

# LIVRES

---

---

## **$L^2$ -Invariants : Theory and Applications to Geometry and $K$ -Theory**

WOLFGANG LÜCK

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 44, Berlin, Springer, 2002.

595 p. ISBN : 3-540-43566-2. 119 €

---

*Je voudrais d'abord remercier Damien Gaboriau pour ses remarques éclairantes sur une version préliminaire de ce texte.*

On peut dire que ce sujet (les invariants  $L^2$ ) prend sa source dans un article remarquable de M. Atiyah en 1974. Il y définit les nombres de Betti  $L^2$  d'une variété compacte et montre une formule de Gauss-Bonnet pour ceux-ci. Ce papier fut le départ de cette théorie, il contient les premières définitions et résultats et il pose de nombreuses questions. Je ne saurais trop recommander la lecture de cet article aux personnes intéressées par l'aspect analytique du sujet.

Voyons donc comment sont définis ces nombres de Betti  $L^2$  : si  $(M^n, g)$  est une variété riemannienne compacte de dimension  $n$ , son revêtement universel

$$\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$$

est naturellement équipé d'une métrique qui fait de  $\pi$  une isométrie locale et alors  $\pi_1(M)$ , le groupe fondamental de  $M$ , agit isométriquement sur  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ . On peut identifier les fonctions sur  $M$  et les fonctions  $\pi_1(M)$ -invariantes sur  $\tilde{M}$ . On note maintenant  $\Delta_p$  le laplacien de Hodge de Rham agissant sur les  $p$ -formes différentielles de  $M$  (ou de  $\tilde{M}$ ). Le célèbre théorème de Hodge de Rham identifie le noyau de cet opérateur sur  $M$  avec le  $p$ -ième groupe de cohomologie à coefficient réel de  $M$ . Si on note  $H_p$  le noyau de Schwartz du projecteur orthogonal sur ce noyau : pour  $(x, y) \in M \times M$ ,  $H_p(x, y)$  est un homomorphisme de  $\Lambda^p T_y^* M$  dans  $\Lambda^p T_x^* M$ . C'est alors un petit exercice de montrer que

$$\dim \ker \Delta_p = \int_M \text{Tr } H_p(x, x) d\text{vol}_g,$$

et cette quantité vaut  $b_p(M)$ , le  $p$ -ième nombre de Betti de  $M$ . Elle est en particulier indépendante de la métrique. Et lorsque  $\tilde{H}_p$  est le noyau de Schwartz du projecteur orthogonal sur le noyau  $L^2$  de  $\Delta_p$  sur  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ , ce projecteur commute à l'action de  $\pi_1(M)$ , et donc la fonction

$$x \in \tilde{M} \mapsto \text{Tr } \tilde{H}_p(x, x)$$

est  $\pi_1(M)$ -invariante, le  $p$ -ième nombre de Betti  $L^2$  de  $M$  est défini par

$$b_p^{L^2}(M) = \int_M \text{Tr } \tilde{H}_p(x, x) d\text{vol}_g.$$

Ces nombres de Betti  $L^2$  s'interprètent aussi comme une dimension de von Neumann de l'espace des formes harmoniques  $L^2$  sur  $\tilde{M}$ . Dans son papier, M. Atiyah montre que l'on a une formule de Gauss-Bonnet :

$$\sum_p (-1)^p b_p^{L^2}(M) = \chi(M).$$

Et il pose la question de savoir si ces nombres sont des invariants d'homotopie. C'est J. Dodziuk qui répond peu après à cette question, en particulier le travail de J. Dodziuk montre qu'on a une définition de ces nombres de Betti  $L^2$  à partir d'une triangulation et on peut donc définir ces nombres de Betti  $L^2$  pour n'importe quel CW complexe de type fini (qui pour tout  $p$  a un  $p$ -squelette fini). En fait c'est B. Eckmann qui en 1945 introduit une structure euclidienne sur l'espace des chaînes d'un « CW complexe » (B. Eckmann parle de polyèdres) et qui obtient une décomposition de Hodge qui permet de calculer l'homologie à l'aide de chaînes harmoniques. D'ailleurs une des applications majeures de B. Eckmann concerne les revêtements finis. En particulier, si un groupe discret  $G$  a un classifiant  $BG$  de type fini, on peut définir ses nombres de Betti  $L^2$ . Par exemple, si  $F_p$  est le groupe libre à  $p$  générateurs, son classifiant est un bouquet de  $p$  cercles et le revêtement universel de ce classifiant est « le » graphe de Cayley du groupe (c'est un arbre). Pour calculer les nombres de Betti  $L^2$ , on peut employer plusieurs méthodes : un calcul direct des espaces correspondants et de leurs dimensions de von Neumann ou utiliser la formule de Gauss-Bonnet, ou encore comme Cheeger et Gromov, utiliser une suite exacte de Mayer-Vietoris et on trouve que  $b_0^{L^2}(F_p) = 0$  et  $b_1^{L^2}(F_p) = p - 1$ .

Dans la préface, W. Lück nous explique pourquoi il aime ce sujet : on y trouve des conjectures importantes liées à la topologie algébrique, la théorie des groupes, l'analyse fonctionnelle et la géométrie riemannienne ou spectrale ; de plus les approches algébriques, analytiques, géométriques ont chacune contribué à résoudre des parties de ces conjectures et aussi ces nouveaux invariants ont permis de découvrir de nouveaux résultats spectaculaires sur d'autres domaines des mathématiques, on peut citer les travaux récents de D. Gaboriau qui montre que les nombres de Betti  $L^2$  d'un groupe sont projectivement des invariants d'équivalence mesurables et aussi les travaux de T. Cochran, K. Orr et P. Teichner qui construisent des nouveaux invariants de nœuds et utilisent pour cela l'invariant  $\eta$   $L^2$  défini par J. Cheeger et M. Gromov (pour plus de précisions cf. l'exposé de P. Teichner au congrès I.C.M. de Pékin). Dans l'introduction, W. Lück nous donne un vaste panorama des résultats et conjectures reliés aux invariants  $L^2$ . La première partie du livre est consacrée aux définitions des nombres de Betti  $L^2$  ; leurs propriétés élémentaires sont démontrées.

Je vais maintenant décrire ce livre mais dans un ordre qui ne respecte pas celui du livre. J'espère ne pas trop dérouter le lecteur.

La deuxième partie du livre est consacrée aux invariants de Novikov-Shubin. Lorsque  $(M^n, g)$  est une variété riemannienne compacte de dimension  $n$ , son revêtement universel est noté  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ . Soit  $E_p(\lambda, x, y)$  le noyau de Schwartz du projecteur spectral (sur l'intervalle  $]0, \lambda[$ ) du laplacien  $\Delta_p$  en restriction aux  $p$ -formes  $L^2$  cofermées sur  $\tilde{M}$ . Comme précédemment, la fonction  $x \mapsto \text{Tr } E_p(\lambda, x, x)$  est  $\pi_1$ -invariante, on pose alors

$$\theta_p(\lambda) = \int_M \text{Tr } E_p(\lambda, x, x).$$

En 1986, Novikov et Shubin introduisent les invariants suivants :

$$\alpha_p(M) = \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\log \theta_p(\lambda)}{\log \lambda} \in [0, \infty],$$

et lorsque  $\theta_p(\lambda) = 0$  dans un voisinage de zéro, on pose

$$\alpha_p(M) = \infty^+.$$

Cet invariant mesure la quantité de spectre du laplacien près de zéro et il gouverne aussi la décroissance en grand temps du noyau de la chaleur  $e^{-t\Delta_p}$ . On peut de même définir un analogue discret de ces invariants pour un CW complexe et les théorèmes de A. Efremov, M. Gromov et M. Shubin montrent que ces invariants analytiques et discrets coïncident et qu'ils sont, comme les nombre de Betti  $L^2$ , des invariants d'homotopie de  $M$ .

Ces deux familles d'invariants (nombre de Betti  $L^2$  et invariants de Novikov Shubin) sont en général délicats à calculer. Concernant  $\alpha_0(M)$  on sait grâce aux travaux de N. Varopoulos qu'il calcule le taux de croissance polynomiale du groupe fondamental. Dans un quatrième chapitre, l'auteur nous expose les résultats de J. Lott et lui-même sur les invariants  $L^2$  des variétés compactes de dimension 3 qui entrent dans la classification de W. Thurston donc conjecturalement (voire mieux suivant G. Perelman) toutes les variétés compactes de dimension 3. Le calcul est possible grâce aux techniques cohomologiques expliquées dans les deux premières parties. Dans une cinquième partie, l'auteur décrit les travaux de M. Olbrich qui a calculé les invariants  $L^2$  des variétés localement symétriques, ces travaux reposent sur une utilisation fine de la formule de Plancherel de Harish Handra et de résultats sur la  $(\mathcal{O}, K)$  cohomologie.

Une partie fascinante des invariants  $L^2$  est son lien avec la théorie des groupes. Ces invariants (nombres de Betti  $L^2$  et invariants de Novikov-Shubin)  $L^2$  fournissent une nouvelle classe d'invariants des groupes, *a priori* uniquement pour les groupes dont le classifiant est un CW complexe de type fini mais dans une sixième partie, l'auteur nous explique comment étendre ces définitions (quitte à autoriser la valeur  $+\infty$ ) à tous les groupes. En 1986, dans un article superbe, fondamental et inspiré, J. Cheeger et M. Gromov ont aussi donné une telle généralisation. Au lieu de considérer la cohomologie réduite à coefficients dans la représentation régulière de  $G$  (*i.e.*  $G$  agissant à gauche sur  $l^2(G)$ ), W. Lück considère l'homologie à coefficients dans l'algèbre de von Neumann de  $G$ ,  $\mathcal{N}(G)$  : c'est la sous-algèbre des opérateurs bornés de  $l^2(G)$  qui commute avec l'action de  $G$ . Et la difficulté analytique est réduite à donner une définition idoine de la dimension de von Neumann pour tout les  $\mathcal{N}(G)$  modules. Cette homologie contient l'homologie  $L^2$  et les invariants de Novikov-Shubin et la force de cette approche est qu'elle se traite dans un cadre homologique classique.

Les liens entre les invariants  $L^2$  et la théorie des groupes sont présentés dans le septième chapitre notamment le résultat de B. Eckmann qui permet de majorer l'écart entre le nombre de générateurs et celui de relations en fonction des premiers nombres de Betti.

Dans son article, M. Atiyah demande aussi si ces nombres de Betti  $L^2$  sont des nombres rationnels, plus exactement sa question est de donner des exemples où ceux-ci ne sont pas des nombres rationnels. Cette question a été généralisée en

demandant si les nombres de Betti  $L^2$  d'un groupe  $\Gamma$  sont dans le sous-groupe de  $\mathbb{Q}$  engendré par les inverses des cardinaux des sous-groupes finis de  $\Gamma$ . En 1986, J. Cheeger et M. Gromov avaient construit des groupes pour lesquels les nombres de Betti  $L^2$  sont des réels constructibles<sup>1</sup> arbitraires. Cependant cette construction ne permettait pas de trouver des groupes opérant librement et proprement sur un CW complexe avec des nombres de Betti  $L^2$  irrationnels. Il faut donc supposer que le classifiant du groupe soit compact. D'une part, on sait grâce aux travaux de R. Grigorchuk, P. Linnell, T. Schick et A. Zuk que cette dernière conjecture est fautive et d'autre part grâce aux travaux de P. Linnell on connaît une classe assez grande de groupes pour lesquels la réponse à cette conjecture générale est affirmative. La dixième partie nous livre un panorama très complet sur cette question et une preuve des résultats de P. Linnell.

La troisième partie est dédiée à la torsion  $L^2$ . Elle a deux versions, une associée à un CW complexe qui est le pendant de la torsion de Reidemeister, et l'autre analytique qui est le pendant de la torsion de D. Ray et I. Singer. Cependant, pour être proprement défini, il faut que le spectre de  $\Delta_p$  sur  $\tilde{M}$  soit assez petit près de zéro. Plus précisément, il faut que

$$\int_0^1 \frac{\theta_p(\lambda)}{\lambda} d\lambda < \infty.$$

Un théorème de D. Burghlelea, T. Kappeler, L. Friedlander montre que lorsqu'elles sont définies, ces deux torsions  $L^2$  coïncident. Ce théorème est l'analogue du théorème de J. Cheeger et W. Müller démontrant l'égalité entre la torsion analytique de Ray-Singer et la torsion de Reidemeister.

La neuvième partie traite de questions reliées à la K-Théorie des algèbres de von Neumann. Je ne connais pas ce sujet, je m'abstiendrai donc de dire des âneries.

Ce livre contient aussi quatre chapitres très instructifs et documentés faisant le point sur des questions très intéressantes. Le quatorzième chapitre traite des liens entre les invariants  $L^2$ , le volume minimal et le volume simplicial. Suivant M. Gromov on sait que la nullité du volume minimal implique la nullité du volume simplicial (c'est la norme de la classe fondamentale de  $M$  en homologie  $L^1$ ), la nullité des nombres de Betti  $L^2$  et de tous les nombres caractéristiques. Une conjecture est que lorsque la variété est asphérique, alors la nullité du volume simplicial implique celle des nombres de Betti  $L^2$ . Le douzième chapitre aborde la question de la conjecture du zéro dans le spectre. Cette conjecture due à M. Gromov prédit que lorsque  $M$  est une variété compacte dont le revêtement universel  $\tilde{M}$  est contractile alors pour un  $p$  entier, zéro est dans le spectre de  $\Delta_p$  sur  $\tilde{M}$ . Si comme J. Lott, on pose la question sans l'hypothèse «  $\tilde{M}$ -contractile » (mais non compacte) alors M. Farber et S. Weinberger ont un contre exemple. Cette conjecture est reliée à la conjecture de I. Singer qui fait l'objet du onzième chapitre. Cette conjecture prédit que si  $M$  est une variété à courbure sectionnelle strictement négative alors les nombres de Betti  $L^2$  de  $M$  sont nuls sauf en degré égal à la moitié de la dimension. Grâce au théorème de M. Atiyah, on obtiendrait ainsi la conjecture de H. Hopf qui prévoit que pour une telle variété on aurait  $(-1)^{\dim M/2} \chi(M) > 0$ . M.

<sup>1</sup> Les nombres constructibles sont les nombres réels dont on peut calculer chaque décimale en temps fini avec une machine de Turing.

Anderson a trouvé des exemples de variétés simplement connexes à courbure sectionnelle strictement négative qui violent la conclusion de la conjecture de Singer. Cependant ces exemples n'ont pas de quotient compact. Le résultat le plus abouti vers cette conjecture de Singer est un travail remarquable de M. Gromov sur les variétés kähleriennes.

La treizième partie est consacrée à deux conjectures (dite du déterminant et d'approximation). La conjecture de l'approximation est une généralisation potentielle d'un résultat de W. Lück qui répondait à une question de M. Gromov. Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne compacte et si  $\Gamma_i \subset \pi_1(M)$  est une suite de sous-groupes normaux telle que

$$\bigcap_i \Gamma_i = \{e\}$$

alors

$$b_p^{L^2}(M) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b_p(\tilde{M}/\Gamma_i)}{[\pi_1(M) : \Gamma_i]}$$

et

$$\theta_p(\lambda) \leq -C/\log(\lambda), \text{ pour } \lambda \text{ proche de zéro.}$$

La conjecture du déterminant concerne le déterminant de Fuglede-Kadison d'un morphisme associé à une matrice à coefficients dans  $\mathbb{Z}G$ . Il se trouve que ces deux questions sont reliées.

On peut trouver que ce livre formalise un peu trop un sujet bien vivant et que cela nuit à une lecture linéaire du livre (mais les mathématiques sont-elles bien linéaires?). On peut aussi estimer que ce livre est un tantinet trop algébrique. Fort de son expertise dans ce sujet, W. Lück nous a livré un livre personnel qui contient les fondements de la théorie, les développements récents de cette théorie, une présentation claire, instructive et complète sur des conjectures très intéressantes, une bibliographie monumentale et exhaustive et des exercices qui permettent au lecteur de tester si sa compréhension est satisfaisante.

*Gilles Carron, Université de Nantes*