LIVRES

An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis
André Martinez
Springer-Verlag, 2002. 190 p. ISBN 0-387-95344-2. 69,95 €

Le livre d'André Martinez présente de manière agréable et efficace les techniques microlocales semi-classiques. Dans cette théorie, les objets considérés dépendent d'un petit paramètre $h \in]0,1]$, appelé paramètre semi-classique (ou constante de Planck par abus d'écriture), qui tend vers 0. Issue de la mécanique quantique, dont elle tire son nom, et de l'analyse microlocale, elle est utilisée tant comme outils en mathématiques que pour la résolution de problèmes physiques tels que la théorie de la diffusion, l'effet tunnel, l'approximation de Born–Oppenheimer pour deux particules de masse très différente, la physique statistique, l'approximation champ magnétique fort ...

La première partie du livre est consacrée aux opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques qui sont de la forme

$$\mathrm{Op}_h(p)u\ (x;h) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\xi/h} p(x,y,\xi;h)u(y)\,dy\,d\xi,$$

pour u une distribution de classe $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En fait, cette théorie ne coïncide pas exactement avec la théorie des opérateurs pseudo-différentiels classiques : par exemple, un opérateur est considéré comme négligeable s'il est régularisant dans le cas classique et s'il est petit lorsque $h \to 0$ dans le cas semi-classique. Après avoir étudié les espaces de symboles et rappelé quelques résultats sur les intégrales oscillantes, Martinez donne les propriétés usuelles des opérateurs pseudo-différentiels tels que les règles de composition ou la construction d'inverses approchés. Le théorème de Calderón–Vaillancourt et l'inégalité de Gårding sont ensuite démontrés. Comme dans le reste du livre, de nombreux exemples et remarques illustrent les résultats.

La deuxième partie de l'ouvrage traite de l'analyse microlocale analytique. L'auteur se sert d'une transformation de Fourier, Bros et Iagolnitzer (FBI) qui permet d'étudier une fonction à la fois dans les variables habituelles (en x) et après transformation de Fourier (en ξ). Cette technique puissante et flexible a été utilisée de manière intensive dans l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires, notamment par Sjöstrand [4], mais aussi pour des problèmes non linéaires, comme dans le livre de Delort [1] par exemple. En général, elle s'avère difficile et très technique, mais Martinez limite son étude à la transformation de Bargman qui est la transformation de FBI type. Grâce à cette astuce, l'auteur conserve les propriétés essentielles des transformations FBI mais en réduit considérablement les aspects techniques. Pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, cette transformation s'écrit

$$Tu\ (x,\xi;h) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi/h-(x-y)^2/2h}u(y)\,dy.$$

Après avoir démontré les propriétés standard de T, son action sur les opérateurs pseudo-différentiels et sur certains opérateurs intégraux de Fourier, il obtient des estimations exponentielles microlocales. Ces estimations lui permettent d'étudier, de façon limpide et originale, le microsupport des fonctions, la propagation des singularités et la microhyperbolicité.

Martinez termine son exposé par des éléments de géométrie simplectique tels que les transformations canoniques, les variétés lagrangiennes et le théorème d'Egorov. Un appendice reprend les formules les plus importantes du livre.

A la fin de chaque chapitre, l'auteur propose un nombre conséquent de petits problèmes très détaillés et bien choisis. Ils prolongent l'exposé en donnant des résultats complémentaires et en présentant des applications importantes de la théorie (calcul fonctionnel pour les opérateurs pseudo-différentiel, théorie spectrale, estimations d'Agmon). Enfin d'autres exercices relient ces résultats aux autres branches des équations aux dérivées partielles (états cohérents, mesures semi-classiques).

En conclusion, cet ouvrage présente de manière originale, assez complète et surtout très claire les techniques pseudo-différentielles et microlocales en limite semi-classique. Il est donc particulièrement recommandé à tous ceux qui souhaitent aborder et comprendre cette théorie. Mais même les spécialistes du domaine en tireront, principalement dans sa seconde partie, des informations très utiles.

Références

[1] J.M. Delort, *F.B.I. transformation, second microlocalization and semi-linear caustics*, Springer, Lecture Notes in Math. **1522** (1992).

[2] M. Dimassi, J. Sjöstrand, *Spectral asymptotics in the semiclassical limit*, Cambridge University Press, London Math. Soc. Lecture Notes Series **268** (1999).

[3] D. Robert, *Autour de l'approximation semi-classique*, Birkhäuser, Progress in Mathematics **68** (1987).

[4] J. Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque **95** (1982).

Jean-François Bony, Université de Bordeaux I

L'enseignement des sciences mathématiques — La géométrie
sous la direction de J.-P. Kahane
Odile Jacob, 2002. 284 p. ISBN 2738111386. 22 €

Ce rapport accorde une grande place à la géométrie et c'est bien normal, car beaucoup de mathématiciens ont découvert les premiers aspects de la beauté des mathématiques au travers les bijoux enseignés au collège que sont les théorèmes de Pythagore et de Thalès, à ces résultats que l'on voit ou que l'on ne voit pas sur le dessin et qu'on redécouvre ou découvre grâce à un raisonnement logique s'appuyant sur quelques définitions et axiomes.

Ce rapport s'articule autour de plusieurs questions ; la première est « faut-il encore enseigner la géométrie au collège et au lycée aujourd'hui ? », la deuxième est d'analyser l'évolution de la géométrie enseignée à l'école, d'identifier la place de la géométrie élémentaire (celle enseignée jusqu'au lycée) dans les mathématiques d'aujourd'hui et les propositions que l'on peut faire au vu de cette analyse.

A la première question, les auteurs répondent par un vibrant plaidoyer pour la géométrie. Ils donnent plusieurs justifications :

– Pour appréhender l'espace, pour savoir lire une carte, pour évaluer l'échelle d'une carte, pour ne pas se perdre dans un bâtiment *(construit suivant les plans d'un architecte facétieux)*[1], il est utile d'avoir manipulé un minimum d'objets géométriques : savoir reproduire un croquis à une échelle donnée, savoir représenter le symétrique d'une figure par rapport à une droite, connaître quelques solides et certaines de leurs sections planes. Toutes ces activités aident les élèves à acquérir une vision de l'espace où ils vivent.

[1] Dans cette partie, mes remarques personnelles sont en italique

– La géométrie élémentaire est un excellent apprentissage du raisonnement. Et tout le monde s'accorde à dire combien il est crucial pour un citoyen de savoir raisonner, sans quoi il ne pourra participer à la vie démocratique *(au moins dans une société beaucoup plus ouverte, ce qui est loin d'être le cas aujourd'hui)*. Mais de toute façon, il est fondamental que les scientifiques et les ingénieurs sachent raisonner. Certes la géométrie n'est pas la seule branche des mathématiques ni même des sciences qui est utile pour l'apprentissage du raisonnement, mais le raisonnement géométrique a une spécificité : on peut argumenter sur une figure et formaliser ensuite ce qu'on a décrit, c'est un mélange de logique pure et d'intuition. De plus la géométrie élémentaire est un bon aperçu des sciences mathématiques, elle n'est pas dépourvue d'esthétique (*au moins pour ceux qu'elle n'a pas rebutés*) et elle n'est pas dénuée de complexité, chacun peut faire l'expérience de sécher devant un exercice de géométrie élémentaire.

– Ce rapport souligne aussi que la géométrie élémentaire est présente en art moderne, en peinture, en architecture. Une partie de cette géométrie appartient à notre patrimoine culturel depuis très longtemps ; certaines règles ou outils géométriques sont très utiles : règle des 3-4-5 des charpentiers, splines en CAO, surfaces réglées pour les architectes bétons... Des objets géométriques apparaissent naturellement dans d'autres sciences (coniques dans l'étude du mouvement des planètes, réseaux dans l'étude des cristaux, polyèdres réguliers et certaines molécules).

– Enfin, la géométrie est une école de rigueur et de précision qui est fondamentale pour la formation des scientifiques et des ingénieurs. Et c'est pour cela qu'elle avait été introduite dans le cursus des futurs élèves et des élèves des grandes écoles.

Ensuite le rapport compare ce qui a été enseigné au collège et au lycée depuis 1966 : la période antérieure aux maths modernes, la période des maths modernes et enfin la période actuelle. Les auteurs sont visiblement émerveillés (*un peu de nostalgie ?*) par la richesse et la complexité de ce qui était enseigné en 1966 (des géométries non-euclidiennnes, le théorème de Feuerbach..). Il y aura toujours de nouveaux théorèmes de géométrie du triangle et du cercle, mais pour Bourbaki, la géométrie élémentaire était devenue une science morte. Car d'après le programme d'Erlangen de F. Klein et la théorie des invariants, on a un moyen mécanique, automatique de démontrer des théorèmes de géométrie élémentaire. Je vais maladroitement vous décrire cela et je vous invite à lire ce rapport pour un éclairage brillant, étayé d'exemples simples [2]. Selon F. Klein une géométrie est la donnée d'un groupe agissant sur un ensemble (espace affine, euclidien, projectif...) et la théorie des invariants nous permet de trouver (par exemple) les fonctions polynomiales invariantes par ce groupe. Ce sont en fait des fonctions polynomiales en certains invariants (angle, produit scalaire, aire, longueur...). On peut de plus trouver toutes les relations entre ces invariants et chacune de ces relations produit un théorème géométrique.

La réforme des maths modernes inspirée par Bourbaki a donc préféré mettre l'accent sur l'algèbre linéaire et les transformations (groupes). Cependant l'importance que la théorie donne aux invariants avait été négligée, d'ailleurs les programmes actuels minorent encore leur importance.

Basés sur cette brillante étude, les auteurs proposent :

– de développer la géométrie dans l'espace (étude des polyèdres, formule d'Euler, aire des triangles sphériques...).

– renforcer le rôle des invariants et réhabiliter le cas d'égalité (isométrie) des triangles.

– insister sur l'étude et la construction de lieux géométriques.

[2] On peut regretter que l'éditeur ait sabordé la bibliographie

– initier les élèves de terminale S à une géométrie riche (par exemple la géométrie anallagmatique associée au groupe $PGL_2(\mathbf{C})$ agissant sur la sphère de Riemann) pour confronter les élèves à une réelle complexité.

Pour mener cela à bien, il faudra développer la pensée géométrique, par exemple définir l'intégrale comme une aire, apprendre aux élèves à voir dans l'espace avec des outils informatiques ou avec des ciseaux et du carton pour construire des polyèdres, apprendre aux élèves à raisonner. Et surtout pour arriver à mettre en œuvre ces propositions, il faudra développer la formation initiale et continue en géométrie des enseignants de mathématiques, en commençant par exemple par réintroduire de la géométrie en DEUG *(où on se focalise énormément sur l'algèbre linéaire routinière).*

Les auteurs ont fait une analyse scientifique très intéressante des programmes de mathématiques et de leurs évolutions. Je ne suis pas compétent pour évaluer s'il faut renforcer le rôle des invariants, réhabiliter le cas d'égalité (isométrie) des triangles..., mais leurs arguments me semblent justes.

Il me semble néanmoins que ce rapport a plusieurs défauts, dont un au moins est inhérent à la mission de la commission Kahane. Ce rapport est en quelque sorte une réponse aux attaques proférées à l'encontre des mathématiques et à l'inquiétude face à la faiblesse des programmes et des manuels de mathématiques. Ces manuels où les théorèmes n'avaient pas de démonstration, ni même la mention « admis », ne faisaient pas clairement la distinction entre une définition et un théorème. Et pour beaucoup d'élèves de collège et de lycée, les maths pouvaient réellement devenir une matière où l'on répète des exercices de style sans queue ni tête. Avec de tels programmes et des exigences si faibles, les mathématiques ne finiraient-elles pas par connaître le même sort que le latin et grec d'autrefois ?

Cette commission avait des limites implicites fixées par les ministres. Elle ne devait pas parler du volume horaire, ni d'une réforme du collège unique, ni des 80% d'une classe d'age au bac... Bref elle ne devait pas critiquer la politique de l'Éducation nationale. Pourtant il suffit de lire le programme de terminale S, pour se rendre compte qu'il est impossible d l'enseigner décemment en 5h par semaine. Et il faut aux enseignants beaucoup de virtuosité pour trouver le temps de faire des démonstrations, d'exhiber des contre-exemples qui montrent la justesse des hypothèses, d'ailleurs pour certains inspecteurs ces contre exemples et démonstrations sont inutiles. Je pense que la commission aurait dû se pencher un peu sur ce problème, il faut avoir le courage de dire qu'avec 5 heures par semaine il faut réellement alléger le programme et pas comme on l'a fait jusqu'alors en allégeant les exigences, les démonstrations, mais en supprimant réellement certaines parties du programme ; par exemple les nombres complexes de terminale S ne servent qu'à étudier les similitudes et on ne s'en sert pas pour résoudre les équations du second degré... Ce problème de l'inadéquation entre la rigueur nécessaire à l'enseignement des mathématiques et le volume horaire est un exemple parmi d'autres qui fait qu'à mon avis la faiblesse des étudiants en mathématiques n'est pas seulement le fait du programme mais (peut-être surtout) d'un manque de moyens horaires et donc humains. La commission a pointé le manque de moyens matériels dédiés à l'enseignement des mathématiques et a proposé la création de véritables laboratoires de sciences mathématiques dotés de moyens comparables à ceux de physique et c'est là une très bonne proposition.

Les attaques contre les mathématiques ont (paraît-il) été proferées à l'encontre du conservatisme et du corporatisme des mathématiciens et donc cette commission n'avait pas le droit d'apparaître comme éloignée des réalités du collège et du lycée. Cependant dans cette commission, il n'y a pas de professeur de collège (et a fortiori de professeur des écoles). Certaines propositions des rapporteurs sur la géométrie sont très ambitieuses, audacieuses mais irréalisables et irréalistes voire dangereuses.

Beaucoup d'enseignants de collèges et de lycée restent dubitatifs ... Combien d'enseignants d'université sont capables d'expliquer sans préparation la classification des polyèdres réguliers, combien peuvent prétendre connaître la géométrie anallagmatique, sans doute très peu et pas moi en tout cas, même si je trouve qu'il s'agit là de belles maths. Enfin, je ne pense pas que j'aurais été capable de comprendre cela au lycée.

Un autre point corporatiste est la proposition « [d']établir le principe d'un crédit de formation que tous les professeurs pourraient utiliser au cours de leur carrière (pour les professeurs de spéciales, ce crédit formation pourrait prendre la forme d'une année sabbatique, avec affectation dans une université ou un centre de recherche de façon à assurer leur cohérence avec l'enseignement supérieur). » Je suis plutôt pour la partie de la proposition qui n'est pas entre parenthèses. Je pense que la proposition entre parenthèses est soit cynique (seuls les étudiants de classe prépa peuvent réussir en second cycle universitaire, et l'enseignement supérieur commencerait en second cycle), c'est faire d'une réalité malheureuse un projet éducatif. Soit corportatiste (les professeurs de spéciales sont des professeurs qui jouissent déjà de beaucoup d'avantages et leurs cours s'arrêtent fin avril), et que je sache, on en compte très peu qui au printemps viennent peupler les IREM et salle de séminaires.

J'ai dit ce qui m'irritait dans ce rapport et je vais finir par ce qui me plaît. Mon opinion alors pas très étayée était qu'il fallait continuer à enseigner la géométrie et j'adhère complètement au plaidoyer pour la géométrie dont la première vertu pédagogique est d'être le moyen d'un apprentissage à la rigueur et au raisonnement. Aussi, ce rapport n'est pas fermé, on sent à la lecture de la conclusion (« les termes des débats ») qu'il y a encore un travail considérable à faire et que cette conclusion et les propositions qui y sont faites feront avancer la réflexion et nourriront les prochains programmes. On sent d'ailleurs dans le nouveau programme de terminale S un retour à des définitions de limites de suites et de continuités de fonctions, et de théorèmes que l'on prouve avec ces définitions. Peut-être le pire est-il derrière nous !

Gilles Carron, Université de Nantes

Diophantine Geometry. An introduction
MARC HINDRY, JOSEPH SILVERMAN
Graduate Texts in Mathematics **201**, Springer-Verlag, 2000. 558 p. 35,82 €.
ISBN 0-387-98981-1

La géométrie diophantienne se donne pour but d'étudier les solutions d'équations polynomiales en nombres entiers ou rationnels avec les méthodes que fournissent la théorie algébrique des nombres et la géométrie algébrique. Ce livre en propose un certain point de vue (celui de l'approximation diophantienne) et culmine avec la démonstration de la conjecture de Mordell (1922) : *une courbe de genre au moins deux n'a qu'un nombre fini de points rationnels*. Dit plus élémentairement, considérons un polynôme $P \in \mathbf{Q}[X, Y, Z]$, homogène de degré d, tel que la courbe projective plane définie par P dans $\mathbf{CP}^2$ ait r points doubles et aucune singularité d'ordre supérieur ; supposons que $r \leqslant \frac{1}{2}(d-1)(d-2)-2$. Alors, l'équation $P(x, y, z) = 0$ n'a, à homothétie près, qu'un nombre fini de solutions en nombres rationnels.

Ce théorème, dû à Faltings (1983), fait l'objet de la cinquième partie du livre de Hindry et Silverman où est présentée la démonstration de Vojta, simplifiée par Bombieri (1990). En fait, la première démonstration de Faltings, de même que la démonstration par Wiles du « dernier théorème de Fermat », sort techniquement un peu du cadre de l'approximation diophantienne : dans ce livre, il n'est quasiment pas question de représentations galoisiennes ou de formes modulaires.

Même si l'approximation diophantienne peut être d'une sophistication calculatoire voire conceptuelle redoutable, les idées mises en œuvre proviennent très souvent de quelques idées très simples comme le fait qu'un entier non nul est de valeur absolue au moins 1. C'est ce qui fait fonctionner la méthode de « descente infinie » popularisée par Fermat (mais la démonstration antique que $\sqrt{2}$ est irrationnel en est un parfait exemple). C'est aussi ce qui empêche un nombre algébrique d'être trop bien approché par un nombre rationnel.

Il revient à Dirichlet d'avoir prouvé que pour tout irrationel α, il existe une infinité de fractions irréductibles p/q avec $|\alpha - p/q| < 1/q^2$. Liouville (1844) a démontré que si α irrationnel est solution d'une équation polynomiale de degré d à coefficients entiers, on a une inégalité dans l'autre sens : pour p et q premiers entre eux, $|\alpha - p/q| \geqslant c/q^d$, où $c > 0$ est un réel explicite dépendant de α. (Cela lui a permis d'exhiber les premiers nombres transcendants explicites.) Le théorème optimal est dû à Roth (1955), et fait suite à des travaux de Thue (1909), Siegel (1921), Gelfand, Dyson (1947). Il affirme l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, d'un réel $c(\varepsilon) > 0$ de sorte que pour tout rationnel p/q, on ait l'inégalité $|\alpha - p/q| \geqslant c(\varepsilon)/q^{2+\varepsilon}$.

Ce théorème de Roth fait l'objet de la partie D du livre de Hindry et Silverman. Son importance vient de ce qu'il permet de décider de la finitude d'un grand nombre d'équations diophantiennes en nombres entiers. On peut en déduire le théorème de Siegel dont un cas particulier s'énonce ainsi : *si* $P \in \mathbf{Z}[X]$ *est un polynôme à coefficients entiers de degré au moins* 3 *et à racines distinctes, l'équation* $Y^m = P(X)$ *n'a qu'un nombre fini de solutions dans* $\mathbf{Z}$. Cependant, par une limitation fondamentale du raisonnement par l'absurde qui débute la démonstration, la constante $c(\varepsilon)$ n'est pas connue effectivement, si bien que dans la pratique, on ne peut pas obtenir par cette méthode une majoration de la norme d'une solution $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$. Les « minorations de formes linéaires en logarithmes » que fournit la méthode de Baker (1966) sont en revanche effectives et permettent de majorer la norme d'une solution d'une telle équation. (Pour le théorème de Siegel général, la question est encore ouverte.)

La démonstration par Bombieri de la conjecture de Mordell repose sur un autre théorème de finitude fondamental en géométrie arithmétique que je veux expliquer maintenant. Si le cas des courbes de genre $\geqslant 2$ ne fut élucidé qu'à la fin du XX$^{\text{e}}$ siècle, Mordell établit en 1922 un thèorème de structure fondamental concernant les points rationnels des courbes elliptiques, qui sont de genre 1. Une telle courbe a une équation de la forme $Y^2 = X^3 + aX + b$, donc de degré 3. Ainsi, une droite du plan coupe la courbe elliptique en 3 points (éventuellement confondus, ou à l'infini) ; on en déduit un mécanisme de construction de points « par sécante ou tangente » : la droite passant par deux points coupe la cubique en un troisième. Cela fournit une loi de groupe commutatif canonique sur l'ensemble des points rationnels de la courbe elliptique, dont l'élément neutre est le point à l'infini, c'est-à-dire sur l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{Q}^2$ tels que $y^2 = x^3 + ax + b$ auquel on rajoute le point à l'infini. Le théorème de Mordell affirme que ce groupe est un groupe abélien de type fini. Il a été généralisé par Weil (1928) au cas des extensions de type fini de $\mathbf{Q}$ et, plus important, au cas des variétés abéliennes.

Le cas des variétés jacobiennes est crucial et on peut le décrire en termes de courbes. Si $\mathcal{C}$ est une courbe projective lisse, disons sur le corps des rationnels, on peut considérer les diviseurs sur $\mathcal{C}$. Ce sont les combinaisons linéaires formelles à coefficients entiers de points de $\mathcal{C}$; il faut considérer non seulement des points rationnels, mais aussi la somme des conjugués de points dont les coordonnées appartiennent à des extensions algébriques. Le degré d'un diviseur est la somme des coefficients. Parmi les diviseurs de degré 0 figurent les diviseurs de fonctions rationnelles (la somme des zéros moins la somme des pôles). Le théorème de Mordell–Weil affirme que le groupe des diviseurs de degré 0 modulo le sous-groupe des diviseurs de fonctions rationnelles est un groupe abélien de type fini.

Voilà les théorèmes auxquels ce livre est consacré et détaillons-en un peu le plan. Il se divise en une cinquantaine de chapitres, répartis en 6 parties. La partie A est un long survol (160 p.) des résultats de géométrie algébrique mis en jeu à un moment ou à un autre du livre : il y est essentiellement question de courbes, de variétés abéliennes et de la jacobienne. Les théorèmes ne sont le plus souvent pas démontrés mais il y a de nombreux renvois précis à la littérature ; certains résultats comme la construction de la jacobienne sont assez longuement expliqués.

La partie B introduit la notion de *hauteur* : c'est ce qui mesure la taille d'une solution d'un système d'équations polynomiales ou, plus géométriquement, d'un point algébrique d'une variété algébrique projective. Le point de vue adopté part de la description explicite de la hauteur sur l'espace projectif puis détaille son comportement par changement de repère projectif, morphisme, en particulier Veronese, etc. Le point de vue plus moderne que permet la géométrie d'Arakelov est évoqué en quelques pages. On y trouvera aussi l'inégalité de Mumford, point de départ aux preuves de la conjecture de Mordell qu'ont données Vojta et Bombieri.

La partie C est consacrée au théorème de Mordell–Weil. Classiquement, la démonstration est séparée en deux parties. Au cœur de la première (dite « Mordell–Weil faible ») figurent des théorèmes de théorie algébrique des nombres, dûs à Hermite et Minkowski ; ils sont démontrés en appendice. La seconde partie de la démonstration repose sur un argument de descente qui fait usage de la théorie des hauteurs.

La partie D démontre le théorème de Roth et ses applications à certaines équations en nombres entiers (théorème de Siegel, équation $x + y = 1$ en S-unités, etc.). La partie E donne la preuve de la conjecture de Mordell proposée par Bombieri.

Enfin, une dernière partie décrit, sans prétendre les démontrer, des travaux plus avancés tels que la démonstration par Faltings d'une généralisation de la conjecture de Mordell qu'avait énoncée Lang. Cette preuve est d'ailleurs inspirée de l'approche de Vojta. On y trouvera aussi une agréable présentation d'un réseau de conjectures et de résultats, initiés par Batyrev et Manin, visant à comprendre le comportement (nombre, répartition) des points de hauteur $\leqslant B$, lorsque B tend vers l'infini.

Ce livre contient aussi de nombreux exercices. Certains sont de pure routine, d'autres sont de jolis théorèmes pas forcément élémentaires. Une longue table des notations et un index de près de 30 pages closent un livre qui propose ainsi un parcours accessible et détaillé à travers un grand nombre de résultats cruciaux et difficiles de la géométrie arithmétique du XX^e^ siècle.

Une note un peu négative pour finir. Dans ce livre, Hindry et Silverman ont pris le parti d'un exposé le plus élémentaire possible, essayant de supposer du lecteur le moins de connaissances préliminaires possibles. Les longs rappels de géométrie algébrique de la partie A, même s'ils sont plutôt bien faits et seront sûrement utiles aux lecteurs de ce livre, ne permettront à mon avis pas à un étudiant, disons en thèse, l'économie d'un apprentissage indépendant de la théorie des courbes et des variétés abéliennes. De même, j'aurais bien aimé qu'un point de vue moderne soit plus systématiquement employé. C'est le cas pour la démonstration du théorème de Chevalley–Weil proposée en exercice. Il aurait aussi été possible de présenter entièrement la théorie des hauteurs via la théorie d'Arakelov. Certes, tout ceci nécessite le langage des schémas, notamment sur $\mathbf{Z}$, mais les travaux futurs en géométrie arithmétique pourront-ils réellement s'en passer ?

C'est un travail immense que les auteurs de ce livre ont accompli, offrant à quiconque intéressé par ces développements majeurs de la géométrie diophantienne la possibilité d'en pénétrer les arcanes. Il s'insérera avec profit dans toute bibliothèque, par exemple à côté des livres de Silverman sur les courbes elliptiques !

Antoine Chambert-Loir, École polytechnique

Spectral Methods of Automorphic Forms, Second Edition
Henryk Iwaniec
Graduate Studies in Mathematics, Volume 53, American Mathematical Society, Revista Matemática Iberoamericana, 2002. 220 p. ISBN 0-8218-3160-7. 49 \$.

Pour obtenir une forme automorphe, on commence par fabriquer une variété riemannienne G/K à l'aide d'un groupe de Lie G et d'un sous-groupe K fermé dans G. On fait agir là dessus, discrètement, un groupe Γ. Une *fonction* automorphe est une fonction sur G/K invariante par l'action de Γ. C'est une *forme* automorphe si, en plus, elle est vecteur propre de tous les opérateurs différentiels invariants par G.

Dans le présent ouvrage, Iwaniec considère le cas relativement simple où $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et $K = \mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$. La variété G/K est alors isomorphe au demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ muni de la métrique hyperbolique fournie par

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

et tous les opérateurs différentiels invariants par G sont des polynômes à coefficients constants de l'opérateur de Laplace

$$\Delta = y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$$

Le groupe Γ est un groupe fuchsien de première espèce, dont l'exemple le plus courant est le groupe modulaire $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Parmi ceux-ci, les sous-groupes dits « de congruence » sont particulièrement intéressants car ils permettent de considérer les opérateurs de Hecke qui constituent un outil puissant en théorie des nombres. On note F un domaine fondamental de Γ dans $\mathbb{H}$, c'est-à-dire, approximativement, un domaine de $\mathbb{H}$ qui est un système de représentants de $\Gamma\backslash\mathbb{H}$. Il peut avoir ce qu'on appelle des « pointes », dans la direction $\mathrm{Im}\, z = \infty$ ou sur le bord réel de $\mathbb{H}$. Une fonction automorphe admet un développement de Fourier au voisinage de chaque pointe.

Ces objets sont présentés dans les deux premiers chapitres. Ensuite, on s'intéresse à l'espace de Hilbert des fonctions automorphes de carré intégrable :

$$\mathcal{L}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = \left\{ f \,:\, \Gamma\backslash\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C} \quad | \quad \int_F |f(z)|^2 d\mu(z) < \infty \right\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_F f(z)\bar{g}(z)d\mu(z)$$

qui est stable sous l'action de Δ, et on étudie la décomposition spectrale de Δ dans $\mathcal{L}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$. On démontre que $\mathcal{L}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ est la somme orthogonale de la complétion hilbertienne de deux sous-espaces stabilisés par Δ :

$$\mathcal{L}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = \tilde{\mathcal{C}}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \oplus \tilde{\mathcal{E}}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$$

$\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ est l'ensemble des fonctions cuspidales, c'est-à-dire les fonctions automorphes pour lesquelles le terme constant du développement de Fourier est nul en chaque pointe de F. Le spectre de Δ sur cet espace est discret.

$\mathcal{E}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ est un ensemble de fonctions qu'on appelle les « séries d'Eisenstein tronquées ». Il se décompose lui-même en une somme orthogonale de sous espaces stabilisés par Δ :

$$\mathcal{E}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = \mathcal{R}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \bigoplus_{\mathfrak{a}} \mathcal{E}_{\mathfrak{a}}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$$

où $\mathfrak{a}$ parcourt l'ensemble des pointes de F. Le spectre de Δ dans $\mathcal{R}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ est discret et contenu dans $[0, \frac{1}{4}[$. Le spectre de Δ sur $\mathcal{E}_{\mathfrak{a}}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ est absolument continu et décrit uniformément le segment $[\frac{1}{4}, \infty[$ avec multiplicité un.

Nous arrivons alors au chapitre 8, où l'on majore les coefficients de Fourier des formes automorphes. Ces considérations techniques seront utiles dans la suite du livre, pour vérifier la congruence de diverses séries. Dans le cas où Γ est un groupe de congruence, on peut améliorer les majorations déjà obtenues en utilisant les opérateurs de Hecke. Le chapitre 9 nous initie aux sommes de Kloosterman.

Au chapitre 10, on démontre la formule des traces de Selberg. C'est une application de ce qui précède dans la mesure où l'on commence par réaliser la décomposition spectrale d'un certain opérateur. En parallèle, on définit la fonction zêta de Selberg associée à Γ, on la prolonge et on compte ses zéros et ses pôles.

Les trois derniers chapitres décrivent des problèmes en pleine évolution et donnent quelques exemples de l'état de la recherche en la matière.

Au chapitre 11, en appliquant la formule des traces, on évalue le nombre de valeurs propres du Laplacien qui sont inférieures à un réel T. On discute ensuite de l'existence et de la répartition, dans le spectre discret, de valeurs propres comprises entre 0 et $\frac{1}{4}$, qui sont malvenues car elles perturbent les résultats.

Au chapitre 12, on considère un domaine D de $\mathbb{H}$ et on compte le nombre de points d'une orbite donnée de Γ qui se trouvent dans D. C'est encore une application de la décomposition spectrale.

Le chapitre 13 enfin, est consacré à une question qui passionne les physiciens : dans le cas où Γ est un sous-groupe de congruence, on considère un système orthonormé $\{u_j(z)\}$ de fonctions cuspidales qui sont à la fois des vecteurs propres du Laplacien, associées la valeur propre λ_i, et des vecteurs propres des opérateurs de Hecke, et on majore $|u_j|$ en fonction de $|\lambda_j|$ lorsque $|\lambda_j|$ tend vers ∞. Curieusement, on obtient plus facilement une majoration en moyenne qu'une majoration individuelle. Ce phénomène est dû au fait que l'on dispose d'une formule des traces. On décrit alors une méthode d'amplification qui permet de raffiner ces majorations, et on termine en décrivant la conjecture ergodique.

Comme Iwaniec le dit lui-même dans la préface, ce livre n'a pas la prétention d'être exhaustif sur le sujet, sans quoi il serait devenu désagréablement gros. Pour la même raison, Iwaniec ne fournit pas toujours tous les détails des démonstrations, « détails » qui ne sont parfois pas évidents à reconstituer, mais il indique les références permettant au lecteur perplexe de remonter à la source.

L'ensemble constitue un ouvrage très intéressant et bien structuré. Il commence par des considérations assez simples et débouche sur des problèmes ouverts très actuels. Il s'agit donc d'une bonne passerelle vers la recherche pour toute personne qui voudrait s'initier à la théorie analytique des nombres.

Louise Nyssen, Université Louis Pasteur (Strasbourg 1)

Les publications de l'Académie royale des sciences de Paris (1666-1793)
R. Halleux, J. Mc Clellan, D. Berariu, G. Xhayet, éd.
2 tomes, coll. de travaux de l'Académie internationale d'histoire des sciences « De diversis artibus » dir. par Emmanuel Poulle et Robert Halleux, Turnhout : Brepols, 2001.

Ce livre constitue un précieux outil de travail pour tous les chercheurs qui s'intéressent à la science académique des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles. Il se présente en deux volumes, dont le premier est consacré à la description bibliographique (en 556 pages) des ouvrages publiés par l'Académie royale des sciences et des mémoires qu'ils contiennent. Le second comprend une étude quantitative par James Mc Clellan ainsi que les index des auteurs, des personnages cités dans les titres et des sujets traités. Cette publication est l'aboutissement d'un projet, déjà ancien, mis en œuvre sous la direction de René Taton au Centre Alexandre Koyré. Elle a aussi bénéficié de la recherche menée naguère par Anne-Sylvie Guénoun[3], dont les classifications ont été utilisées pour la description bibliographique des publications de l'Académie.

Chronologiquement, les auteurs distinguent deux périodes : celle de l'« Ancienne Académie », antérieure à la réforme des statuts de 1699 ; celle allant de 1699 à 1793, date de la suppression de l'Académie, caractérisée par l'existence de collections déjà répertoriées.

Le mathématicien trouvera, dans la première partie, une description bibliographique complète de recueils rares, comme *Divers ouvrages de mathématique et de physique* (1693), contenant les travaux de mathématiciens aussi prestigieux que Frénicle, Roberval, Huygens ou La Hire. Il sera ravi d'avoir sous la main la description de l'ouvrage que Thévenot a tiré des manuscrits de la bibliothèque du roi et intitulé *Veterum mathematicorum ... opera* (1693) ou encore les *Observations physiques et mathématiques* (1688 et 1692) effectuées en Asie par les Jésuites émissaires de Louis XIV. On y trouve également des publications qui préfigurent les futurs *Histoire et Mémoires,* comme celles de Jean-Baptiste Du Hamel portant sur les activités quasi journalières au sein de l'Académie ou les volumes de mémoires tirés des registres de l'Académie (1692 et 1693). En effet, si la discrétion semble avoir été de rigueur dans les premières décennies de son existence, l'Académie commence à partir de 1690 à donner une certaine publicité à ses travaux.

La deuxième partie, consacrée aux publications du XVIII^e^ siècle, est subdivisée en 8 sections dont celle présentant la série des *Histoire et mémoires de l'Académie royale des sciences* (1699-1790) est de loin la plus volumineuse puisqu'elle décrit 3405 mémoires rassemblés en 93 volumes. Seule l'édition originale a été prise en compte, alors que l'histoire éditoriale de cette série est extrêmement compliquée. Il existe des éditions ultérieures, y compris étrangères (imprimées à La Haye ou à Amsterdam). De façon générale, il n'est pas facile de s'y retrouver. La salle des catalogues de la Bibliothèque nationale de France, tient à la disposition de ses lecteurs un fascicule (tapuscrit) mettant de l'ordre dans les diverses éditions de cette série.

En 1727, l'Académie des sciences a pris la décision de rendre publics certains de ses travaux menés avant l'instauration de la série dite *Histoire et mémoires* et a fait paraître, de 1729 à 1734, onze tomes en quatorze volumes. L'inventaire de ces volumes, dont le contenu, hétéroclite, va de l'histoire de l'Académie (tomes I et II) à la reproduction de près d'une centaine d'articles du Journal des savants (tome X), est

[3] Cette recherche a été publiée dans le très utile guide des Archives de l'Académie : *Histoire et mémoire de l'Académie des sciences.* Guide de recherches, sous la direction d'Eric Brian et de Christiane Demeulenaere- Douyère, Paris : Lavoisier. Tec&doc, 1996.

bien sûr précieux, comme aussi celui d'un certain nombre de volumes indépendants (on en compte 19 sans que la liste soit complète), approuvés par l'Académie et imprimés sur les presses de l'Imprimerie royale au format de la collection *Histoire et mémoires.* Les problèmes bibliographiques posés par ce dernier ensemble sont considérables et ne sont pas tous résolus dans le volume sous examen.

Quatre autres séries de publications sont décrites en détail : les recueils des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie (9 volumes couvrant la période 1720 à 1772) ; les *Machines et inventions* approuvées par l'Académie (7 volumes couvrant la période de 1666 à 1754) ; les *Mémoires* dits des « savants étrangers » (11 volumes, publiés entre 1750 et 1786, réunissant les mémoires présentés en séance par des auteurs n'appartenant pas à la Compagnie) et finalement la fameuse *Description des arts et métiers,* dont l'idée remonte à Colbert et dont l'histoire éditoriale est d'une grande complexité (et non élucidée ici). Si la série *Histoire et mémoires* était réservée aux travaux des académiciens, ces dernières collections étaient plus ouvertes et on trouve parmi les auteurs beaucoup de membres de sociétés savantes de province ou du public cultivé, mais aussi des artisans et inventeurs dont les noms ne nous disent plus grand'chose.

James Mc Clellan a inclus dans le second tome (t. 2, p. 7-36) une étude statistique des *Mémoires annuels de l'Académie royale des sciences,* mettant en œuvre une approche globale de la production de cette institution scientifique prestigieuse. Pour lui, il s'agit de : « the most significant corpus of scientific research produced in the period » (p. 7). Excepté quatre, les mémoires de ce corpus sont écrits en français. Sur les 713 académiciens que comptait l'institution de 1699 à 1790, 253, c'est-à-dire un peu plus d'un tiers, ont publié dans les *Mémoires.* Or, 55% des académiciens sont des correspondants non résidants à Paris. Lorsqu'on les exclut, le pourcentage d'académiciens ayant publié dans les Mémoires monte à 71%. L'analyse statistique montre que le périodique est dominé par un noyau de pensionnaires qui l'utilisent pour diffuser les résultats de leur recherche. Jacques Cassini avec 149 mémoires, Philippe de la Hire avec 148 et Jérôme de Lalande avec 133 mémoires publiés sont les auteurs les plus prolifiques. McClellan a mis en évidence l'existence de 17 dynasties familiales (dont les Cassini), composées de 44 individus, responsables pour un tiers de toutes les publications.

Lorsqu'on classe les mémoires par disciplines, en suivant le classement contemporain effectué par les secrétaires de l'Académie, on constate une forte prédominance de l'astronomie (plus d'un tiers), les mathématiques ne représentant que 8,7%. Le tableau change si l'on regroupe les disciplines en deux classes, celle des sciences physiques (regroupant depuis 1699 l'anatomie, la botanique et la chimie) et celle des sciences mathématiques (comprenant la géométrie, l'astronomie et la mécanique). Ces dernières représentent alors 71% des mémoires. De manière générale, la productivité de l'Académie connaît une baisse sensible entre 1710 et 1730. Pour les mathématiques, après un pic au début des années 1730, elles déclinent jusqu'à devenir pratiquement invisibles dans les années 1750 et 1760. À partir de 1765, le nombre de mémoires de mathématiques commence à croître et reste relativement élevé jusqu'à la fin de la période considérée. Aucun effort n'est fait pour expliquer ces variations.

Cet outil de recherche, dont la présence dans les bibliothèques est indispensable, vient un peu tard, si l'on considère que la collection complète d'*Histoire et Mémoires* est accessible en ligne. Il rendra cependant des services non négligeables pour les autres collections, moins bien constituées et répertoriées. Avec le guide des archives déjà mentionné, nous disposons ainsi d'instruments valables rendant les collections manuscrites et publiées de l'Académie royale des sciences aisément accessibles.

Jeanne Peiffer, CNRS, Centre Alexandre Koyré, Paris

Floer homology groups in Yang-Mills theory
S. K. Donaldson
Cambridge University Press, 2002. 244 p. ISBN 0521808030. 67,24 €.

L'homologie de Floer (dans sa version Yang-Mills ou de Donaldson-Floer, la seule dont on parlera ici) associe des « groupes d'homologie » $HF_*(Y^3)$ aux variétés de dimension 3. Or, depuis les années 80, une abondance d'invariants topologiques dans cette dimension ont été mis en évidence, comme par exemple les invariants de Witten-Reshetikhin-Turaev, ou le volume hyperbolique. Parmi eux, la construction de Floer a cette specificité d'être liée à la topologie en quatre dimensions.

Du point de vue de la géométrie différentielle, l'idée de base est assez simple. Le point de départ est une des équations célèbres de la théorie de jauge sur une variété X^4 ; pour la théorie de Donaldson-Floer, ce sera l'équation d'antiautodualité

$$F_{\mathbf{A}} = - *_X F_{\mathbf{A}}, \tag{1}$$

où $\mathbf{A}$ est une connexion sur un fibré donné, dont le groupe structural est $SU(2)$ ou $SO(3)$ (en principe, tout autre groupe de Lie compact semi-simple pourrait être utilisé, mais la théorie devient alors beaucoup moins maniable, et elle n'est que peu développée). Pour utiliser cette équation dans la topologie en 3 dimensions, on pose $X^4 = \mathbb{R} \times Y^3$. Seules les solutions de (1) d'énergie finie,

$$E(\mathbf{A}) = \int_X |F_{\mathbf{A}}|^2 < \infty, \tag{2}$$

sont retenues. Dans le cas des variétés X^4 compactes, la théorie de Donaldson décrit la structure de l'espace de modules de toutes les solutions de (1), en s'appuyant sur des résultats d'analyse de Uhlenbeck et Taubes. Le projet naturel est de généraliser cette description au cas des variétés non compactes $X^4 = \mathbb{R} \times Y^3$. On peut aussi également admettre n'importe quelle autre variété avec le même type de structure de produit $\mathbb{R}^+ \times Y^3$ à l'infini (du point de vue topologique, c'est pratiquement la même chose que les variétés compactes à bord). Même dans le cas compact, cette situation apparaît comme cas limite : l'exemple typique est le théorème de Donaldson sur les sommes connexes $X = X_1 \# X_2$, dont la démonstration repose sur l'utilisation des métriques riemanniennes sur X admettant un plongement (isométrique ou conforme) de $[-R; R] \times S^3$, avec $R \gg 0$.

Revenons au cas initial de $X^4 = \mathbb{R} \times Y^3$: il convient de transformer les connexions antiautoduales $\mathbf{A}$ en « jauge temporelle ». Elles sont alors données par une famille de connexions A_t sur Y. Pour $E(\mathbf{A}) = 0$, la famille est constante, et toute connexion A_t est plate. Le lien avec le groupe fondamental de Y qui s'établit ainsi est assez peu utilisé dans le développement de la théorie elle-même, mais il s'avère néanmoins important dans les applications topologiques. Les autres solutions, avec $E(\mathbf{A}) > 0$, sont les véritables instantons. Ce sont aussi les orbites du gradient de la fonctionnelle de Chern-Simons,

$$\theta(A_t) = \int_Y Tr(A_t \wedge dA_t + \tfrac{2}{3} A_t \wedge A_t \wedge A_t),$$

dont les connexions plates sont les points critiques. Cela explique que la théorie de Floer soit calquée sur le modèle de la théorie de Morse en dimension finie. En particulier, les invariants topologiques qu'on obtiendra ne seront plus des « nombres d'intersection » comme le sont les invariants de Donaldson, mais plutôt des « groupes d'homologie » $HF_*(Y)$. Le premier article de Floer sur le sujet [6] était consacré à la définition de ces groupes pour les variétés avec $H_1(Y) = 0$. Plus tard, il en avait introduit une version modifiée, pour les variétés avec $H_1(Y) \neq 0$, qui utilise des fibrés $SO(3)$ dont la deuxième classe de Stiefel-Whitney satisfait $\langle w_2(P), [S]\rangle \neq 0$ pour au moins une surface orientée S dans Y.

Une autre approche de l'homologie de Floer passe par sa structure formelle idéalisée. Le cadre naturel serait alors la définition d'une théorie quantique des champs topologique (TQCT) selon Atiyah [1]. Si on suppose que les invariants de Donaldson font partie d'une TQCT (ce qui est fortement motivé par la physique), il doit leur être adjoints nécéssairement des invariants topologiques $\mathcal{H}(Y^3)$ en dimension 3, qui sont des espaces vectoriels, ou plus généralement des objets dans une catégorie tensorielle avec dualité. Pour une variété à bord $\partial X^4 = Y^3$, on aurait alors des invariants « relatifs »

$$Z(X) \in \mathcal{H}(Y),$$

dont la propriété essentielle est une formule de recollement. Pour les invariants de Donaldson, les $HF_*(M)$ devraient jouer le rôle de $\mathcal{H}(Y)$. En fait, les instantons ne se comportent jamais exactement comme le requiert le formalisme de TQCT. Tout d'abord, il n'existe pas de définition de $HF_*(Y)$ et $Z(X)$ qui soit satisfaisante dans tous les cas. C'est loin d'être une question technique : la formule de recollement dans sa forme la plus simple serait en contradiction avec certains résultats profonds des invariants de Donaldson, notamment la formule d'éclatement de Fintushel et Stern [5]. D'autre part, les axiomes d'Atiyah ne recouvrent pas toutes les propriétés fondamentales de l'homologie de Floer.

À la lecture du livre de Donaldson, on s'aperçoit assez vite qu'il est scindé en deux parties, qui s'adressent à des publics légèrement différents. La première partie (chapitres 2 à 5) avait été esquissée lors d'un groupe de travail organisé par Donaldson, Furuta et Kotschick en 1988. Des versions préliminaires du manuscrit, distribuées aux étudiants en thèse à Oxford, ont déjà contribué à la formation de plusieurs générations de géomètres. Cette partie rassemble tous les résultats nécessaires pour comprendre en détail la construction de Floer. Elle aboutit à la définition de $HF_*(Y)$ dans les deux versions introduites par Floer. Les connaissances nécéssaires pour aborder sa lecture sont assez limitées : des bonnes bases de géométrie différentielle, et une familiarité avec les éléments de la théorie des instantons (les premiers chapitres de [3] suffiront largement). Comme dans ses autres écrits, Donaldson nous offre souvent plusieurs points de vue sur le même phénomène. J'en donne un exemple élémentaire. On sait que les connexions antiautoduales sont aussi des solutions de l'équation de Yang-Mills,

$$d^*_{\mathbf{A}} F_{\mathbf{A}} = 0.$$

Ce qui est beaucoup moins évident est que dans le cas de $X^4 = \mathbb{R} \times Y^3$, on peut ramener ce fait à une propriété générale de la mécanique classique : pour une particule dans un potentiel $V(x) = -\frac{1}{2}|\nabla_x f|^2$, les orbites du gradient $x' = \nabla f$ sont aussi des solutions de l'équation de Newton $x'' = -\nabla V$. Les nombreuses observations de ce type, dont l'intention est d'amener le lecteur à une compréhension plus complète des bases de la théorie de jauge, ne constituent quand même pas le contenu principal de cette partie du livre, qui est essentiellement consacrée à l'analyse linéaire (théorie de l'indice pour les opérateurs elliptiques) et non linéaire (analyse du comportement des instantons) sur les variétés $\mathbb{R} \times Y^3$. Une question fondamentale est le comportement des instantons à l'infini. Si $\mathbf{A}$ est en jauge temporelle et satisfait (2), les A_t pour $t \to \infty$ convergent vers une connexion plate A_∞. Si la représentation ρ_∞ de $\pi_1(Y)$ associée à A_∞ est non dégénerée, ce qui veut dire que $H^1(Y_3; \rho_\infty) = 0$, la convergence $A_t \to A_\infty$ est à vitesse exponentielle dans toute topologie raisonnable. Dans le cas dégéneré, la vitesse peut n'être que polynomiale, et la convergence elle-même est beaucoup plus difficile à démontrer. Avant la parution du livre de Donaldson, on trouvait des résultats de ce type principalement dans les livres de Morgan, Mrowka, Ruberman [8] et Taubes [9], dont le but était de pousser l'analyse à ses limites, et qui s'adressaient surtout aux spécialistes. Les arguments de Donaldson sont toujours exceptionnellement clairs, ce qui devrait faciliter une adaptation eventuelle aux autres théories semblables (Seiberg-Witten ou Gromov-Witten).

La deuxième partie du livre (chapitres 6 à 8) étudie les limites de la théorie établie par Floer, en relation avec le formalisme des TQCT. La plupart du contenu est nouveau, ou au moins n'avait jamais été publié avant. Par exemple, le chapitre 7 approfondit la discussion du rôle de la connexion triviale en théorie de Floer. En partant de l'analyse des espaces de modules des instantons qui sont asymptotiques à cette connexion, on est amené vers une nouvelle définition de l'homologie de Floer pour les variétés avec $H_1(Y) = 0$, qui est à mi-chemin entre celle de Floer et la théorie équivariante de Austin et Braam. Cette nouvelle « homologie » est un objet dans une catégorie tensorielle introduite à propos, la catégorie des « $(\mathcal{F}, \sigma)$-complexes ». Le produit tensoriel des $(\mathcal{F}, \sigma)$-complexes correspond à la somme connexe des trois-variétés. Cette observation est une version très nette des formules trouvées par Fukaya *et al.* pour l'homologie de Floer des sommes connexes. Le dernier chapitre, moins complet que les autres, traite de la relation entre recollement des instantons et la formule d'éclatement pour les invariants de Donaldson. Il contient des indications précises pour des travaux futurs, dont le but serait d'obtenir une homologie de Floer pleinement satisfaisante. Cette théorie devrait surtout nous révéler pourquoi des fonctions elliptiques paraîssent dans la formule d'éclatement et ailleurs en théorie de Donaldson (la démonstration de Fintushel et Stern est indirecte, et n'explique pas le lien entre ces fonctions et la géométrie des espaces de modules des instantons).

Comme Donaldson le souligne lui-même au début, il y a plusieurs propriétés importantes de l'homologie de Floer dont le livre ne parle pas. Je n'en vais mentionner qu'une : la suite exacte de Floer [2]

$$\cdots \to HF_*(Y) \longrightarrow HF_*(Y_{K,0}) \longrightarrow HF_*(Y_{K,1}) \to HF_{*+1}(Y) \to \dots \tag{3}$$

pour K un nœud dans une variété Y avec $H_1(Y) = 0$, et $Y_{K,k}$ les variétés obtenues de (Y, K) par chirurgie de Dehn. Comme cette suite est exacte, on voit que (sauf dans le cas où tous les groupes de Floer sont triviaux) au moins une des flèches doit être non nulle. Ces flèches étant données par des invariants de Donaldson relatifs, on en déduit l'existence d'instantons sur certaines quatre-variétés (non compactes). Si on réflechit à la démonstration de (3), on voit que la construction de ces instantons passe par des voies bien connues (homotopie et recollement), en partant des connexions plates. Quand même, le formalisme algébrique rend cette méthode assez efficace, ce que nous ont appris Fintushel et Stern [4] en l'appliquant au calcul des invariants de Donaldson d'une surface $K3$. A mon avis, c'est la seule démonstration de l'existence d'instantons sur une surface algébrique qui n'utilise pas du tout la géométrie algébrique. Parmi les autres résultats récents en théorie de Donaldson-Floer, il faut absolument mentionner ceux de Frøyshov et Muñoz sur la condition de « type fini » ; l'article de Frøyshov [7] peut très bien servir comme complément à la lecture du livre de Donaldson. Enfin, je voudrais signaler les travaux en cours de Kronheimer et Mrowka sur la propriété P pour les nœuds. Soit K un nœud dans $Y = S^3$ de genre supérieur à 1. En utilisant les feuilletages tendues à la Gabai, et leur relation avec les structures de contact tendues, on peut montrer que l'homologie de Seiberg-Witten-Floer de $Y_{K,0}$ ne s'annule jamais. Un lien tentatif entre cette homologie et celle de Donaldson-Floer a été établi par les travaux de Pidstrigach-Tyurin et Feehan-Leness. L'idée de Kronheimer et Mrowka est d'en déduire que $HF_*(Y_{K,0}) \neq 0$. Par (3) on aurait alors $HF_*(Y_{K,1}) \neq 0$, donc $Y_{K,1}$ n'est jamais simplement connexe, ce qui est un cas particulier de la propriété P pour K. Si j'ai donné une description un peu hâtive et imprécise de ce programme, ce n'est que pour mettre en évidence l'importance de l'homologie de Donaldson-Floer, même dans le moment actuel où l'enseignement de la théorie de jauge se réduit souvent à l'étude des équations de Seiberg-Witten. Avec la parution du livre de Donaldson, l'accès aux mystérieux $HF_*(Y)$ est devenu beaucoup plus facile. J'espère qu'une nouvelle génération d'étudiants va savoir en tirer profit.

Références

[1] M. Atiyah – « Topological quantum field theories », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1988), no. 68, p. 175–186 (1989).

[2] P. J. Braam & S. K. Donaldson – « Floer's work on instanton homology, knots and surgery », in *The Floer memorial volume*, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, Basel, 1995, p. 195–256.

[3] S. K. Donaldson & P. B. Kronheimer – *The geometry of four-manifolds*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1990, Oxford Science Publications.

[4] R. Fintushel & R. J. Stern – « Using Floer's exact triangle to compute Donaldson invariants », in *The Floer memorial volume*, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, Basel, 1995, p. 435–444.

[5] ———, « The blowup formula for Donaldson invariants », *Ann. of Math. (2)* **143** (1996), no. 3, p. 529–546.

[6] A. Floer – « An instanton-invariant for 3-manifolds », *Comm. Math. Phys.* **118** (1988), no. 2, p. 215–240.

[7] K. A. Frøyshov – « Equivariant aspects of Yang-Mills Floer theory », *Topology* **41** (2002), no. 3, p. 525–552.

[8] J. W. Morgan, T. Mrowka & D. Ruberman – *The L^2-moduli space and a vanishing theorem for Donaldson polynomial invariants*, Monographs in Geometry and Topology, II, International Press, Cambridge, MA, 1994.

[9] C. H. Taubes – *L^2 moduli spaces on 4-manifolds with cylindrical ends*, Monographs in Geometry and Topology, I, International Press, Cambridge, MA, 1993.

Paul Seidel, Imperial College (Londres)