorème 15) ; il convient de citer aussi les contributions de Yu.V. Nesterenko et G. Diaz notamment (voir par exemple [10]).

S. Lang se plaisait à imaginer quelle devait être la théorie, sans se limiter, ni aux résultats connus, ni aux méthodes existantes, même si publier des résultats

numériques ne le rebutait pas [1, 36]. En théorie des approximations diophantiennes comme en transcendance, il y a un gouffre entre ce qui est connu et ce qui est attendu. Partir de l'état de ses connaissances et des méthodes disponibles pour essayer d'anticiper n'est pas forcément ce qui éclaire le mieux le sujet. S. Lang a su s'affranchir de ces limitations, ce qui lui a permis de prédire avec assurance ce que devrait être la situation. C'est spécialement évident en géométrie diophantienne : nous ne traitons pas cet aspect de son œuvre (nous renvoyons au texte de Marc Hindry dans ce numéro de La Gazette), malgré ses liens étroits avec les questions d'approximation diophantienne (il n'y a pas vraiment de frontière entre les deux sujets). Prenons l'exemple de sa conjecture sur les mesures d'indépendance linéaire des logarithmes de points algébriques sur une courbe elliptique. Elle a fait l'objet de travaux de N. Hirata, puis M. Ably, avant d'être complètement résolue (même dans le cadre des groupes algébriques) par S. David et N. Hirata d'une part [9], É. Gaudron [11] d'autre part (théorème 19). Cette question était initialement motivée par un algorithme original de S. Lang [15] pour trouver les points entiers sur une courbe elliptique.

L'analogie entre les corps de fonctions et les corps de nombres est l'une de celles qui l'ont guidé. Une autre est l'analogie entre la théorie de Nevanlinna et les fonctions complexes d'une part, la théorie des nombres d'autre part (P. Vojta a beaucoup contribué à développer ce point de vue, et l'influence qu'a eue S. Lang sur ses travaux est indéniable).

S. Lang a contribué à de nombreuses conjectures : celle de Bateman-Horn [30] sur les nombres premiers et les polynômes en plusieurs variables, celle de Rohrlich [26] (voir aussi [24] p. 66) sur les relations entre les valeurs de la fonction Γ d'Euler, celle de Grothendieck [3]. . .

Les conjectures de l'introduction des chapitres X et XI de [25] ont été formulées avant la conjecture *abc* ; les versions raffinées des conjectures de Pillai et Hall (conjectures 16 et 17) qu'elles impliquent peuvent aussi être déduites de la conjecture *abc* (conjecture 18, voir [29] Chap. II § 1), ce qui est un indice de la cohérence de la présentation qu'il suggère.

S. Lang a écrit plusieurs articles de synthèse, le premier dès 1960 [13], puis en 1965 [17], en 1971 [21], en 1974 [22], en 1983 [27], en 1990 [28]. On peut ajouter à cette liste le volume Number Theory III [29] qu'il a écrit en 1992 pour l'encyclopédie des sciences mathématiques de Springer-Verlag.

Ces textes étaient l'occasion pour lui de proposer des conjectures qui fournissaient un éclairage original du sujet. S. Lang est probablement un des mathématiciens qui a le mieux su deviner ce que devrait être la théorie — les pistes qu'il a proposées ouvrent des perspectives qui ne sont pas prêtes d'être épuisées.

2. Théorèmes et conjectures

Dans cette section nous énonçons, en donnant des références, les théorèmes et conjectures auxquels il a été fait allusion dans la première partie.

Voici pour commencer la généralisation par S. Lang du théorème de Hermite-Lindemann aux groupes algébriques [14], [19] Chap. III, § 4, Th. 2.

Théorème 1 (Lang). *Soit G un groupe algébrique commutatif connexe défini sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques. Notons $T_G(\mathbb{C})$ l'algèbre de Lie à l'origine du*

groupe de Lie $G(\mathbb{C})$ (T_G est aussi l'espace tangent de G à l'origine), muni de sa \mathbb{Q} -structure $T_G(\mathbb{Q})$ et $\exp_G : T_G(\mathbb{C}) \rightarrow G(\mathbb{C})$ l'application exponentielle de $G(\mathbb{C})$. Soit $\alpha \in T_G(\mathbb{Q})$ tel que $\exp(\alpha)$ soit dans $G(\mathbb{Q})$. Alors l'application $t \rightarrow G(t\alpha)$ de \mathbb{C} dans $G(\mathbb{C})$ est algébrique.

Le théorème suivant, dû à C.L. Siegel [50, 52] concerne les valeurs des fonctions

$$K_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

qui sont reliées aux fonctions de Bessel par

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda K_\lambda(x).$$

Théorème 2 (Siegel). *Soit α un nombre algébrique non nul. Soit λ un nombre rationnel différent de $\pm 1/2, -1, \pm 3/2, -2, \dots$. Alors les deux nombres $K_\lambda(\alpha)$ et $K'_\lambda(\alpha)$ sont algébriquement indépendants.*

Voici un énoncé légèrement simplifié du critère de Schneider-Lang [19] Chap. III, § 2, [35] appendix.

Théorème 3 (Critère de Schneider-Lang). *Soient f_1, \dots, f_m des fonctions méromorphes dans \mathbb{C} . On suppose que f_1 et f_2 sont algébriquement indépendantes et d'ordre fini. Soit K un corps de nombres. On suppose que chacune des dérivées $(d/dz)f_i$ ($1 \leq i \leq m$) appartient à l'algèbre $K[f_1, \dots, f_m]$. Alors l'ensemble S des éléments w de \mathbb{C} où chacune des fonctions f_i est définie et prend une valeur $f_i(w)$ dans K est fini.*

Le critère de Schneider-Lang ne contient pas le théorème des six exponentielles [20, 42], mais il existe des variantes du théorème 3 (voir notamment [18, 42]) qui n'imposent pas que les fonctions considérées satisfassent des équation différentielles à coefficients algébriques.

Théorème 4 (Théorème des six exponentielles). *Soient x_1, x_2 deux nombres complexes linéairement indépendants sur \mathbb{Q} et soient y_1, y_2, y_3 trois nombres complexes linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . Alors l'un au moins des six nombres*

$$e^{x_1 y_1}, e^{x_1 y_2}, e^{x_1 y_3}, e^{x_2 y_1}, e^{x_2 y_2}, e^{x_2 y_3}$$

est transcendant.

La conjecture des quatre exponentielles a été proposée par S. Lang [19], Chap. II, § 1, [20], puis K. Ramachandra [42].

Conjecture 5 (Conjecture des quatre exponentielles). *Soient x_1, x_2 deux nombres complexes linéairement indépendants sur \mathbb{Q} et soient y_1, y_2 deux nombres complexes linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . Alors l'un au moins des quatre nombres*

$$e^{x_1 y_1}, e^{x_1 y_2}, e^{x_2 y_1}, e^{x_2 y_2}$$

est transcendant.

Le premier des 8 problèmes du livre de Th. Schneider sur les nombres transcendants [47] est équivalent à la conjecture 5.

Conjecture 6 (Premier problème de Schneider). *On considère quatre logarithmes de nombres algébriques $\log \alpha_1, \log \alpha_2, \log \beta_1, \log \beta_2$. On suppose d'une part que $\log \alpha_1$ et $\log \alpha_2$ sont \mathbb{Q} -linéairement indépendants et d'autre part que $\log \alpha_1$ et $\log \beta_1$ sont aussi \mathbb{Q} -linéairement indépendants. Alors*

$$(\log \alpha_1)(\log \beta_2) \neq (\log \alpha_2)(\log \beta_1).$$

Le critère de Schneider-Lang a été étendu en plusieurs variables par S. Lang [16], [19], Chap. IV, grâce à un développement des arguments que Th. Schneider [45] avaient utilisés pour démontrer la transcendance de $B(a, b)$ quand a et b sont deux nombres rationnels.

Théorème 7 (Critère de Schneider-Lang pour les produits cartésiens). *Soient f_1, \dots, f_m des fonctions méromorphes dans \mathbb{C}^n et K un corps de nombres. On suppose que les $n + 1$ fonctions f_1, \dots, f_{n+1} sont algébriquement indépendantes d'ordre fini et que chacune des dérivées partielles $(\partial/\partial z_j)f_i$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) appartient à l'algèbre $K[f_1, \dots, f_m]$. Soit e_1, \dots, e_n une base de \mathbb{C}^n . Alors l'ensemble S des éléments w de \mathbb{C} où chacune des fonctions f_i est définie et prend une valeur $f_i(w)$ dans K ne contient pas de produit cartésien*

$$\{s_1 e_1 + \dots + s_n e_n; (s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n\},$$

où chaque S_i est infini.

La conjecture de Nagata [19], Chap. IV, historical note, a été résolue par E. Bombieri [5].

Théorème 8 (Bombieri). *Soient f_1, \dots, f_m des fonctions méromorphes dans \mathbb{C}^n et K un corps de nombres. On suppose que f_1, \dots, f_{n+1} sont algébriquement indépendantes d'ordre fini et que chacune des dérivées partielles $(\partial/\partial z_j)f_i$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) appartient à l'algèbre $K[f_1, \dots, f_m]$. Alors l'ensemble S des éléments w de \mathbb{C} où chacune des fonctions f_i est définie et prend une valeur $f_i(w)$ dans K est contenu dans une hypersurface algébrique.*

Une des sources importantes du renouveau de la théorie des nombres transcendants à partir des années 1970 est le développement de la méthode de Baker (voir par exemple [10]).

Théorème 9 (Baker). *Soient $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n$ des logarithmes \mathbb{Q} -linéairement indépendants de nombres algébriques. Alors les nombres $1, \log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$ -linéairement indépendants.*

Le théorème de Baker a été déduit du critère de Schneider-Lang pour les produits cartésiens (théorème 7) par D. Bertrand et D.W. Masser [4], qui obtiennent par le même argument l'analogie elliptique.

Théorème 10 (Bertrand-Masser). *Soit E une courbe elliptique définie sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques, soient u_1, \dots, u_n des éléments de $T_E(\overline{\mathbb{Q}})$, linéairement indépendants sur le corps des endomorphismes de E . On suppose que $\exp_E(u_1), \dots, \exp_E(u_n)$ sont des points algébriques de E . Alors $1, u_1, \dots, u_n$ sont linéairement indépendants sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$.*

L'extension du théorème de Baker aux groupes algébriques a fait l'objet de nombreux travaux, qui ont abouti au résultat suivant :

Théorème 11 (Wüstholz). Soit G un groupe algébrique commutatif défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, u_1, \dots, u_r des éléments de $T_G(\mathbb{C})$ tels que $\exp_G(u_j) \in G(\overline{\mathbb{Q}})$, ($1 \leq j \leq r$), $V = \mathbb{C}u_1 + \dots + \mathbb{C}u_r$ le sous-espace de $T_G(\mathbb{C})$ qu'ils engendrent, n la dimension du plus petit sous-espace vectoriel de $T_G(\mathbb{C})$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ contenant V . Alors $\exp_G V$ est contenu dans un sous-groupe algébrique de G de dimension $\leq n$.

La conjecture de Schanuel ([19], Chap. III, historical note), contient essentiellement tous les énoncés de transcendance (et d'indépendance algébrique) que l'on peut espérer concernant les nombres liés à la fonction exponentielle.

Conjecture 12 (Conjecture de Schanuel). Si x_1, \dots, x_m sont des nombres complexes qui sont linéairement indépendants sur \mathbb{Q} , alors le degré de transcendance de

$$x_1, \dots, x_m, e^{x_1}, \dots, e^{x_m}$$

est au moins m .

L'inégalité de la taille (ou celle de Liouville) est un outil essentiel pour démontrer la transcendance de certains nombres. Quand on veut des énoncés d'indépendance algébrique de deux nombres on la remplace par le critère de Gel'fond [10]. L'énoncé simplifié que voici est dû à R. Tijdeman [53], lemma 6.

Théorème 13 (Critère de Gel'fond). Soit $\theta \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe une suite de polynômes P_N non nuls de $\mathbb{Z}[X]$, où P_N a un degré $\leq N$ et une hauteur (naïve) $\leq e^N$, tel que

$$|P_N(\theta)| \leq e^{-7N^2}.$$

Alors θ est algébrique et $P_N(\theta) = 0$ pour tout $N \geq N_0$.

L'extension [41] en dimension supérieure du critère de Gel'fond, permettant de démontrer des résultats d'indépendance algébrique de plusieurs nombres, demande de la prudence (qui a manqué à S. Lang et plus tard à G.V. Čudnovs'kiĭ), comme le montre l'exemple de A.Ya. Khintchine (voir [7, 21] ainsi que l'appendice de [41]). Noter que les nombres x_1 et x_2 , dont l'existence est affirmée par le théorème 14, sont algébriquement indépendants dès que la fonction ψ décroît suffisamment vite : cela résulte du critère 13 de Gel'fond.

Théorème 14 (Exemple de Khintchine et Cassels). Soient $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ une fonction arithmétique à valeurs positives et m un entier ≥ 2 . Il existe des nombres réels $\theta_1, \dots, \theta_m$ algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} tels que, pour tout entier positif N , il existe $m - 1$ formes linéaires en trois variables

$$L_i(X_0, X_1, X_i) = a_i X_0 + b_i X_1 + c_i X_i \in \mathbb{Z}[X_0, X_1, X_i] \quad (2 \leq i \leq m)$$

à coefficients entiers rationnels de valeurs absolues majorées par N , avec $c_i \neq 0$, telles que

$$|L_i(1, \theta_1, \theta_i)| \leq \varphi(N) \quad (2 \leq i \leq m).$$

Le critère de transcendance de Gel'fond a été étendu par P. Philippon [41] en un énoncé qui permet d'obtenir de grands degrés de transcendance. Voici un exemple de tel critère.

Théorème 15 (Critère pour l'indépendance algébrique). Soient n un entier suffisamment grand, C un nombre réel suffisamment grand, $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ un élément de \mathbb{C}^n et η un nombre réel positif. On suppose que pour tout entier N suffisamment grand, il existe un entier $m = m(N) \geq 1$ et des polynômes Q_1, \dots, Q_m dans $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ satisfaisant

$$\max_{1 \leq j \leq m} \deg Q_j \leq N, \quad \max_{1 \leq j \leq m} H(Q_j) \leq e^N$$

et

$$0 < \max_{1 \leq j \leq m} |Q_j(\theta_1, \dots, \theta_n)| \leq e^{-CN^\eta},$$

tels que l'ensemble des zéros communs des polynômes Q_1, \dots, Q_m dans la boule

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^n; \max_{1 \leq i \leq n} |z_i - \theta_i| \leq e^{-3CN^\eta} \right\}$$

est fini. Alors le degré de transcendance sur \mathbb{Q} du corps $\mathbb{Q}(\theta_1, \dots, \theta_n)$ est $> \eta - 1$.

L'énoncé conjectural de Pillai que voici signifie que la distance entre deux éléments consécutifs de la suite

$$1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 36, 49, 64, 75, 81, \dots$$

des puissances parfaites tend vers l'infini.

Conjecture 16 (Conjecture de Pillai). Soit k un entier rationnel non nul. Il n'existe qu'un nombre fini de quadruplets (x, y, p, q) formés d'entiers ≥ 2 tels que $x^p - y^q = k$.

Les conjectures de l'introduction des chapitres X et XI de [25] contiennent, entre autre, un raffinement de la conjecture de Pillai.

Conjecture 17 (Raffinement quantitatif de la conjecture de Pillai). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une constante $\kappa(\varepsilon) > 0$ telle que si (x, y, p, q) sont des entiers ≥ 2 pour lesquels $x^p \neq y^q$, alors

$$|x^p - y^q| \geq \kappa(\varepsilon) \max\{x^p, y^q\}^{1-(1/p)-(1/q)-\varepsilon}.$$

On peut aussi déduire la conjecture 17 de la conjecture *abc* de Masser-Āesterlé (voir par exemple [29] Chap. II § 1).

Conjecture 18 (Conjecture *abc* de Masser-Āesterlé). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une constante $\kappa(\varepsilon) > 0$ telle que si a, b, c sont des entiers rationnels positifs premiers entre eux satisfaisant $a + b = c$, alors le radical

$$R(abc) = \prod_{p|abc} p$$

du produit *abc* satisfait

$$c \geq \kappa(\varepsilon) R(abc)^{1-\varepsilon}.$$

Les estimations diophantiennes conjecturées par S. Lang sur les logarithmes elliptiques ont été établies par É. Gaudron [11] d'une part, S. David et N. Hirata [9] d'autre part. Leur énoncé est valable pour des logarithmes de points algébriques sur un groupe algébrique commutatif.

Théorème 19 (Gaudron, David-Hirata). Soient G un groupe algébrique défini sur un corps de nombres K et u_1, \dots, u_n des éléments de $T_G(\mathbb{C})$ tels que $\exp_G(u_j) \in G(K)$ pour $1 \leq j \leq n$. Il existe un nombre positif $C = C(G, K, u_1, \dots, u_n)$ tel que, pour tout $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in K^n$ satisfaisant

$$\beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n \neq 0,$$

on ait

$$|\beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n| \geq B^{-C},$$

avec $B = \max\{2, H(\beta_1), \dots, H(\beta_n)\}$ et $H(\beta)$ est la hauteur (naïve) du polynôme minimal de β .

3. En guise de conclusion

L'influence qu'a eue Serge Lang sur le développement de la théorie des nombres transcendants ne se limite pas à ses publications. Certes, les résultats originaux qu'il a démontrés ont certainement été parmi les plus importants du XX^e siècle dans ce domaine. Il est indéniable également que ses publications, à commencer par son livre sur les nombres transcendants en 1966, ont permis à de nombreux mathématiciens de pénétrer le sujet et de comprendre la stratégie des démonstrations. Mais ce n'est pas tout : il a également contribué d'une façon moins visible (pour ceux qui ne l'ont pas connu) par ses encouragements enthousiastes aux jeunes chercheurs. Nous sommes nombreux à en avoir bénéficié et à lui en être redevables.

4. Références

- [1] W. ADAMS & S. LANG – « Some computations in diophantine approximations », *J. reine angew. Math.* **220** (1965), p. 163–173 (= [31] p. 373–383).
- [2] L. ALAOGU & P. ERDÖS – « On highly composite and similar numbers », *Trans. Amer. Math. Soc.* **56** (1944), p. 448–469.
- [3] Y. ANDRÉ – *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 17, Société Mathématique de France, Paris, 2004.
- [4] D. BERTRAND & D. MASSER – « Linear forms in elliptic integrals », *Invent. Math.* **58** (1980), no. 3, p. 283–288.
- [5] E. BOMBIERI – « Algebraic values of meromorphic maps », *Invent. Math.* **10** (1970), p. 267–287 (Addendum, *ibid.*, **11** (1970), 163–166).
- [6] E. BOMBIERI & S. LANG – « Analytic subgroups of group varieties », *Invent. Math.* **11** (1970), p. 1–14 (= [31] p. 507–520).
- [7] J. CASSELS – *An introduction to diophantine approximation.*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. No. 45. Cambridge : At the University Press 1957, X, 166 p, 1957.
- [8] J. COATES & S. LANG – « Diophantine approximation on Abelian varieties with complex multiplication », *Invent. Math.* **34** (1976), no. 2, p. 129–133 (= [32] p. 236–240).
- [9] S. DAVID & N. HIRATA-KOHNO – « Recent progress on linear forms in elliptic logarithms », in *A panorama of number theory or the view from Baker's garden (Zürich, 1999)*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002, p. 26–37.
- [10] N. I. FEL'DMAN & Y. V. NESTERENKO – « Transcendental numbers », in *Number theory, IV*, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 44, Springer, Berlin, 1998, p. 1–345.
- [11] É. GAUDRON – « Mesure d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001), no. 12, p. 1059–1064.
- [12] A. KHINTCHINE – « Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen », *Rendiconti Palermo*, **50** (1926), p. 170–195.

- [13] S. LANG – « Some theorems and conjectures in diophantine equations », *Bull. Amer. Math. Soc.* **66** (1960), p. 240–249 (= [31] p. 273–283).
- [14] ———, « Transcendental points on group varieties », *Topology* **1** (1962), p. 313–318 (= [31] p. 299–304).
- [15] ———, « Diophantine approximations on toruses », *Amer. J. Math.* **86** (1964), p. 521–533 (= [31] p. 313–325).
- [16] ———, « Algebraic values of meromorphic functions », *Topology* **3** (1965), p. 183–191 (= [31] p. 348–356).
- [17] ———, « Report on diophantine approximations », *Bull. Soc. Math. France* **93** (1965), p. 177–192 (= [31] p. 326–341).
- [18] ———, « Algebraic values of meromorphic functions. II », *Topology* **5** (1966), p. 363–370 (= [31] p. 384–391).
- [19] ———, *Introduction to transcendental numbers*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1966 (= [31] p. 396–506).
- [20] ———, « Nombres transcendants », in *Séminaire Bourbaki*, Vol. 9, Exp. No. 305, Soc. Math. France, Paris, 1966, p. 407–414 (publié en 1995, oublié dans [31]).
- [21] ———, « Transcendental numbers and diophantine approximations », *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971), p. 635–677 (= [32] p. 1–43).
- [22] ———, « Higher dimensional diophantine problems », *Bull. Amer. Math. Soc.* **80** (1974), p. 779–787 (= [32] p. 102–110).
- [23] ———, « Diophantine approximation on abelian varieties with complex multiplication », *Advances in Math.* **17** (1975), no. 3, p. 281–336 (= [32] p. 113–168).
- [24] ———, *Cyclotomic fields*, Springer-Verlag, New York, 1978, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 59.
- [25] ———, *Elliptic curves : Diophantine analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 231, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [26] ———, « Relations de distributions et exemples classiques », in *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 19e année : 1977/78, Théorie des nombres, Fasc. 2*, Secrétariat Math., Paris, 1978, p. Exp. No. 40, 6 (= [33] p. 59–65).
- [27] ———, « Conjectured Diophantine estimates on elliptic curves », in *Arithmetic and geometry, Vol. I*, Progr. Math., vol. 35, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, p. 155–171 (= [33] p. 212–228).
- [28] ———, « Old and new conjectured Diophantine inequalities », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **23** (1990), no. 1, p. 37–75 (= [33] p. 355–393).
- [29] ———, *Number theory. III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 60, Springer-Verlag, Berlin, 1991, Diophantine geometry.
- [30] ———, « La conjecture de Bateman-Horn », *Gaz. Math.* (1996), no. 67, p. 82–84 (= [34] p. 213–216).
- [31] ———, *Collected papers. Vol. I*, Springer-Verlag, New York, 2000, 1952–1970.
- [32] ———, *Collected papers. Vol. II*, Springer-Verlag, New York, 2000, 1971–1977.
- [33] ———, *Collected papers. Vol. III*, Springer-Verlag, New York, 2000, 1978–1990.
- [34] ———, *Collected papers. Vol. IV*, Springer-Verlag, New York, 2000, 1990–1996.
- [35] ———, *Algebra*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [36] S. LANG & H. TROTTER – « Continued fractions for some algebraic numbers », *J. reine angew. Math.* **255** (1972), p. 112–134 ; addendum, *ibid.* **267** (1974), 219–220 (= [32] p. 69–92).
- [37] D. W. MASSER – *Elliptic functions and transcendence*, Springer-Verlag, Berlin, 1975, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 437.
- [38] ———, « Linear forms in algebraic points of Abelian functions. I », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **77** (1975), p. 499–513.
- [39] ———, « Linear forms in algebraic points of Abelian functions. II », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **79** (1976), no. 1, p. 55–70.
- [40] ———, « Linear forms in algebraic points of Abelian functions. III », *Proc. London Math. Soc.* **33** (1976), no. 3, p. 549–564.

- [41] P. PHILIPPON – « Critères pour l'indépendance algébrique », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1986), no. 64, p. 5–52.
- [42] K. RAMACHANDRA – « Contributions to the theory of transcendental numbers. I, II », *Acta Arith.* **14** (1967/68), 65–72; *ibid.* **14** (1967/1968), p. 73–88.
- [43] T. SCHNEIDER – « Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. II. Transzendenzeigenschaften elliptischer Funktionen », *J. reine angew. Math.* **172** (1934), p. 70–74.
- [44] ———, « Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale », *Math. Ann.* **113** (1936), p. 1–13.
- [45] ———, « Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale », *J. reine angew. Math.* **183** (1941), p. 110–128.
- [46] ———, « Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise », *Math. Ann.* **121** (1949), p. 131–140.
- [47] ———, *Introduction aux nombres transcendants*, Traduit de l'allemand par P. Eymard, Gauthier-Villars, Paris, 1959.
- [48] J-P. SERRE – « Dépendance d'exponentielles p -adiques », in *Théorie des Nombres, Sémin. Delange-Pisot-Poitou* 7(1965/66), No.15, 14 p. , IHP, 1967.
- [49] ———, *Abelian l -adic representations and elliptic curves*, Research Notes in Mathematics, vol. 7, A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1998, With the collaboration of Willem Kuyk and John Labute, Revised reprint of the 1968 original.
- [50] C. L. SIEGEL – « Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen », *Abhandlungen Akad. Berlin* Nr. 1, 70 S (1929), p. 1–70 (see *Gesammelte Abhandlungen*, Springer-Verlag, Berlin-New York 1966 Band I, 209–266).
- [51] ———, « Über die Perioden elliptischer Funktionen », *J. reine angew. Math.* **167** (1932), p. 62–69.
- [52] ———, *Transcendental Numbers*, Annals of Mathematics Studies, no. 16, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1949.
- [53] R. TIJDEMAN – « On the algebraic independence of certain numbers », *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **74=Indag. Math.** **33** (1971), p. 146–162.
- [54] M. WALDSCHMIDT – *Diophantine approximation on linear algebraic groups. transcendence properties of the exponential function in several variables*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 326, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [55] G. WÜSTHOLZ – « Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen », *Ann. of Math.* (2) **129** (1989), no. 3, p. 501–517.



© Ken Ribet

Serge Lang, Université de Berkeley, 20 septembre 2004