

LIVRES

Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities

C. HERTLING

Cambridge University Press, Cambridge Tracts in mathematics, vol. 151, 2002,
270 p. 62 €. ISBN 0-521-812-968

Quand peut-on dire qu'une déformation d'une structure de produit (commutatif, associatif, avec unité) sur un espace vectoriel de dimension finie est *intégrable*? Posée de manière géométrique, cette question fait l'objet de la première partie du livre de C. Hertling. Il s'agit donc de variétés M dont l'espace tangent en tout point admet une multiplication interne, celle-ci dépendant de manière régulière (C^∞ ou analytique) du point courant sur la variété. Ainsi, le produit de deux champs de vecteurs est un nouveau champ de vecteurs, et il existe un champ distingué : le champ unité. Tout comme il existe une notion de produit scalaire sans courbure (métrique plate), l'auteur développe la notion de multiplication sans courbure, sous le nom de F-variété (F pour Frobenius).

Tout polynôme abstrait en des champs de vecteurs peut s'évaluer sur des covecteurs, définissant ainsi une fonction sur le fibré cotangent. Il peut aussi définir un champ de vecteur, en remplaçant partout où c'est possible la multiplication abstraite par le produit sur la F-variété. Certains polynômes, ainsi réalisés, ont pour valeur le champ nul ; la géométrie de l'ensemble L des points du fibré cotangent ou les fonctions correspondantes s'annulent reflète les propriétés de la multiplication des champs. Ainsi, l'absence de courbure équivaut, sous une hypothèse peu contraignante, au fait que L est une sous-variété lagrangienne (éventuellement singulière) du fibré cotangent.

L'exemple type de F-variété est la base du déploiement universel d'un germe de fonction à point critique isolé, dont l'étude s'est développée vers la fin des années 1960 sous l'impulsion de R. Thom et de V. Arnold. L'auteur utilise pour les F-variétés les outils et les concepts qui ont fait leurs preuves dans la théorie des singularités, en particulier les singularités lagrangiennes (A. Givental).

La seconde partie du livre enrichit la notion de F-variété par l'adjonction d'un produit scalaire non dégénéré sans courbure sur les champs de vecteurs. Les relations de compatibilité entre le produit et le produit scalaire, dites équations WDVV en font une *variété de Frobenius*, au sens donné par B. Dubrovin. Cette notion apparaît dans divers domaines de la géométrie algébrique reliés à la *symétrie miroir* (voir la revue du livre de Yu. Manin dans le numéro 85 de la *Gazette*).

L'auteur expose en détail la construction de structures de Frobenius sur la base du déploiement universel d'un germe de fonction holomorphe à point critique isolé, d'après les travaux de K. Saito, B. Malgrange et M. Saito au début des années 1980. Il faut souligner qu'un tel exposé complet n'existait pas dans la littérature, et que le livre de C. Hertling comble ainsi une lacune. On trouvera aussi une étude détaillée de l'application de périodes sur la « strate à nombre de Milnor constant » de la singularité. Une belle application de la théorie est la construction d'un espace de modules pour les singularités à nombre de Milnor fixé. Le livre se termine par une mystérieuse conjecture sur la variance de la distribution des nombres spectraux associés, par la théorie de Hodge, à un point critique isolé d'une fonction holomorphe.

C. Sabbah

CNRS, École polytechnique, Palaiseau

SMF – Gazette – 95, Janvier 2003

4-manifolds and Kirby calculus

ROBERT E. GOMPF ET ANDRÁS I. STIPSICZ

Graduate Studies in Mathematics, 20. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. 558 p. 65 \$. ISBN 0-8218-0994-6

Ce livre, destiné à un public d'étudiants de troisième cycle et d'enseignants-chercheurs, nous offre une visite guidée dans le monde particulier et complexe des variétés différentiables de dimension quatre.

En 1980, Michael Freedman a donné une classification, rappelée au début de l'ouvrage, des variétés *topologiques* de dimension 4, simplement connexes, compactes, sans bord, à l'aide de la forme d'intersection sur le deuxième module d'homologie de ces variétés et de l'invariant de Kirby-Siebenmann qui produit une obstruction non triviale à l'existence de structures différentiables. Une telle classification est loin d'être achevée pour les variétés différentiables puisque la *conjecture de Poincaré lisse en dimension 4* de l'unicité de la structure différentiable de la sphère S^4 n'est pas encore décidée. Néanmoins, l'étude des variétés différentiables de dimension 4 est un sujet de recherche qui a connu de nombreux progrès spectaculaires au cours des vingt dernières années avec l'arrivée des invariants issus des théories de jauge de Donaldson, puis de Seiberg-Witten, qui permettent de distinguer des structures différentiables. Ces invariants analytiques ont notamment permis à Gompf d'exhiber une infinité de structures différentiables distinctes sur \mathbb{R}^4 .

En 1976, Robion Kirby avait développé des méthodes pour dessiner les variétés différentiables de dimension quatre à l'aide de décompositions en anses associées à des fonctions de Morse sur ces variétés. Ces méthodes, qui permettent au topologue de visualiser les variétés de dimension 4, et qui donnent au livre la moitié de son titre, sont expliquées en détails et avec beaucoup d'exemples dans la deuxième partie de l'ouvrage.

Tout au long du livre, Robert Gompf et András Stipsicz adoptent en effet un point de vue résolument topologique. Ils introduisent avec beaucoup de pédagogie

- les nombreuses structures que peuvent porter les variétés de dimension 4 comme les structures complexes, les fibrations elliptiques, les structures symplectiques, les pincesaux et fibrations de Lefschetz, les surfaces de Stein, ou les structures kähleriennes,
- les opérations qui transforment ces variétés telles que les chirurgies, les éclatements, les plombages, les revêtements ramifiés, et,
- le contexte original de ces structures et opérations en géométrie complexe, symplectique, différentiable ou algébrique ;

et, dès que possible ils expliquent comment dessiner ces structures et ces opérations avec des diagrammes de Kirby.

Les auteurs décrivent un très large panorama récent et bien organisé des obstructions connues pour l'existence des structures citées, des problèmes de réalisabilité de certains invariants par ces structures, des problèmes de classification, et des interférences entre ces structures. La construction d'une famille non dénombrable de variétés différentiables distinctes homéomorphes à \mathbb{R}^4 est aussi détaillée. Beaucoup de démonstrations reposent sur la théorie de jauge et en particulier sur les invariants de Seiberg-Witten. Les auteurs introduisent brièvement cette théorie, et expliquent surtout l'utilisation de ses principaux corollaires, dont la célèbre formule d'adjonction généralisée de Kronheimer et Mrowka, dans leurs esquisses de démonstrations.

Ce livre relate ainsi soigneusement dans un style enlevé et très agréable la plupart des belles idées, comme les anses de Casson, qui ont permis des progrès spectaculaires dans la topologie des variétés de dimension 4. Il comprend de nombreux exercices

de niveau DEA corrigés à la fin de l'ouvrage et de nombreuses illustrations. Les répétitions et les index très complets permettent une lecture partielle très confortable au néophyte ou au chercheur d'un domaine voisin, tandis que le lecteur plus ambitieux est renvoyé aux références originales ou à d'autres bonnes références de l'excellente bibliographie, pour tous les aspects et détails techniques nécessaires qui sont ici assez systématiquement évités.

Je pense que ce livre est indispensable à toutes les bonnes bibliothèques de mathématiques. C'est un bel ouvrage que les chercheurs débutants dans l'étude des variétés de dimension 4, et les chercheurs des domaines voisins apprécieront certainement.

Christine Lescop

Institut Joseph Fourier, Grenoble

Emergence of the Theory of Lie Groups : An Essay in the History of Mathematics 1869-1926

THOMAS HAWKINS

Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences,
Springer-Verlag, 2000, 564 p. 94,95 €. ISBN 0-387-98963-3

Ce livre foisonnant constitue la synthèse et l'aboutissement de trente années de recherches sur la théorie de Lie, depuis sa naissance autour de 1873, jusqu'aux travaux monumentaux d'Hermann Weyl en 1925-26. Cinquante années d'effervescence dont quatre figures se détachent nettement : Sophus Lie bien sûr, puis Wilhelm Killing, Élie Cartan, Hermann Weyl à nouveau, autour desquels s'organisent les quatre parties de l'ouvrage. Mais beaucoup d'autres encore, car l'un des mérites du travail de Hawkins est d'analyser en profondeur les motivations des uns et des autres, comment les idées de chacun s'enracinent dans l'époque et souvent s'en dégagent, comment l'intuition de l'un se développe chez un autre... À une époque où la circulation des idées est beaucoup plus erratique, infiniment moins fluide qu'aujourd'hui, cette analyse nécessite une connaissance profonde des œuvres, bien sûr, mais aussi des influences plus ou moins souterraines, des correspondances, des rencontres, des affinités – exercice dans lequel l'auteur montre assez qu'il excelle. Son livre se lit comme un roman.

L'histoire commence par une rencontre, à Berlin, en 1869. Dans ce temple de l'Algèbre et de la Théorie des Nombres, Felix Klein, vingt ans, et Sophus Lie, vingt-six, se sentent davantage attirés par la géométrie. Klein, déjà mathématicien confirmé, a terminé sa thèse avec Plücker ; Lie n'est qu'un boursier venu de Norvège boire à l'une des sources majeures des mathématiques de l'époque. Tous deux s'investissent dans des problèmes de géométrie projective, l'étude « à la Plücker » de certains complexes de droites, mais c'est Lie qui, le premier, a l'idée radicalement nouvelle d'utiliser des familles, commutatives, de transformations projectives. Klein, qui a entendu Jordan à Göttingen, fait dès l'origine l'analogie avec les travaux d'Abel et le groupe de Galois, et Hawkins décrit dans le détail comment la notion, plus ou moins précise, de « groupe de transformations continues » se dégage peu à peu, comment elle va devenir l'idée fixe de Lie. Levier essentiel : les applications qu'il entrevoit dans le domaine des équations différentielles. Lie reprend à son compte les méthodes d'intégration de Jacobi, les interprète en termes de transformations infinitésimales, et parvient au concept abstrait d'algèbre de Lie, défini en termes de constantes de structures. On voit, d'emblée, et l'on vérifiera tout au long de ses développements, que la géométrie et l'analyse sont au cœur de de la théorie nouvelle.

La théorie de Lie sera mal reçue à Berlin, où l'on ne verra en son créateur qu'un esprit étroit et inculte, n'ayant imaginé qu'une théorie « triviale », aux applications

« insignifiantes ». À Paris, au contraire, l'accueil est enthousiaste. Dès leur première expédition parisienne, au moment précis où paraît le grand *Traité des Substitutions* de Camille Jordan, Lie et Klein sont chaleureusement accueillis par Darboux et son entourage. La guerre de 1870 éclate cependant, Lie soupçonné d'être un espion allemand est jeté en prison. Klein a déjà quitté la France, Lie devra faire de même, mais le contact établi avec Paris sera durable et capital. Deux ans plus tard, Klein rédige le programme d'Erlangen, célèbre aujourd'hui mais très longtemps resté confidentiel. La théorie de Lie ne gagne du terrain que lentement. Elle possède heureusement en Klein un champion d'exception, qui décuplera son influence. En 1884, il envoie Engel à Christiania (aujourd'hui Oslo) afin d'assister Lie dans la rédaction de son grand œuvre : les trois volumes de *Theorie der Transformationsgruppen* paraîtront entre 1888 et 1893. En 1886, il laisse à Lie sa chaire de Leipzig pour gagner Göttingen, où l'école qu'il va fonder supplantera bientôt Berlin. C'est encore lui qui portera les travaux de Lie à la connaissance de Killing, étudiant de Weierstrass gagné par l'essor de la théorie nouvelle, et qui va lui faire profiter pleinement de la puissance algébrique de l'école berlinoise.

Killing concentre ses efforts sur un problème monumental : classifier les algèbres de Lie. C'est lui qui dégage les notions de rang, de racine, de simplicité. Après l'avoir manquée pour une erreur de calcul, il découvre \mathfrak{g}_2 en 1887, et dès l'année suivante donne la liste des systèmes de racines simples possibles, y compris les exceptionnels, dont deux avatars de celui de \mathfrak{f}_4 (il reviendra à Cartan d'en reconnaître l'équivalence). Il ignore, cependant, si ces systèmes proviennent vraiment d'algèbres de Lie – même les groupes symplectiques lui sont inconnus, alors qu'ils sont familiers à Lie depuis longtemps. Et puis Killing juge ses résultats insuffisants : comment dévisser une algèbre de Lie quelconque, connaissant sa partie semi-simple ? comment classifier les algèbres de Lie nilpotentes ? Ses travaux sur ces questions sont d'ailleurs plombés par des hypothèses non démontrées, de sérieuses erreurs même, que le concours d'Engel ne permet de rectifier qu'en partie.

Malgré son inaboutissement, la percée de Killing est spectaculaire. Son écho parvient vite à Paris, car le contact avec Leipzig a été maintenu. Plusieurs normaliens y sont allés recueillir la parole de Lie, dont Vessiot, qui développera la théorie de Galois différentielle initiée par Picard, et puis, en 1891, Tresse. Or Tresse est l'ami d'Élie Cartan et lui parle à son retour d'Allemagne des travaux de Killing, de ses prouesses comme de ses manques. Son enthousiasme semble suffisamment communicatif pour que Cartan s'immerge à son tour dans la théorie de Lie, jusqu'à sa thèse fameuse de 1894, qui refonde magistralement l'étude des algèbres de Lie et comble bien des lacunes laissées par Killing. D'importantes questions subsistent, à l'évidence, mais Hawkins montre excellemment pourquoi, vu le contexte mathématique parisien, Cartan va se tourner vers d'autres voies, plus directement susceptibles d'applications : entre autres la géométrie intégrale, lancée par Poincaré, qui l'amène au calcul extérieur, ou les groupes simples de dimension infinie. Long détour de vingt ans, jusqu'à l'extraordinaire trilogie de 1913-1914 : trois mémoires dans lesquels il dégage la notion de poids, construit les représentations fondamentales des algèbres de Lie simples complexes, et à partir de celles-ci toutes les représentations fondamentales ; puis fait de même dans le cas réel, une fois classifiées les structures simples réelles.

Faut-il rappeler qu'en 1894, date de la thèse de Cartan, la théorie des représentations des groupes finis n'en est pas même à ses premiers balbutiements ? Ce sera le prochain coup d'éclat d'une école berlinoise pourtant sur le déclin. Les articles fondateurs de Frobenius datent de 1897-99. En 1903, il montre comment les travaux d'Alfred Young permettent une description complète des représentations des groupes symétriques. Le point de vue de Young était plutôt celui de la théorie des

invariants, courant alors dominant, tout particulièrement en Angleterre, et auquel se rattachent encore les travaux de Hurwitz de 1894 et 1897. Celui-ci a l'idée capitale d'utiliser la possibilité, sur un groupe fini, de faire des moyennes pour construire des invariants; plus encore, il aperçoit très vite l'opportunité de faire de même sur un groupe compact (le théorème général de Haar n'est pourtant que de 1933) et met son idée en pratique sur les groupes orthogonaux. Schur, peu après, étudie sous la direction de Frobenius, les représentations polynômiales de $GL(n, \mathbb{C})$, que sa thèse fameuse de 1901 relie à celle des groupes symétriques. Fameuse, mais non publiée, du fait des imperfections que lui trouve son auteur. Hermann Weyl, à qui reviendra de faire la synthèse des travaux de Schur et de Cartan, l'ignore encore vingt ans plus tard.

Weyl, homme de synthèse, c'est ce que le dernier quart du livre de Hawkins démontre abondamment. Les chapitres concernant Göttingen et l'apprentissage qu'y fait Weyl sont tout particulièrement passionnants. Klein y a fait venir Hilbert de Königsberg, dès 1895, et son grand ami Minkowski le rejoint en 1902. À Zürich, ce dernier a passé quelques années aux côtés du physicien Heinrich Hertz, et il lance dès son arrivée à Göttingen un séminaire sur l'électron. Sa foi en une « harmonie préétablie entre physique et mathématiques », son enthousiasme pour les découvertes nouvelles des physiciens sont d'autant plus contagieux que la relativité restreinte naît à ce moment même, et que Minkowski a tôt fait de déceler, sous les idées d'Einstein, l'importance de la géométrie non-euclidienne. Il meurt en 1909 (de l'appendicite!), laissant le flambeau à Hilbert, et à Weyl, dont les idées, pourtant rejetées par Einstein, seront à la source des théories de jauge.

Arrivé à Göttingen en 1903, Weyl s'y est d'abord frotté aux équations intégrales, puis, sous l'influence de Koebe, aux surfaces de Riemann et aux problèmes d'*analysis situs* posés par leur étude. Après sa tentative avortée d'unifier électromagnétisme et gravitation, il décide d'approfondir les fondements géométriques de la physique nouvelle : très vite, le calcul tensoriel et les symétries des tenseurs le portent vers les représentations des groupes symétriques et linéaires. Il lit Cartan, et le dépasse : tout d'abord, son bagage topologique va lui permettre de lever enfin l'ambiguïté entre les aspects locaux et globaux de la théorie de Lie – son péché originel, vertement dénoncé par Study. Il relie soigneusement les représentations d'un groupe et de son algèbre de Lie, démontre l'existence d'une forme compacte pour tout groupe de Lie simple complexe (propriété reconnue par Cartan, sans qu'il en aperçoive les conséquences), et en déduit son grand théorème de réductibilité complète des représentations : c'est la fameuse « astuce unitaire », qui donne toute sa portée à l'idée géniale de Hurwitz. La correspondance qu'il entretient avec Schur en 1924 vont le mener à sa grande synthèse avec les groupes finis : Schur vient d'obtenir des formules de dimensions pour les représentations tensorielles des groupes orthogonaux, et le met au défi de les généraliser – ce que Weyl réussit presque immédiatement, développant au passage sa théorie des caractères des groupes de Lie. Cent pages exceptionnelles, publiées dans *Mathematische Zeitschrift* en 1925. Mais n'oublions pas que Weyl est aussi un analyste : dès l'année suivante, il montre avec Peter comment décomposer la représentation régulière d'un groupe compact et récolter sans fatigue toutes ses représentations irréductibles. C'est la naissance de l'analyse harmonique, le début d'une autre histoire et la fin du livre de Thomas Hawkins.

On aura compris que ce travail impressionnant est une brillante histoire des idées, établissant la vérité des influences là où le vocabulaire commun ne déroule qu'une succession de chausse-trappes : l'importance de la forme de Killing n'a été reconnue que par Cartan, les algèbres de Cartan ont été mises en avant par Killing, et

le groupe de Weyl est bien une invention de Weyl! Mais on y lira aussi, en filigrane, une histoire des écoles et des institutions, ainsi qu'une histoire très vivante des mathématiciens de l'époque, rédigée avec le plus grand soin (malgré quelques rares coquilles, et l'affirmation malheureuse que Dolomieu, village de l'Isère où le père d'Élie Cartan exerçait l'office de maréchal-ferrant, se trouve dans le sud-ouest de la France). La qualité de l'entreprise ne laisse regretter qu'une chose, c'est qu'elle s'achève avec Weyl et ne se poursuive pas au-delà! On pourra tenter de s'en consoler en consultant le recueil récent d'articles d'Armand Borel sur la théorie de Lie et certains de ses développements contemporains (*Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups*, History of Mathematics 21, American Mathematical Society & London Mathematical Society 2001, xiv+184 pp.). Mais le livre de Thomas Hawkins montre assez clairement en quoi le travail de l'historien peut être précieux, et même indispensable lorsqu'il atteint cette qualité.

Laurent Manivel
Université de Grenoble 1

Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups

ARMAND BOREL

American Mathematical Society/London Mathematical Society, 2001. 184 p. 39 \$.

ISBN 0-8218-0288-7

La théorie des groupes de Lie, issue des travaux de Lie et Killing sur les groupes de transformations est l'une des plus fécondes de l'histoire des mathématiques du XX^e siècle. Au carrefour de l'algèbre, de la géométrie différentielle et de l'analyse harmonique, cette théorie est traversée par les grandes évolutions des mathématiques durant le dernier siècle, en particulier par l'importance et même la primauté accordées aux points de vue globaux et algébriques. Armand Borel organise son livre autour de deux approches des propriétés globales des groupes de Lie et des groupes algébriques : la première, dont l'histoire est développée dans les quatre premiers chapitres, provient de préoccupations de géométrie différentielle et englobe entre autres les travaux de A. Hurwitz, I. Schur, H. Weyl et E. Cartan ; la seconde que A. Borel qualifie d'« algébrico-géométrique » est initiée au XIX^e par les travaux de L. Maurer et incarnée durant le XX^e siècle par ceux que C. Chevalley et E.R. Kolchin consacrent à la théorie des groupes algébriques. D'un point de vue formel, certains chapitres de ce livre sont des révisions d'articles déjà publiés (chapitres II, III, VII, VIII), d'autres sont inédits (chapitres I, IV, V, VI), ce qui entraîne un certain nombre de redites.

Le premier chapitre est un rapide exposé des travaux de S. Lie sur les groupes de transformations. Dans le second chapitre, A. Borel s'intéresse à l'histoire de la théorie des invariants et de la théorie des représentations complètement réductibles en se restreignant au groupe $SL_2(\mathbb{C})$. Les contributions de Study, Cartan et Fano au théorème de complète réductibilité des représentations de $SL_2(\mathbb{C})$ sont analysées. En particulier, A. Borel précise à juste raison que Cartan établit en fait seulement le théorème de complète réductibilité pour les représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. En s'intéressant à la théorie des invariants, Hurwitz est conduit à généraliser à certains groupes infinis comme $SL_n(\mathbb{C})$ et $SO_n(\mathbb{C})$ la notion de moyenne. Or, la moyenne définie sur les groupes finis avait été utilisée pour prouver la complète réductibilité de leurs représentations. La technique de Hurwitz, appelée par Weyl « *truc unitaire* », est exhumée après 25 années par Schur pour généraliser la théorie des caractères et par Weyl pour généraliser les travaux de Cartan sur les représentations complexes.

Le troisième chapitre est consacré à l'exposition des contributions de Weyl à la théorie des groupes de Lie, à la théorie des représentations des groupes compacts et aux applications de ces travaux en mécanique quantique. A. Borel souligne l'influence

des travaux de Weyl sur Cartan lorsque ce dernier adopte un point de vue global dans l'étude des espaces symétriques. L'histoire du théorème de Peter-Weyl est assez significative des relations étroites qu'entretiennent Cartan et Weyl. D'une part, les travaux de Peter et Weyl sur les questions de décomposition des représentations des groupes compacts sont directement inspirés de ceux de Cartan, d'autre part, le théorème de Peter-Weyl (1927) est rapidement généralisé par Cartan aux espaces homogènes de groupes de Lie compacts et aux espaces symétriques (1929).

Le quatrième chapitre est consacré aux travaux de Cartan concernant les espaces symétriques et les groupes de Lie. La théorie des espaces \mathcal{E} – les espaces à courbure parallèle –, est à sa naissance, explicitement une théorie locale. Rapidement, sous l'influence de H. Weyl, Cartan est amené à adopter un point de vue global et à produire une théorie qu'il qualifia de « magnifique théorie qui combine géométrie différentielle et groupes de Lie semi-simples ». Au début de la théorie des espaces \mathcal{E} , la propriété d'isométrie des symétries locales est déduite du parallélisme de la courbure. Ce n'est qu'en 1929 que Cartan propose d'appeler de tels espaces des espaces symétriques. Ses principaux travaux en théorie locale et globale des groupes de Lie et des espaces symétriques sont résumés et analysés en insistant sur la notion de décomposition dite de Cartan. Avant d'aborder la théorie des groupes linéaires algébriques, A. Borel termine l'exposé de l'histoire de la théorie différentielle des groupes de Lie, par l'étude des travaux de Cartan sur l'application des *invariants intégraux* au calcul des nombres de Betti des groupes de Lie compacts et de leurs espaces homogènes.

Les débuts de la théorie des groupes algébriques linéaires sont exposés dans le cinquième chapitre. Picard, en reprenant *l'idée fixe de Lie* de constituer une théorie de Galois pour les équations différentielles linéaires homogènes, est amené à considérer un groupe linéaire de transformations opérant sur l'ensemble des systèmes fondamentaux de ces équations. La condition algébrique posée par Picard l'amène à définir la notion de groupe algébrique continu. Maurer est conduit à la même notion en étudiant l'ensemble des transformations linéaires laissant invariante une fonction rationnelle homogène. Cette découverte l'amène à étudier la théorie de Lie et à apporter des contributions significatives comme la célèbre formule de Maurer-Cartan. Dans la suite de ses travaux, Maurer définit la notion de *groupe régulier* comme ensemble des matrices inversibles dont les coefficients vérifient des conditions algébriques, ce qui est la notion actuelle de groupe linéaire algébrique.

Les chapitres VI, VII, VIII sont des *surveys* des travaux en théorie des groupes algébriques au XX^e siècle, en particulier de ceux de Chevalley et de Kolchin que je ne me risquerai pas à résumer.

En nous proposant une histoire de la théorie des groupes de Lie et des groupes algébriques, une des intentions d'Armand Borel est de montrer comment le point de vue global concernant les groupes de Lie et les groupes algébriques émerge alors qu'à l'origine les groupes étudiés par Sophus Lie sont des groupes analytiques locaux de transformations. Même si les initiateurs de la théorie rencontrent dans leurs recherches des objets globaux, ceux-ci ne sont étudiés que localement. Pour autant, les considérations globales ne leur sont pas complètement étrangères : par exemple, même si les espaces symétriques, introduits par Cartan en 1926, sont dans la terminologie contemporaine des espaces localement symétriques, ce dernier, à défaut de traiter le cas global, distingue clairement les deux points de vue dès le début de la théorie.

Un autre intérêt de ce livre est qu'A. Borel est lui-même un acteur de cette histoire et que son livre est truffé de souvenirs personnels qui permettent de mieux comprendre comment les notions, les dénominations et les concepts se dégagent. Ainsi, apprend-on que le terme de « forme de Killing » semble avoir été choisi par A. Borel lui-même. Au-delà de l'anecdote, il est intéressant de noter que cet outil que Cartan introduit et utilise dans de nombreux travaux ne reçoit un nom que dans les années 1950 au

moment où la théorie des groupes de Lie reçoit sa formulation moderne ce qui révèle entre autre que la réception des travaux de Cartan a été longue et sûrement laborieuse.

Le premier commentaire que l'on peut faire est qu'A. Borel dégage clairement les idées fondamentales des travaux qu'il résume. A ce titre, son livre est un outil pédagogique à recommander aux étudiants et aux chercheurs. Avec ce livre, A. Borel montre que lire les travaux importants d'une théorie dans une perspective historique ne peut qu'enrichir et approfondir leur compréhension mathématique.

D'un point de vue historique, A. Borel insiste sur les relations et les influences que les mathématiciens exercent les uns sur les autres. Par exemple, l'analyse des relations entre E. Cartan et H. Weyl permet de mieux comprendre leurs orientations et leurs motivations. Ainsi, il apparaît clairement que l'adoption d'un point de vue global par Cartan est due à sa lecture des premiers travaux de Weyl sur les groupes continus. On peut aussi souligner l'attention que porte A. Borel aux lectures des mathématiciens : ainsi Fano obtient dans le cadre de la géométrie algébrique des résultats sur les représentations complètement réductibles des groupes de transformations, qui sont équivalents à ceux de Cartan. Fano connaissait par sa lecture du traité de Lie et Engel sur les groupes de transformations les résultats de Study sur les représentations complètement réductibles de $SL_2(\mathbb{C})$ mais ignorait tout de la thèse de Cartan. Weyl utilise pour généraliser à tous les groupes semi-simples complexes ou compacts les résultats de Cartan sur les représentations complètement réductibles des groupes complexes semi-simples et le « *truc unitaire* » de Hurwitz-Schur. Il est le seul à avoir connaissance de l'ensemble de ces résultats ; en effet, Schur connaissait les travaux de Hurwitz mais ignorait ceux de Cartan ; inversement, Cartan n'avait aucune connaissance des résultats de Hurwitz, ni de ceux de Schur. Enfin, A. Borel analyse à plusieurs reprises les motivations et les intentions des mathématiciens dont il étudie les travaux : ainsi, les travaux de Weyl sont-ils présentés à la lumière de sa volonté de trouver des preuves purement algébriques à des résultats déjà montrés par des voies transcendentes. De même, les premiers articles de Weyl sur la représentations des groupes classiques et repris dans le célèbre livre de Weyl, *The Classical Groups, Their Invariants and Representations*, sont résumés et analysés dans la perspective annoncée par ce dernier de décomposer les représentations tensorielles des groupes classiques et d'en dériver pour chacun d'eux une théorie des invariants. De la même manière, les travaux de Chevalley sur les groupes de Lie sont présentés à la lumière de son intention d'algébriser cette théorie « *à mort* ».

Ce livre intéressera le mathématicien qui y trouvera à la fois une présentation (la plupart du temps extrêmement pédagogique) des principaux résultats des théories des groupes de Lie et des groupes algébriques et une profonde réflexion, alimentée par la connaissance de l'histoire de ces théories, sur leur signification. L'historien des mathématiques du XX^e siècle y trouvera, outre une présentation et une lecture serrée des contributions fondamentales aux théories des groupes de Lie et des groupes algébriques, une multitude d'informations (souvent de première main en ce qui concerne la théorie des groupes algébriques) sur les motivations et la circulation des idées au sein de la petite communauté des mathématiciens qui se sont intéressés à ces théories. Les *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups* de A. Borel sont, avec le livre récent de T. Hawkins (*The Emergence of the Theory of Lie Groups : An Essay on the History of Mathematics, 1869-1926*, Springer, 2000), une contribution majeure à l'histoire de la théorie des groupes de Lie et par là, un texte important pour l'histoire des mathématiques contemporaines.

Philippe Nabonnand

Faculté des lettres et sciences humaines de Nancy