

# LIVRES

## Œuvres complètes de Jean Le Rond D'Alembert : premiers textes de mécanique céleste 1747 - 1749

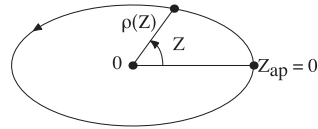
sous la direction de Michelle CHAPRONT-TOUZÉ  
CNRS Éditions, 2002. ISBN : 2-271-06013-3. 536 p. 60 €.

*Il n'est pas inutile de rappeler les travaux antérieurs quand ils émanent d'hommes de génie; plus d'une tentative récente vient se souder aux travaux antérieurs et se trouve ainsi mieux mise en valeur »* — Tisserand

Préface du troisième volume du Traité de mécanique céleste  
*Exposé de l'ensemble des théories relatives au mouvement de la Lune.*

### 1. Petit exercice en guise d'introduction

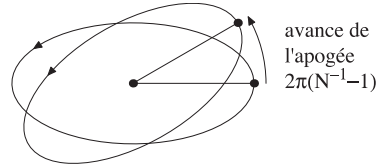
i) L'équation polaire  $\rho(z) = a(1 - e^2)/(1 - e \cos z)$  — dans laquelle j'adopte pour l'angle la notation  $z$  de d'Alembert — représente une ellipse d'excentricité  $e$  dont le foyer est à l'origine et dont les angles sont mesurés depuis l'apogée, c'est-à-dire le point le plus éloigné du foyer  $O$  (disons la Terre). Posons



$$u(z) = \rho(0)^2/\rho(z) = -H(1 - e \cos z), \quad \text{avec } H = -a \frac{1+e}{1-e}.$$

La fonction  $u(z)$  est la solution qui vérifie  $u(0) = a(1 + e)$ ,  $u'(0) = 0$ , de l'équation différentielle linéaire du second ordre  $d^2u/dz^2 + u + H = 0$ , que d'Alembert écrit  $d^2u + udz^2 + Hdz^2 = 0$ . La solution présente un unique minimum local (et donc global)  $z_{ap} = 0$  modulo  $2\pi$ , qui définit l'apogée de  $\rho(z)$ .

ii) Le remplacement de cette équation différentielle par  $d^2u + N^2udz^2 + Hdz^2 = 0$  introduit une *avance de l'apogée* uniforme de  $2\pi[N^{-1} - 1]$ , c'est-à-dire environ  $\pi\alpha$  radians par période si  $N^2 = 1 - \alpha$  avec  $\alpha$  petit : à chaque tour, l'angle  $z$  du nouveau maximum local se décale de  $2\pi[N^{-1} - 1]$ . La solution ayant les mêmes conditions initiales est en effet donnée par  $u = -(H/N^2)(1 - e \cos Nz)$ .



avance de l'apogée  
 $2\pi(N^{-1}-1)$

iii) Si enfin  $H$  est remplacé par une fonction  $M(z)$  (d'une détermination réelle) de  $z$ , i.e. si l'équation différentielle devient  $d^2u + N^2udz^2 + M(z)dz^2 = 0$ , la solution obtenue par la méthode de la variation des constantes s'écrit  $u = -\frac{1}{N} \text{Im} [e^{iNz} \int e^{-iNz} M(z) dz]$ .

Si en particulier  $M(z) = K \cos(pz + A)$  avec  $p \neq N$ , l'unique solution  $u_0$  telle que  $u_0(0)$  et  $u_0'(0)$  s'annulent peut s'écrire

$$u_0(z) = -\frac{K \cos(pz + A)}{N^2 - p^2} + \frac{K \cos(A - Nz)}{2N(N + p)} + \frac{K \cos(A + Nz)}{2N(N - p)}.$$

Merci aux membres de l'équipe A.S.D. pour leurs commentaires et relectures ; merci à Michelle Chapront-Touzé pour des éclaircissements sur l'« équation » de l'apogée.

Si  $M(z) = H + K \cos(pz + A) + \dots + L \sin(Rz + C) + \dots$ , à l'avance moyenne de l'apogée se superpose donc, en l'absence de résonance, une modulation quasi-périodique qu'on appelle, au dix-huitième siècle, l'*équation*. Notons que  $N - p$  peut être arbitrairement petit : c'est le problème des *petits dénominateurs*, dus aux *quasi-résonances*, qui peuvent rendre très grands certains termes. En cas de *résonance*, c'est-à-dire si  $M(z) = K \cos(Nz + A)$ , la solution  $u_0$  précédente devient

$$u_0(z) = \frac{K \cos(A - Nz)}{4N^2} - \frac{K \cos(A + Nz)}{4N^2} - \frac{Kz}{2N} \sin(A + Nz).$$

Elle présente des termes non périodiques, les *arcs de cercle*, aujourd'hui appelés *termes séculaires*. Dans ce cas, l'avance moyenne de l'apogée n'est pas bornée.

## 2. La théorie de la Lune de 1748

C'est dans les années 1740 qu'Euler, Clairaut et d'Alembert, utilisant le formalisme leibnizien, constituent le *Problème de trois corps* comme celui de la résolution approchée d'un système d'équations différentielles traduisant l'attraction mutuelle. Le volume qui vient de paraître est une référence centrale pour la compréhension de cette période remarquable de l'histoire de la mécanique céleste. Il s'organise autour du manuscrit de la *Théorie de la Lune de 1748*<sup>1</sup> qui en forme environ les trois-cinquièmes. Publié (et remis en ordre) ici pour la première fois, ce traité, qui est à la base du Livre I des *Recherches sur différents points importants du système du monde* paru en 1754, est une théorie complète de la Lune « au premier ordre de la théorie des perturbations ». C'est en fait la première théorie « littérale » du mouvement de la Lune : ce n'est qu'à la fin des calculs que les paramètres sont remplacés par leur valeur numérique.

La petitesse du rapport des distances Terre-Lune et Terre-Soleil est telle que l'action du Soleil sur l'orbite lunaire peut être considérée comme une perturbation de l'attraction de la Terre sur la Lune. Cette dernière décrit donc autour de la Terre une orbite qui, pendant une révolution lunaire est presque elliptique et peut être identifiée en première approximation à une ellipse dont l'excentricité ( $\sim 0,05$ ) et l'inclinaison sur le plan de l'écliptique ( $\sim 5^\circ$ ) varient très peu, dont le plan tourne lentement (le mouvement de la ligne des nœuds, intersection du plan de l'ellipse avec le plan de l'écliptique) et qui tourne lentement dans son plan (le mouvement de l'apogée, point de l'orbite le plus éloigné de la Terre pendant une révolution). D'Alembert caractérise l'orbite par trois éléments : sa projection sur le plan de l'écliptique, son inclinaison à chaque instant et le mouvement de la ligne des nœuds.

Le mouvement sur le plan de l'écliptique est obtenu en décomposant la force à laquelle est soumise la projection de la Lune sur ce plan en la somme d'une force centrale en l'inverse du carré de la distance due à la Terre et d'une « perturbation », due à la fois à la projection sur l'écliptique et à l'action du Soleil. La perturbation est elle-même décomposée en la somme d'une force  $\varphi$  dirigée vers la Terre et d'une force  $\pi$  dirigée perpendiculairement. À ceci s'ajoute la force qui tend à faire sortir la trajectoire du plan de l'écliptique et dont la considération permettra de comprendre le mouvement de la ligne des nœuds. Comme Clairaut et plus tard Laplace, il prend

<sup>1</sup> Le titre en a été choisi par l'éditeur

comme variable indépendante non pas le temps mais la « longitude vraie » (ou « anomalie vraie »), c'est-à-dire l'angle polaire mesuré à partir de l'apogée.<sup>2</sup> J'ai rappelé dans l'introduction qu'il note  $z$  cet angle. Ne tenant compte que de l'ordre 1 des termes perturbatifs, d'Alembert cherche tout d'abord, une fois fixées la position et la vitesse de la Lune à un instant initial, une équation différentielle ayant pour solution l'équation polaire  $\rho = \rho(z)$  de la projection de sa trajectoire sur le plan de l'écliptique ou plutôt, comme dans l'introduction, la fonction  $u(z) = \rho(z_0)^2/\rho(z)$ . Pour ce faire, il calcule, comme le faisait Newton, la modification de la loi des aires causée par la petite force  $\pi$  et applique la loi de conservation de l'énergie à une force centrale qui fournirait la même orbite géométrique (pas la paramétrisation en temps). Il obtient ainsi une équation de la forme

$$d u + F(u, du/dz, \pi, \varphi) dz^2 = 0.$$

Aujourd'hui, l'obtention de ce type d'équation se réduit à un changement de variables des coordonnées cartésiennes  $(\rho \cos z, \rho \sin z, \rho s)$  aux coordonnées cylindriques  $(\rho, z, s)$ , suivi du passage aux variables  $(u = 1/\rho, z, s)$  qu'utilise Laplace (aux notations près) dans sa théorie de la Lune. Il vient :

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \rho \dot{z}^2 &= -\frac{\mu \rho}{r^3} + \varphi, \\ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\tau} (\rho^2 \dot{z}) &= \pi, \\ \frac{d^2}{d\tau^2} (\rho s) &= -\frac{\mu z}{r^3} + \psi, \end{aligned}$$

où les points désignent la dérivation par rapport au temps  $\tau$ ,  $r = \rho\sqrt{1+s^2}$  est la distance de la Terre à la Lune,  $\mu$  une constante et  $\psi$  la composante de la force perturbatrice normale au plan de l'écliptique. On élimine le temps à l'aide de l'équation  $\rho^2 \dot{z} = H$ , ou encore  $d\tau = \rho^2 dz/H$ , qui donne la composante du moment cinétique orthogonale au plan  $(x, y)$  de l'écliptique, dont la dérivée dépend de  $\pi$ . Les deux premières équations fournissent alors l'équation cherchée (pour les détails du calcul, on peut se reporter au Chapitre V du premier volume du *Traité de Mécanique Céleste* de Tisserand après avoir remplacé  $z$  par  $v$  et la latitude par  $z$ ).

Mais revenons à d'Alembert ; il lui faut maintenant exprimer les forces  $\pi$  et  $\varphi$  en fonction de  $u$  et  $z$ . Arguant de la faible excentricité de l'orbite lunaire, il simplifie le problème en posant  $u = K + t$ , où  $K$  est une constante et  $t$  (qui n'a rien à voir avec le temps, que nous avons pris soin de noter  $\tau$ ) mesure la (faible) non-circularité de la projection de l'orbite sur le plan de l'écliptique, ce qui permet de négliger  $t^2$ . L'équation que vérifie  $t$  prend la forme

$$d d t + N^2 t d t z^2 + M(t, dt/dz, \cos(pz + A), \dots) = 0.$$

Attardons-nous sur le coefficient  $N^2$ , dont nous avons rappelé dans l'introduction qu'il donne l'avance moyenne de l'apogée. Il provient d'un terme en  $1/u$  dans l'expression de la composante  $\varphi$  de la perturbation, auquel correspond un terme en  $1/u^3$ , que d'Alembert remplace par  $1/K^3 - 3t/K^4$ , dans l'équation différentielle dont  $u$  est solution. Que seule la composante  $\varphi$  intervienne n'est pas pour nous étonner puisqu'une telle avance peut être obtenue par une légère modification de la loi (toujours

<sup>2</sup> Ce n'est qu'au début du XIX<sup>e</sup> siècle que l'origine passera de l'apoastre au périastre qui a l'avantage d'exister non seulement pour l'ellipse mais également pour la parabole et l'hyperbole. Merci à Alain Albouy qui m'a montré la remarque au début du *Theoria Motus* dans laquelle Gauss écrit « *Nous craignons d'autant moins de rétablir l'analogie entre tous les genres de sections coniques que les astronomes français les plus récents en ont déjà donné l'exemple* ».

centrale) de l'attraction (voir le paragraphe suivant). Le calcul donne  $N^2 = 1 - \frac{3n^2}{2}$ , où  $n^2$  est le produit du rapport des distances moyennes (Terre-Lune)/(Soleil-Lune) par le rapport de la force exercée par le Soleil sur la Lune à la force exercée par la Terre sur celle-ci. Dans l'hypothèse d'orbites keplériennes circulaires, la troisième loi de Kepler (le cube  $r^3$  du rayon est proportionnel au carré  $T^2$  de la période) implique que la force en  $1/r^2$  exercée par un corps sur un autre en orbite circulaire autour de lui est proportionnelle au rapport  $r/T^2$ . Dans cette approximation,  $n$  est donc simplement le rapport de la période de révolution de la Lune autour de la Terre à celui de la Terre autour du Soleil, c'est-à-dire  $n^2 \sim \frac{1}{178 + \frac{29}{40}}$  si, comme d'Alembert, on adopte la valeur utilisée par Newton.

Les quantités  $t$  et  $dt/dz$  sont de l'ordre de l'excentricité de la Lune. Si  $\delta$  et  $\varepsilon$  sont les valeurs qu'elles prennent à l'instant origine, la solution de l'équation différentielle sans second membre obtenue en oubliant la perturbation  $M$  est simplement  $t = \delta \cos Nz + (\varepsilon/N) \sin Nz$ . Remplaçant dans  $M$  les termes  $t$  et  $dt/dz$  respectivement par cette expression et sa dérivée, utilisant une approximation de la distance variable de la Terre au Soleil et négligeant les termes d'ordre supérieur<sup>3</sup>, d'Alembert obtient une équation du type de celles que nous avons étudiées dans l'introduction. Il ramène l'équation différentielle du second ordre à un système du premier ordre et résout ce dernier comme nous l'avons fait, après diagonalisation, par « variation des constantes » (une technique publiée par Jean Bernoulli en 1697 dans les *Acta Eruditorum*)<sup>4</sup>. Les calculs sont systématiquement effectués en complexe à l'aide de l'« identité d'Euler » sur l'exponentielle complexe, publiée seulement quelques années auparavant par Euler mais déjà connue de Robert Cotes (*Philosophical Transactions*, 1714)<sup>5</sup>. Le résultat contient un certain nombre de termes mais, en vue du calcul de l'« équation de l'apogée », une première approximation est obtenue en ne gardant que ceux dont le dénominateur est suffisamment petit pour qu'ils dominent les autres. D'Alembert obtient ainsi la formule approchée

$$u \sim 1 - \frac{1}{20}(\cos Nz - 1) + \frac{1}{180} \cos(2z + 2A - 2nz) - \frac{1}{180} \cos(Nz - 2z - 2A + 2nz)$$

dans laquelle  $1/20$  est l'excentricité de la Lune,  $A$  est, comme il le dit joliment, « l'élongation de la Lune au Soleil lorsqu'elle commence à décrire son orbite » (i.e. lorsque  $z = 0$ ) et  $z + A - nz = Z$  est cette élongation au temps correspondant à une valeur donnée de  $z$  (en effet, la Terre parcourt un angle  $nz$  sur l'écliptique pendant que la Lune parcourt l'angle  $z$ ). Nous y reviendrons dans le paragraphe suivant.

C'est la méthode de résolution d'une telle équation différentielle linéaire du second ordre à second membre quasi-périodique qui est l'objet du premier chapitre de la *Théorie de la Lune de 1748*. En commençant par décrire cette résolution, je ne faisais donc que suivre d'Alembert. Tisserand commencera de même le troisième volume de son *Traité de Mécanique Céleste* par la résolution de l'équation de Gylden-Lindstedt, cas particulier de l'équation de Hill.

Il est intéressant de comparer ce que dit d'Alembert à 20 ans d'intervalle sur la méthode qui consiste à supposer que  $u$  s'écarte peu d'une constante  $K$ . En 1748, il écrit

<sup>3</sup> Plus précisément, les « petits » paramètres dont on néglige les termes quadratiques sont le rapport  $n$  des périodes de révolution lunaire et terrestre, la tangente de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique, l'excentricité de la Lune et celle du Soleil.

<sup>4</sup> Leibniz connaissait déjà la formule donnant la solution par quadratures. Merci à Daniel Bennequin de cette précision qu'il doit à la note au bas de la page 21 du livre *Ordinary differential equations* de E.L. Ince.

<sup>5</sup> Merci à Alain Albouy de cette précision qu'il doit à l'*History of mathematics* de Cajori.

« Tout l'artifice dont je me sers pour déterminer l'orbite lunaire eu égard aux deux excentricités, consiste à substituer  $K + t$  au lieu de  $u$  dans l'équation générale . . . Par la substitution de  $K + t$  au lieu de  $u$  dans l'équation de l'orbite, on donne au terme  $tdz^2$  un coefficient différent de l'unité, & on évite les arcs de cercle qui se rencontreroient dans l'équation de l'orbite, et qu'il faudrait faire disparaître par quelque adresse particulière, ce qui engageroit dans un calcul assés délicat. »

En 1768, dans le xxxix<sup>e</sup> mémoire *De l'intégration de l'équation de l'orbite lunaire, (É en général du problème des trois Corps) & des difficultés qui s'y rencontrent* du cinquième des *Opuscles mathématiques*, il évoque la difficile question de la stabilité du mouvement sur le long terme :

« La première de ces imperfections consiste à supposer  $x = a + t$ ,  $t$  étant une quantité fort petite par rapport à  $a$ . C'est supposer, au moins tacitement, ce qui est en question, savoir que l'orbite de la lune, après tant de révolutions qu'on voudra, ne doit jamais s'écarter beaucoup d'un cercle. Il est vrai que cette supposition est justifiée par les observations ; mais on doit sentir que ce moyen de la justifier est indirect, & n'est pas pris dans la solution même comme il le doit être. »

Les « arcs de cercle » sont ceux qui s'introduisent si l'on résout sans précaution une équation différentielle du type  $ddt + N^2tdz^2 + M(t, z)dz^2 = 0$  par approximations successives. Dans l'ordre choisi par l'éditeur, c'est le dernier chapitre de la *Théorie de la Lune de 1748* qui est consacré à ce problème. Choix naturel, puisque cette étude donne la manière théorique de résoudre un telle équation à un ordre d'approximation arbitraire. Pour illustrer ceci par un exemple très (trop) simple, prétendons résoudre par approximations successives l'équation  $ddt + (1 - \nu)tdz^2 = 0$  lorsque  $\nu$  est très petit en l'écrivant  $ddt + tdz^2 = \nu t dz^2$ . On commence par remplacer le second membre par 0, ce qui donne  $t = \alpha \cos z + \beta \sin z$ . Remplaçant  $t$  par cette fonction dans le second membre, on obtient l'équation « résonnante »  $ddt + tdz^2 = \nu(\alpha \cos z + \beta \sin z)dz^2$  dont la solution est

$$t = \alpha \cos z + \beta \sin z + (\nu\alpha/2)z \sin z - (\nu\beta/2)z \cos z.$$

Les « arcs de cercle » de cette solution sont manifestement des artefacts qui proviennent du remplacement de la solution  $t = \alpha \cos \sqrt{1 - \nu}z + \beta \sin \sqrt{1 - \nu}z$  par le début de son développement limité en  $\nu$ . Faire disparaître les « arcs de cercle » en faisant varier les fréquences est une idée importante : elle est à la base des « séries de Lindstedt », dont on trouvera la théorie dans le deuxième volume des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* d'Henri Poincaré. Quant à la stabilité sur le très long terme, c'est un problème qui n'est toujours pas résolu : on aura une idée des difficultés qu'il présente (dans le cas planétaire mieux compris) en lisant le « survey » de Jacques Laskar *La stabilité du système solaire*, qui forme le chapitre 7 du livre *Chaos et déterminisme* édité au Seuil en 1992 sous la direction d'Amy Dahan, Jean-Luc Chabert et Karine Chemla.

### 3) D'Alembert, Clairaut, Euler et le problème de l'apogée

Rappelons que l'apogée de l'orbite lunaire est le point le plus éloigné de la Terre atteint par la Lune au cours d'une révolution. Nous le confondrons ici avec l'apogée de la projection de cette orbite sur le plan de l'écliptique près duquel a approximativement lieu le mouvement de la Terre autour du Soleil (d'Alembert étudie bien entendu la différence entre les deux notions). Puisque  $N^2 = 1 - 3n^2/2$ , l'avance moyenne de l'apogée de la projection de l'orbite de la Lune sur le plan de l'écliptique donnée par le calcul est approximativement de  $2\pi \times 3n^2/4$ . À cette avance moyenne se superpose

l'« équation » qui provient des termes quasi-périodiques. Comme Euler et Clairaut à la même époque, d'Alembert ne trouve que la moitié de la valeur observée. C'est le « problème de l'apogée » qu'il décrit ainsi :

*« Nous avons fait voir dans le chapitre précédent que le mouvement de l'apogée de la lune n'étoit que de  $1^{\circ}31'$  suivant la théorie au lieu de  $3^{\circ}3'$  dont il est suivant les observations, & que la plus grande équation de ce mouvement n'étoit aussy suivant la théorie, que la moitié de ce qu'elle est réellement; ces deux points de la théorie de la Lune, savoir le mouvement de son apogée, et l'équation de ce mouvement, sont les deux seuls que M. Newton n'ait pas déduits de la théorie de la gravitation, c'est seulement par les observations qu'il les a déterminés; est-ce faute d'avoir pu le déduire de la théorie, ou parce qu'il a reconnu qu'en effet ils ne pouvoient s'en déduire? C'est une question sur laquelle il ne nous est pas aisé de prononcer. Cependant nous allons faire icy quelques réflexions qui pourront aider à la résoudre. »*

L'avance moyenne de l'apogée n'est pas un petit effet : les  $3^{\circ}3'$  par révolution lunaire font environ  $44^{\circ}$  par an, c'est-à-dire un tour complet en moins de 9 ans (3233 jours) ! Or à l'époque de l'écriture de la *Théorie de la Lune de 1748*, Euler, Clairaut et d'Alembert s'accordent pour trouver que la théorie de l'attraction en l'inverse du carré de la distance ne fournit que la moitié de cette quantité et, le 15 novembre 1747, Clairaut soutient devant l'Académie des Sciences que la théorie de Newton doit être révisée par l'addition à l'attraction d'un terme en l'inverse du cube de la distance. Mais, coup de théâtre, s'apercevant que le calcul des perturbations au deuxième ordre fournit un terme de taille comparable à celui fourni par le premier ordre, Clairaut rétracte le 17 mai 1749 ses thèses et annonce les résultats d'un texte déposé sous pli cacheté en janvier de la même année qui réconcilie théorie newtonienne et observations (ce texte ne sera publié qu'en 1752 sous le titre *De l'orbite de la Lune en ne négligeant pas les quarrés des quantités de même ordre que les forces perturbatrices*). C'est le lendemain de cette rétractation de Clairaut que d'Alembert confie, pour prendre date, son manuscrit au secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences Grandjean de Fouchy. Dans *Recherches sur différens points importans du système du monde*, il donne le moyen de faire le calcul des perturbations aux ordres suivants sans faire apparaître d'« arcs de cercle » en suivant le dernier chapitre du manuscrit de 1748, que nous avons déjà évoqué. D'après l'éditeur du volume, cette méthode serait déjà contenue dans un pli cacheté déposé à la fin de 1747 et aujourd'hui perdu ; il n'aurait donc manqué à d'Alembert que d'appliquer numériquement sa méthode pour faire la même découverte que Clairaut. Il en retire une amertume qui s'exprimera dix ans plus tard dans le tome 9 de l'*Encyclopédie* (le volume paraît en 1765 mais l'article est rédigé en 1759) :

*« Je ne dois pas oublier d'ajouter 1<sup>o</sup>). que ma méthode pour déterminer le mouvement de l'apogée, est très-élégante & très-simple, n'ayant besoin d'aucune intégration, & ne demandant que la simple inspection des coefficients du second terme de l'équation différentielle ; 2<sup>o</sup>). que j'ai démontré le premier par une méthode rigoureuse, ce que personne n'avoit encore fait, & n'a même fait jusqu'ici, que l'équation de l'orbite lunaire ne devoit point contenir d'arcs de cercle ; si on ajoute à cela la manière simple & facile dont je parviens à l'équation différentielle de l'orbite lunaire, sans avoir besoin pour cela, comme d'autres géomètres, de transformations & d'intégrations multipliées ; & le détail que j'ai donné ci-dessus de mes travaux & de ceux des autres géomètres, on conviendra, ce me semble, que j'ai eu plus de part à la théorie de la lune que certains mathématiciens n'avoient voulu le faire croire. Je ne dois pas non plus passer sous silence la manière élégante dont M. Euler intègre l'équation de l'orbite lunaire ;*

*méthode plus simple & plus facile que celle de M. Clairaut & que la mienne; & cette observation jointe à ce que j'ai dit plus haut des travaux de ce grand géometre, par rapport à la lune, suffira pour faire voir qu'il a aussi travaillé très utilement à cette théorie, quoiqu'on ait aussi cherché à le mettre à l'écart autant qu'on a pû. L'Encyclopédie faite pour transmettre à la postérité l'histoire des découvertes de notre siècle, doit par cette raison rendre justice à tout le monde; & c'est ce que nous croyons avoir fait dans cet article. Comme ce manuscrit est prêt à sortir de nos mains pour n'y rentrer peut-être jamais, nous ajouterons par la suite dans les supplémens de l'Encyclopédie ce qui aura été ajouté à la théorie de la lune, depuis le mois de Novembre 1759, où nous écrivons cet article. »*

Pour calculer l'avance de l'apogée, d'Alembert commence par utiliser la formule approchée de  $u(z)$  que nous avons donnée plus haut. En annulant la dérivée de  $u$  par rapport à  $z$  et en utilisant le fait qu'en une apogée  $z_{\text{ap}}$ , le nombre réel  $Nz_{\text{ap}}$  est proche d'un multiple entier de  $2\pi$ , il trouve l'équation approchée

$$\sin(Nz_{\text{ap}}) \sim \frac{1}{9} \sin(2z_{\text{ap}} - 2nz_{\text{ap}}).$$

Il obtient ainsi une avance moyenne de l'apogée de  $1^{\circ}30'$  modulée par une « équation » périodique d'une amplitude de  $6^{\circ}20'$  qui est l'angle dont le sinus vaut  $1/9$ . Il constate alors que les *Principia* donnent le double pour la valeur observée de l'avance moyenne mais aussi pour l'équation, avec de plus dans ce cas une différence de signe. La discussion de ce qu'il en est vraiment de l'« équation » est délicate et je renvoie aux notes 89 et 106 de Madame Chapront-Touzé pour une discussion complète. Disons seulement que d'Alembert calcule l'apogée de l'orbite de la Lune (en projection sur l'écliptique) alors que Newton étudie les mouvements « séculaires » d'une ellipse approchée. Les  $6^{\circ}20'$  de d'Alembert correspondent en gros à l'addition de deux « inégalités » :

- d'une part l'*équation semestre* de Newton dont l'amplitude (observée et non calculée par Newton) est de  $12^{\circ}18'$  (ramené aujourd'hui à  $9^{\circ}39'$ ) et le signe opposé à celui de d'Alembert ; c'est une inégalité de type « séculaire », faisant intervenir un angle à longue période, l'angle du Soleil avec l'apogée de la Lune ;

- d'autre part une inégalité du même signe que celle de d'Alembert et d'amplitude  $15^{\circ}27'$  qui fait intervenir un angle dont la période est essentiellement celle de la Lune.

C'est ce dernier terme qui manque à Newton et qui, additionné au premier, montre que le calcul par d'Alembert de l'« équation » de l'apogée est essentiellement correct.

Tout un chapitre est consacré à la recherche de causes qui pourraient compléter la gravitation newtonienne et fournir ainsi une valeur correcte de l'avance moyenne de l'apogée : l'action d'un éther et une lune oblongue sont successivement écartées à la suite de calculs précis et seule l'existence d'une autre force, peut-être magnétique et due à la Terre, est finalement retenue. Notons que contrairement à Clairaut et Euler, mais comme Buffon, d'Alembert ne considère pas la théorie newtonienne comme sérieusement mise à mal par le problème de l'avance de l'apogée de la Lune. Voici ce qu'il écrit dans l'article *Attraction* du premier volume de l'*Encyclopédie* paru en 1751 :

*« Ajoutons qu'on devrait être très circonspect à changer la loi du carré des distances, quand même, ce qui n'est pas encore arrivé, on trouveroit quelque phénomène céleste, pour l'explication duquel cette loi du carré ne suffiroit pas. Les différens points du système du monde, au moins ceux que nous avons examinés jusqu'ici, s'accordent avec la loi du carré des distances : cependant comme cet accord n'est qu'un à-peu-près, il est clair qu'ils s'accorderoient de même avec une loi qui seroit un peu différente de celle du carré des distances : mais on sent bien qu'il seroit ridicule d'admettre une pareille loi pour ce seul motif.*

*Reste donc à savoir si un seul phénomène qui ne s'accorderoit point avec la loi du carré, seroit une raison suffisante pour nous obliger à changer cette loi dans tous les autres ; Et s'il ne seroit pas plus sage d'attribuer ce phénomène à quelque cause ou loi particulière. »*

Le mouvement du nœud ne pose pas de problème analogue à celui de l'apogée. Le calcul au premier ordre des perturbations suffit à en donner une bonne approximation  $-3n^2/4$  (l'observation montre qu'une révolution complète du nœud sur l'écliptique se fait en 18 ans  $2/3$  avec une petite « équation » périodique d'amplitude  $1^{\circ}26'$ ). Ce mouvement est rétrograde et, dans le calcul au premier ordre, exactement opposé à l'avance moyenne de l'apogée. Bien que noté par Delaunay et Poincaré, ce fait n'a été remarqué dans toute sa généralité que par Michel Herman comme l'annulation de la trace du linéarisé du *système séculaire* du problème des  $n + 1$  corps dans l'espace, au point singulier correspondant à  $n$  mouvements circulaires, coplanaires et de même sens. Cette propriété est reliée au caractère harmonique du potentiel newtonien en dimension trois dans l'article *On a strange resonance noticed by Michel Herman* de Khaled Abdullah et Alain Albouy (*Regular and Chaotic Dynamics*, V.6, N° 4, 2001, pages 421-432).

#### 4. À suivre...

Le volume est extrêmement cohérent puisque la *Théorie de la Lune de 1748* est précédée de textes qui, à l'exception du premier, sont consacrés au problème de la Lune ou plus généralement à la théorie de la résolution par approximations (méthode des perturbations) des équations différentielles qui régissent le mouvement des planètes. C'est le cas de la *Méthode générale pour déterminer les orbites de toutes les planètes, eu égard à leur action mutuelle*. Il est rendu lisible — ce qui concernant d'Alembert ne va pas de soi — par le remarquable travail d'édition et d'explicitation de Madame Chapront-Touzé ainsi que par sa passionnante introduction à l'ensemble du volume, dans laquelle elle décrit en détail l'histoire du problème de l'apogée.

Ce premier volume, de 532 pages, inaugure superbement l'entreprise audacieuse qu'est l'édition critique des œuvres complètes de d'Alembert sous la coordination générale d'Irène Passeron. Bruno Morando, chaleureusement évoqué par Michelle Chapront-Touzé, est mort trop tôt pour le voir. Il l'aurait aimé.

Cinq séries sont prévues, totalisant près de cinquante volumes. Pour plus de détails, se reporter au site <http://maply.univ-lyon1.fr/dalembert/> qui contient en particulier, pour le volume qui vient de paraître, une « présentation des éditeurs » donnant en deux pages un résumé précis de la crise de la gravitation dans les années 1747-1749 :

Série I : TRAITÉS ET MÉMOIRES MATHÉMATIQUES, 1736 - 1756

(11 volumes dont celui qui paraît est le sixième)

Série II : ARTICLES DE L'ENCYCLOPÉDIE (6 volumes)

Série III : OPUSCULES ET MÉMOIRES MATHÉMATIQUES, 1757 - 1783

(11 volumes)

Série IV : MÉLANGES, ÉLOGES ET ESSAIS (environ 10 volumes)

Série V : CORRESPONDANCE GÉNÉRALE (environ 11 volumes)

On ne peut que souhaiter que les volumes suivants soient édités avec autant de rigueur et de compétence.

*Alain Chenciner, Institut de mécanique céleste et Université Paris 7*

---

**Introduction to Prehomogeneous Vector Spaces**

TATSUO KIMURA

Translations of Mathematical Monographs, **215**. American Mathematical Society, 2003. 288 pp. \$99.00. ISBN 0-8218-2767-7.

---

Tatsuo Kimura est l'un des pionniers de la théorie des espaces vectoriels préhomogènes (en abrégé nous dirons parfois PV comme le veut maintenant une certaine tradition). Cette théorie a été créée par Mikio Sato lors d'un cours au RIMS de Kyoto en 1970 (il existe maintenant une traduction en anglais de ce cours due à M. Muro) dans le but de produire de nouvelles fonctions zêta, généralisant notamment la fonction zêta de Riemann par leur construction et par leur équation fonctionnelle. Je pense qu'il peut être utile au lecteur intéressé que je rappelle pour commencer une démonstration de l'équation fonctionnelle de  $\zeta(s)$  (fonction zêta de Riemann) qui, au prix quand même de considérables difficultés techniques, se généralise au cadre des PV. Cette esquisse me permettra aussi de situer dans le livre de Kimura les principales étapes de la définition et de l'équation fonctionnelle des fonctions zêta des espaces préhomogènes.

On pose donc  $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$  (pour  $\operatorname{Re}(s) > 1$ ) et on voudrait prouver le prolongement méromorphe de cette fonction ainsi que son équation fonctionnelle. Voici une manière de procéder. Soit  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  une fonction de Schwartz, on définit alors la *fonction zêta locale*

$$(1) \quad Z(f, s) = \int_{\mathbb{R}} f(x) |x|^s d^*x$$

où  $d^*x = \frac{dx}{|x|}$  est la mesure de Haar multiplicative. Rien n'empêche d'appeler cette expression la transformée de Mellin de  $f$ . Ce qui est sûr c'est que cette intégrale converge pour  $\operatorname{Re}(s) > 0$ . On peut obtenir son prolongement analytique et son équation fonctionnelle grâce à la remarque suivante due à Tate. Considérons  $f$  et  $g$  deux fonctions de Schwartz sur  $\mathbb{R}$  et désignons par  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  leurs transformées de Fourier ( $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2i\pi xy} dx$ ). Alors le produit

$$(2) \quad Z(f, s)Z(\hat{g}, 1-s)$$

est bien défini pour  $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ . La remarque fondamentale de Tate est que l'expression (2) est symétrique en  $f$  et  $g$  :

$$(3) \quad Z(f, s)Z(\hat{g}, 1-s) = Z(g, s)Z(\hat{f}, 1-s),$$

ce qui permet, après avoir calculé le facteur de Tate

$$\rho(1, s) = \frac{Z(g, s)}{Z(\hat{g}, 1-s)} = \pi^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{1-s}{2})}$$

grâce à une fonction  $g$  sympathique ( $g(x) = e^{-\pi x^2}$  en l'occurrence), de prouver que  $Z(f, s)$  admet un prolongement méromorphe à  $\mathbb{C}$ , ayant des pôles aux entiers négatifs pairs, et vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$(4) \quad Z(f, s) = \rho(1, s)Z(\hat{f}, 1-s).$$

Evidemment, tous les spécialistes savent que Tate, dans sa thèse, a fait ce qui précède sur un corps local  $k$  quelconque et que sa définition de la fonction zêta locale comprend également un caractère  $\chi$  du groupe des unités de  $k$ , que nous avons pris trivial ( $\chi = 1$ ) dans notre exemple. Ce qui est essentiel ici, c'est que l'équation fonctionnelle

(4) permet de prolonger analytiquement la fonction zêta de Riemann et de donner son équation fonctionnelle, sans avoir recours aux adèles. Pour cela posons :

$$(5) \quad \zeta(f, s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} f(tn) dt.$$

Un premier calcul sans difficulté montre que

$$(6) \quad \zeta(f, s) = \zeta(s)Z(f, s).$$

L'utilisation classique de la formule de Poisson mène alors à :

$$(7) \quad \zeta(f, s) = \int_1^{+\infty} t^{s-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} f(tn) dt + \int_1^{+\infty} t^{-s} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \hat{f}(tn) dt + \frac{\hat{f}(0)}{s-1} - \frac{f(0)}{s},$$

qui prouve que

$$(8) \quad \zeta(f, s) = \zeta(\hat{f}, 1-s)$$

et en utilisant l'équation fonctionnelle de Tate ((4) ci-dessus), on obtient enfin

$$(9) \quad \zeta(1-s) = \rho(1, s)\zeta(s).$$

Il semble que la remarque de M. Sato qui est au départ de la théorie des espaces préhomogènes a été de comprendre que dans bon nombre de cas connus de séries de Dirichlet possédant une équation fonctionnelle (comme la fonction zêta de Riemann, la fonction zêta d'Epstein, les fonctions zêta de Siegel, les fonctions zêta d'une algèbre simple), le point clé sous-jacent était la présence d'un groupe algébrique  $G$  et d'une représentation rationnelle  $\rho$  de  $G$  dans un espace vectoriel de dimension finie  $V$ , *qui possédait une orbite Zariski ouverte*. Un tel triplet  $(G, \rho, V)$  sera appelé espace vectoriel préhomogène (ou PV). Dans le cas bien connu de la fonction zêta de Riemann, l'espace préhomogène associé sera simplement donné par la représentation naturelle de  $\mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$  sur  $\mathbb{C}$ . Après son cours au RIMS sur le sujet, M. Sato publiera en collaboration avec T. Shintani un article sur les fonctions zêta associées aux espaces préhomogènes, puis en collaboration avec T. Kimura un article sur la classification de ces espaces. A partir de là la théorie s'est considérablement développée; je renvoie à la bibliographie du présent livre pour avoir un aperçu assez complet de la littérature existante.

Venons en au livre de Kimura.

Le chapitre 1 contient les notions de base de la géométrie algébrique, ainsi qu'un aperçu sur les groupes algébriques et sur leur algèbre de Lie.

Le chapitre 2 contient la théorie de base des espaces préhomogènes. Comme nous l'avons déjà dit un espace préhomogène est la donnée d'un triplet  $(G, \rho, V)$  où  $G$  est un groupe algébrique connexe sur  $\mathbb{C}$ ,  $\rho$  une représentation rationnelle de  $G$  dans un espace vectoriel complexe  $V$ , *admettant une orbite Zariski ouverte*  $\Omega$  (les points de  $\Omega$  sont dits génériques, ceux de  $S = V \setminus \Omega$  sont dits singuliers). Un invariant relatif  $P$  de  $(G, \rho, V)$  est une fraction rationnelle sur  $V$  qui vérifie :

$$\forall x \in V, \quad \forall g \in G, \quad P(gx) = \chi(g)P(x),$$

où  $\chi$  est un caractère rationnel de  $G$ .

On introduit la notion importante d'espace préhomogène régulier, on étudie la cas particulier important où le groupe  $G$  est réductif, et dans ce cas on introduit la fonction  $b$  (parfois appelée polynôme de Bernstein-Sato de l'invariant relatif  $P$ ). Le chapitre 2 se termine par une longue liste de trente exemples qui constitue en fait la classification par Sato et Kimura des PV irréductibles réguliers et réduits. Cette

énumération un peu aride, et nécessitant de connaître la théorie des poids dominants, peut être laissée de côté lors d'une première lecture.

Le chapitre 3 contient les préliminaires analytiques nécessaires dans la suite. On y parle de mesure relativement invariante sur un espace homogène, de distributions tempérées, de formes différentielles. L'auteur donne aussi la démonstration d'un théorème d'Harish-Chandra (dû aussi à Laurent Schwartz) sur l'existence de moyennes sur les fibres d'une application submersive.

Le chapitre 4 entre dans le vif du sujet avec la démonstration de ce que Kimura appelle le théorème fondamental. Les hypothèses sont les suivantes :  $(G, \rho, V)$  est un  $PV$  tel que le lieu singulier  $S$  est une hypersurface irréductible d'équation  $P = 0$ , qui de plus est défini sur  $\mathbb{R}$ . Sous ces hypothèses, le triplet dual  $(G, \rho^*, V^*)$  correspondant à la représentation contragrédiente est aussi un  $PV$  vérifiant les mêmes hypothèses avec un lieu singulier défini par un polynôme irréductible  $P^*$ . On désigne par  $G_{\mathbb{R}}$  le groupe des points réels de  $G$  et par  $V_{\mathbb{R}}$  (resp.  $V_{\mathbb{R}}^*$ ) l'espace vectoriel réel des points réels de  $V$  (resp.  $V^*$ ). On désigne par  $d$  le degré commun des polynômes  $P$  et  $P^*$  et par  $n$  la dimension de  $V_{\mathbb{R}}$  et  $V_{\mathbb{R}}^*$ . Les hypothèses font que le groupe  $G_{\mathbb{R}}$  (je n'entre pas dans les détails de connexité) possède  $\ell$  orbites ouvertes  $\Omega_1, \dots, \Omega_{\ell}$  dans  $V_{\mathbb{R}}$  et aussi  $\ell$  orbites ouvertes  $\Omega_1^*, \dots, \Omega_{\ell}^*$  dans  $V_{\mathbb{R}}^*$ . Pour  $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$  et  $g \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$  on définit alors les fonctions zêta locales par

$$(10) \quad Z_i(f, s) = \int_{\Omega_i} f(x)|P(x)|^s dx \text{ et } Z_i^*(g, s) = \int_{\Omega_i^*} g(y)|P^*(y)|^s dy.$$

Dans l'exemple de base on prend  $(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$  comme forme réelle de  $(\mathbb{C}^*, \mathbb{C})$  et à peu de choses près les fonctions ci-dessus généralisent les fonctions zêta locales de (1). Le théorème fondamental dit alors que ces fonctions (définies par des intégrales convergentes pour  $\text{Re}(s) \gg 0$ ) se prolongent en des fonctions méromorphes sur  $\mathbb{C}$  vérifiant l'équation fonctionnelle

$$(11) \quad Z_i^*(\hat{f}, s - \frac{n}{d}) = \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_{ij}(s) Z_j(f, -s)$$

où les  $\gamma_{ij}$  sont des fonctions méromorphes (en général inconnues) et où naturellement la transformée  $\hat{f}$  de  $f$  est une fonction de Schwartz sur  $V_{\mathbb{R}}^*$ . Cette équation fonctionnelle généralise (4), mais ici le « trick » (3) de Tate ne fonctionne plus : il n'y a plus de domaine commun de convergence entre les membres de droite et de gauche de l'équation fonctionnelle, d'où la nécessité d'une démonstration plus compliquée. Le chapitre 4 contient aussi plusieurs exemples, dont la transformée de Mellin décrite au début de ce texte, et le cas des groupes « orthogonaux »  $O(p, q) \times \mathbb{R}_+^*$  opérant sur  $\mathbb{R}^{p+q}$ , pour lesquels l'invariant relatif  $P$  est une forme quadratique de signature  $(p, q)$ .

Le chapitre 5 contient le coeur de la théorie : les fonctions zêta généralisant celle de Riemann. On suppose de plus ici que le triplet  $(G, \rho, V)$  est défini sur  $\mathbb{Q}$  et on se donne un réseau  $L$  dans  $V_{\mathbb{R}}$  ainsi que le réseau dual  $L^*$  dans  $V_{\mathbb{R}}^*$ . On considère le sous-groupe discret  $\Gamma \subset G_{\mathbb{R}}$  des points du groupe stabilisant  $L$  (encore une fois je ne donne ici qu'une description grossière, dans les faits les questions de connexité sont très importantes). Pour  $i = 1, \dots, \ell$  on définit alors les fonctions zêta comme étant les séries de Dirichlet

$$(12) \quad \zeta_i(L, s) = \sum_{x \in \Gamma \setminus (L \cap \Omega_i)} \frac{\mu(x)}{|P(x)|^s}, \quad \zeta_i^*(L^*, s) = \sum_{x \in \Gamma \setminus (L^* \cap \Omega_i^*)} \frac{\mu^*(x)}{|P^*(x)|^s}$$

où  $\mu$  et  $\mu^*$  sont des « densités » qu'il serait trop long de détailler ici. La convergence de ces séries pour  $\text{Re}(s) \gg 0$ , sous certaines conditions, est un problème important de la théorie. Kimura y consacre le chapitre suivant. Le résultat central du chapitre,

et du livre, dit alors que ces fonctions zêta se prolongent méromorphiquement à  $\mathbb{C}$  et vérifient l'équation fonctionnelle :

$$(13) \quad \zeta_i^*(L^*, \frac{n}{d} - s) = \text{vol}(L) \sum_{i=1}^{\ell} \gamma_{ji}(s) \zeta_j(L, s).$$

Ceci généralise bien sûr l'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Riemann (voir (9)). Ce qui est frappant c'est que la démonstration de Sato et Shintani détaillée dans ce livre suit le même plan que celle pour le cas classique rappelée au début de ce rapport. On définit d'abord une fonction  $\zeta(f, s)$  analogue à (5), et on prouve que

$$(14) \quad \zeta(f, s) = \sum_{i=1}^{\ell} \zeta_i(s, L) Z_i(f, s - \frac{n}{d}).$$

Ceci est bien sûr à rapprocher de (6). Le passage de (14) à (13) est alors obtenu en utilisant la formule de Poisson, via une étape intermédiaire analogue à (7) où les termes  $f(0)$  et  $\hat{f}(0)$  sont remplacés par des sommations sur les points singuliers des réseaux  $L$  et  $L^*$ .

Le chapitre 6 traite de la convergence pour  $\text{Re}(s) \gg 0$  des fonctions zêta définies en (12). Ceci est un résultat délicat qui nécessite une excursion  $p$ -adique. Dans ce chapitre est aussi définie la fonction zêta additive (adélique) qui est au coeur du travail fondamental de H. Saito prouvant la convergence des fonctions zêta de type (12) pour une classe très large de  $PV$ . Ces résultats ne sont qu'évoqués dans ce livre.

Le chapitre 7 donne un aperçu, la plupart du temps sans démonstrations, des résultats de classification des espaces préhomogènes. On y définit notamment les « castling classes » des  $PV$  ainsi que leur unique représentant « réduit ». Par ailleurs (mais aussi par nécessité) ce chapitre contient aussi un résumé de la classification des algèbres de Lie simples et de la théorie des représentations de dimension finie de ces algèbres.

Ce livre me semble réellement intéressant car il donne un panorama d'ensemble de ce que j'appellerais la théorie classique des espaces préhomogènes et de leurs fonctions zêta à une variable à un mathématicien désireux de la découvrir. L'auteur fait notamment le point sur les questions de convergence des fonctions zêta, qui est une question difficile et qui est passée par des stades de généralisations successives. Il n'aborde pas du tout ou peu, mais ce n'est pas un reproche, les travaux de F. Sato sur les fonctions zêta de plusieurs variables et d'autres développements comme par exemple l'aspect « parabolique » de la plupart des exemples d'espaces préhomogènes, les liens avec les représentations des groupes, certains résultats arithmétiques (Y. Hironaka, F. Sato, A. Yukié), ainsi que l'utilisation de la micro-analyse pour le calcul des polynômes de Bernstein-Sato (M. Sato, Kashiwara, Kimura, Oshima). Cependant la bibliographie est très complète, même sur ces points non abordés, et elle est assortie de commentaires qui seront plus qu'utiles au lecteur vraiment intéressé. Cet ouvrage a sa place dans une bonne bibliothèque de département de mathématiques.

*Hubert Rubenthaler, Université Louis Pasteur, Strasbourg*

### **$\mathcal{D}$ -modules and Microlocal Calculus**

MASAKI KASHIWARA

Translations of Mathematical Monographs, Vol. **217**. Iwanami Series in Modern Mathematics. American Mathematical Society, 2003. 254 p. \$ 49. ISBN : 0-8218-2766-9

Les éditions de l'AMS publient en 2003 un ouvrage de Masaki Kashiwara qui fut d'abord édité en japonais en 2000. Au passage, l'auteur en a changé le titre.

Le sujet principal du livre est l'étude des propriétés de la *b-fonction* (que d'autres auteurs appellent *polynôme de Bernstein-Sato*) qu'on associe à une fonction holomorphe  $f$ .

Ce polynôme est utile dans la situation suivante, qui a inspiré Mikio Sato : si  $f$  est une fonction analytique réelle sur  $\mathbf{R}^n$ , la fonction  $f_+^s$ , définie par

$$f(x)_+^s = f(x)^s \text{ si } f(x) > 0 \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

est alors continue en  $x$  et holomorphe en  $s$  sur le demi-plan  $\Re(s) > 0$ .

Si on dispose d'une équation fonctionnelle

$$P(s)f^{s+1} = b(s)f^s$$

où  $P$  est un opérateur différentiel en  $x$  à coefficients dépendant de  $x$  et  $s$ , et  $b$  un polynôme en  $s$  non nul, alors, par intégration par parties, on peut prolonger  $f_+^s$  en une distribution en  $x$ , méromorphe en  $s$ , dont les pôles sont contenus dans l'ensemble des translatés par les entiers négatifs des racines de  $b$ .

L'ensemble des polynômes  $b \in \mathbf{C}[s]$  pour lesquels il existe une telle équation fonctionnelle est un idéal non trivial de  $\mathbf{C}[s]$  : c'est un des résultats principaux de la théorie. La *b-fonction* (ou polynôme de Bernstein-Sato) de  $f$  est le générateur unitaire de cet idéal.

L'exemple le plus simple est obtenu pour  $f(x) = x$ , avec l'équation fonctionnelle

$$\frac{d}{dx}x^{s+1} = (s+1)x^s$$

La distribution  $x_+^s$  a des pôles aux entiers strictement négatifs et son résidu en  $-1$  est égal (toujours à cause de l'équation fonctionnelle) à la dérivée de  $x_+^0$  (fonction de Heavyside), *i.e.* à la distribution de Dirac  $\delta$  en  $x = 0$ . Le résidu en  $-1 - n$  est égal à  $\frac{(-1)^n}{n!}\delta^{(n)}$ .

Pour établir l'existence de la *b-fonction* d'une fonction holomorphe  $f$ , il est nécessaire de développer la théorie des (faisceaux de) modules sur le (faisceau d') anneaux des opérateurs différentiels  $\mathcal{D}_X$  sur une variété complexe  $X$ . C'est ce qui est fait dans les cinq premiers chapitres du livre : propriétés algébriques, filtration par l'ordre de dérivation et variété caractéristique, propriétés (co)homologiques et fonctorielles, modules holonomes et *modules holonomes réguliers*. Ces chapitres constituent une introduction directe et remarquablement synthétique à cette théorie des  $\mathcal{D}_X$ -modules qui en a connu de plus laborieuses.

Une fois démontrée les deux résultats capitaux : existence de la *b-fonction* et rationalité de ses zéros (le lien avec la *monodromie* de  $f$ , étudié notamment par B. Malgrange n'est pas abordé ici), la deuxième partie du livre est consacrée au point de vue *microlocal* sur les systèmes différentiels. On y définit d'abord le faisceau  $\hat{\mathcal{E}}_X$  des opérateurs microdifférentiels formels (faisceau d'anneaux sur le fibré cotangent à  $X$ ). Une propriété essentielle de ce faisceau est que pour tout  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent  $\mathcal{M}$  on a égalité entre la variété caractéristique de  $\mathcal{M}$  et le support de l'extension  $\hat{\mathcal{E}}_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$ .

Le théorème de Gabber sur l'involativité du support d'un  $\hat{\mathcal{E}}_X$ -module cohérent est important puisqu'il s'applique aux variétés caractéristiques des  $\mathcal{D}_X$ -modules cohérents et montre par exemple le caractère lagrangien des variétés caractéristiques des  $\mathcal{D}_X$ -modules artiniens. On en trouvera une preuve dans le livre.

L'équation fonctionnelle qui définit la *b-fonction* montre qu'elle est le polynôme minimal de la multiplication par  $s$  agissant sur le conoyau de l'opérateur  $t$  induit par le décalage  $s \mapsto s + 1$  sur le module  $\mathcal{D}_X[s]f^s$ .

De même, la multiplication par  $s$  agit sur le quotient analogue après microlocalisation (on remplace  $\mathcal{D}_X[s]f^s$  par  $\hat{\mathcal{E}}_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_X[s]f^s$ ). Kashiwara définit donc la *b-fonction microlocale* au point générique d'une variété lagrangienne  $\Lambda$ . Dans certains

cas particuliers, il montre que la  $b$ -fonction de  $f$  peut être reconstituée à partir des  $b$ -fonctions microlocales calculées aux points génériques d'un nombre fini de variétés lagrangiennes associées à  $f$ . Il traite ensuite des exemples où  $f$  est une fonction sur un espace préhomogène, notamment celui de la fonction *déterminant* sur l'espace des matrices  $M_n(\mathbf{C})$ . Le polynôme de Bernstein-Sato du déterminant est le produit  $\prod_{\nu=1}^n (s + \nu)$ .

Au total, les 250 pages de ce livre remplissent le contrat annoncé : une présentation du polynôme de Bernstein-Sato depuis les résultats clés de la théorie des  $\mathcal{D}_X$ -modules jusqu'à des exemples non triviaux calculés explicitement.

Un regret : on attend d'un tel ouvrage une bibliographie complète avec de nombreux renvois dans le texte. Celle qui figure à la fin du texte est des plus sommaires et les renvois fort rares. Une restriction qui n'empêche pas de recommander chaudement ce texte à qui — étudiant de troisième cycle, chercheur — souhaite un exposé direct et autonome du domaine.

*Michel Merle, Université de Nice*

---

### **Voyages aux confins de la démocratie (un mathématicien chez les politiques)**

MICHEL ZISMAN

L'Harmattan, ouverture philosophique, 2003. 304 p. 24,4€. ISBN : 2-7475-4035-9

---

Michel Zisman a le sens du dévouement pour la collectivité. Il l'a exercé pour le plus grand bénéfice de la Société Mathématique de France : ayant été chargé de mission pour les affaires juridiques après avoir été membre du bureau, il la connaît mieux que personne, et ses avis se sont toujours révélés pertinents.

Il s'est aussi engagé politiquement en étant pendant 12 ans adjoint au Maire d'Auxerre, chargé des finances et de la culture. La fréquentation de cet univers ne lui a pas fait perdre sa rigueur, mais lui a donné l'occasion d'exercer sa perspicacité. Il nous livre quelques réflexions que suscite son regard lucide sur ce monde de la politique. Cela permet au lecteur de découvrir un univers surprenant. Dans leur vie publique les politiques ont un comportement dont la logique ne saute pas toujours aux yeux.

La France compte environ 500 000 élus locaux, nous dit-il. Chacun d'eux tirerait un bénéfice certain de la lecture de ce livre. L'auteur n'utilise pas la langue de bois, mais il en parle — il en fait même l'éloge.

Un mot revient souvent dans ce livre : mépris. Celui de l'élu pour ses électeurs, celui d'un scientifique (qui allait devenir Ministre de l'Éducation Nationale) pour les personnalités politiques par exemple.

Ce texte contient de nombreux enseignements, notamment sur ce qu'est et ce que devrait être la démocratie. Il remet en place certains concepts — par exemple connaissez-vous le sens des mots « démocratiser l'enseignement » ?

La leçon n'est pas austère, grâce à de multiples anecdotes qui émaillent l'ouvrage. La distance entre deux êtres humains (en termes de poignées de mains échangées — notion qu'il attribue à Laurent Schwartz, une variante du nombre d'Erdős) met l'auteur à une distance au plus 3 de personnages comme Tito, Hitler ou Staline. Vous saurez aussi comment Georges Poitou a obtenu en 1968 les moyens lui permettant de recruter des jardiniers chargés d'entretenir le parc de la Faculté des Sciences d'Orsay dont il était alors le doyen.

Ce livre contient de nombreuses illustrations de comportements d'élus qui traduisent des dysfonctionnements du système. Néanmoins ce n'est pas un constat

d'échec qu'en tire Michel Zisman, au contraire, il conclut sur une vision plutôt optimiste de l'évolution de notre système politique.

*Michel Waldschmidt, Université Pierre-et-Marie-Curie*

---

**La recherche mathématique en Afrique. Une nécessité pour le développement ?**

CLAUDE LOBRY (préface de Jean-Pierre Kahane)

L'Harmattan, 2003. 156 p. 14€. ISBN : 2-7475-4122-3

---

Développer la recherche mathématique en Afrique est une nécessité vitale pour ce continent. À l'appui de cette thèse, l'auteur apporte un témoignage provenant de sa connaissance personnelle à la fois des mathématiques et de l'Afrique. Il a acquis son expérience du terrain d'abord comme Directeur du CIMPA, puis par l'organisation d'activités scientifiques franco-africaines impliquant des mathématiciens à la pointe de la recherche.

Élever le niveau d'éducation de tous les habitants de notre planète est une des responsabilités des scientifiques des pays les plus développés. Jusqu'où doit se porter cet effort ? Donner à chacun la chance d'apprendre à lire, à écrire et à compter est clairement une exigence minimale. Est-il vraiment indispensable, et même possible, de créer et de développer des équipes de recherche de niveau international concernant des domaines abstraits dans des pays où le niveau de vie est très bas ? Ne vaudrait-il pas mieux se restreindre à des thèmes dont les applications pour le développement économique des pays concernés sont plus immédiates ? Les ressources étant limitées, ne conviendrait-il pas de les consacrer aux questions de première urgence, et laisser le luxe de la recherche de haut niveau, sans conséquence pratique prévisible à court terme, aux pays qui en ont les moyens ?

Ces questions sont pertinentes et l'auteur ne les élude pas. Il est de notre devoir de pays ex-colonisateur, dit-il, d'aider les pays africains à acquérir la maîtrise des sciences et des techniques. Même s'il argumente son propos à partir de son expérience à la fois des mathématiques et de l'Afrique, son raisonnement s'applique aussi à d'autres domaines scientifiques, plus généralement à toutes les sciences de base, et à d'autres pays en développement en dehors de l'Afrique.

L'importance pour les pays pauvres de maîtriser les questions de modélisation des écosystèmes ne saurait être mise en doute. À partir de cet exemple Claude Lobry explique, en termes compréhensibles par tous, la nécessité pour ces pays de participer à des travaux de recherche mathématique qui sont actuellement développés par différentes équipes internationales. Laisser les pays en développement à l'écart de ces recherches, c'est les maintenir en état de dépendance. Limiter le niveau des centres de formation de ces pays, ne leur permettre de former que des ingénieurs ou des enseignants du secondaire sans leur donner les moyens de développer des structures de recherche, c'est leur refuser le droit de participer pleinement à des prises de décision les concernant. Les pays en développement ont un rôle à jouer dans la communauté mondiale qui produit des résultats scientifiques originaux, ils ont leur place au sein des réseaux internationaux de chercheurs qui sont amenés à donner des avis d'experts.

Des réalisations interafricaines sont possibles et peuvent donner de remarquables résultats. Imagine-t-on un CNU au niveau européen qui serait chargé des inscriptions sur les listes d'aptitude ? C'est pourtant ce qui se passe depuis 1968 avec un certain nombre de pays d'Afrique grâce aux comités consultatifs inter africains (CCI) du Conseil africain et malgache pour l'enseignement supérieur (CAMES), qui contribue à l'harmonisation des systèmes d'enseignement supérieur dans les universités africaines.

Claude Lobry évalue le programme qu'il préconise en le comparant avec ce qui est financé par les organismes spécialisés dans la coopération internationale, comme

l'IRD et le CIRAD. Ces organismes n'attribuent presque rien pour les sciences de base ; pourtant le montant qui est estimé nécessaire par l'auteur est très faible comparé au budget de la coopération. La qualité de ce qui est réalisé avec des moyens dérisoires (notamment par le CIMPA) est un des meilleurs arguments pour plaider à une meilleure répartition des crédits destinés au développement durable. L'auteur cite les exemples de l'ISP en Suède et de l'ICTP en Italie.

Parer au plus pressé pour améliorer la situation des pays les plus pauvres de la planète est clairement une urgence. Mais on sait bien en mathématiques que les grands progrès apparaissent souvent quand on s'attaque à un problème plus général. Créer une infrastructure scientifique de haut niveau en Afrique est un objectif ambitieux, mais, comme le dit Jean-Pierre Kahane dans sa préface, *l'urgence se relie à une vision à long terme.*

***Sigles et URL.***

CIMPA : Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (Nice) — <http://www-mathdoc.ujf-grenoble.fr/CIMPA/>

ICTP : International Center for Theoretical Physics (Centre Abdu Salam, Trieste) — <http://www.ictp.trieste.it>

ISP : Institute Science Programme (Uppsala Suède) — <http://www.isp.uu.se/>

AIMS : African Institute for Mathematical Sciences (Le Cap, Afrique du Sud) — <http://www.aimsforafrica.org>

IRD : Institut de recherche pour le développement (ex-Orstom) — <http://www.ird.fr/>

CIRAD : Centre de coopération internationale en recherche agronomique pour le développement — <http://www.cirad.fr/>

CAMES : Conseil africain et malgache pour l'enseignement supérieur —

<http://www.refer.sn/article372.html> — <http://www.refer.mg/boi/cames.htm>

L'Harmattan — <http://www.editions-harmattan.fr/>

*Michel Waldschmidt, Université Pierre-et-Marie-Curie*