LIVRES

Alain Robert
A COURSE IN p-ADIC ANALYSIS
Graduate Texts in Mathematics **198**, Springer-Verlag, 2000. 437 p.
ISBN 0-387-98669-3. 59,95 €

Les nombres p-adiques ont été inventés formellement voici 100 ans par K. Hensel pour les besoins de la théorie algébrique des nombres. L'invention a échappé à son auteur en devenant une discipline à part entière, avec ses méthodes propres, ses problèmes internes et ses domaines d'applications.

Très rapidement on a réalisé que les nombres p-adiques vivent dans un corps valué complet, $\mathbf{Q}_p$, qui peut être complété algébriquement puis topologiquement pour obtenir un corps valué complet et algébriquement clos $\mathbf{C}_p$. Il devenait alors naturel de faire de l'analyse sur $\mathbf{Q}_p$ ou $\mathbf{C}_p$.

L'analyse p-adique s'est développée d'abord en essayant de transposer au domaine p-adique les théorèmes de l'analyse classique (réelle, complexe ou fonctionnelle). On a démontré par exemple des analogues p-adiques du théorème de Weierstrass, des inégalités de Cauchy pour les séries de Taylor convergentes, des théorèmes de Hahn-Banach et de Banach-Steinhaus en analyse fonctionnelle ou de Cauchy-Kovalevska pour les équations différentielles p-adiques, etc.

Petit à petit l'analyse p-adique a acquis son autonomie, des questions, des problèmes, des applications et des outils spécifiques ont vu le jour. Parmi ceux-ci, citons sans soucis de hiérarchie ni d'exhaustivité les suivants, avec entre parenthèse des noms de ceux qui nous paraissent être parmi les initiateurs de la théorie :

1) analyse fonctionnelle autour du théorème de Hahn-Banach, de la structure des espaces de Banach p-adiques, des espaces de Fréchet p-adiques (A. F. Monna) ;
2) analyse sur les corps ultramétriques localement compacts, représentation des fonctions continues par des polynômes d'interpolation, raffinement du théorème de Weierstrass dans le cas p-adique (K. Mahler) ;
3) théorie des fonctions analytiques ultramétriques globales à une ou plusieurs variables (M. Krasner et J. Tate) ;
4) applications arithmétiques des nombres p-adiques :
   – applications à la théorie algébriques des nombres et à la théorie du corps de classes (K. Hensel et H. Hasse), à la description de Gal$(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ (T. Kubota & H. W. Leopold et K. Iwasawa) ;
   – formes modulaires p-adiques (H. P. F. Swinnerton-Dyer, J.-P. Serre), etc.
5) théorie des équations différentielles p-adiques (E. Lutz et B. Dwork) ;
6) corps non archimédiens en caractéristique p (L. Carlitz).

Il existe de très bonnes monographies spécialisées traitant de l'un ou l'autre de ces sujets à un niveau recherche. Il existe aussi d'excellents ouvrages d'introduction à l'analyse p-adique d'un niveau élémentaire (c'est-à-dire lisibles après une ou deux années d'études universitaires).

Le livre d'A. Robert vise un niveau intermédiaire entre ces monographies très spécialisées et ces ouvrages élémentaires. Il est sans équivalent sur le marché. Outre les généralités comme la construction des corps p-adiques, il couvre en effet une bonne partie de l'analyse p-adique classique à une variable (sauf les équations différentielles p-adiques) et contient de nombreux résultats qui n'étaient accessibles que dans des articles ou des préprints. Détaillons un peu.

L'ouvrage commence par une construction très soignée des nombres p-adiques. Il donne aussi les modèles euclidiens de $\mathbf{Z}_p$ rarement explicités (chapitre I). Les chapitres II et III sont consacrés à la théorie des extensions de $\mathbf{Q}_p$. Au chapitre II les extensions algébriques de $\mathbf{Q}_p$ sont construites et étudiées avec grand soin. Au chapitre III, la notion de corps sphériquement complet est définie ainsi que celle d'extension immédiate, l'auteur donne une construction très économique d'une extension algébriquement close et maximalement complète de $\mathbf{Q}_p$.

Au chapitre IV, l'auteur aborde l'étude des fonctions continues de $\mathbf{Z}_p$ dans $\mathbf{Q}_p$. Il démontre le théorème de Mahler caractérisant les fonctions continues de $\mathbf{Z}_p$ dans $\mathbf{Q}_p$ à l'aide de leurs coefficients d'interpolation de Newton. Il montre le lien de ce théorème avec la notion de bases normales pour l'espace de Banach $\mathcal{C}(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ muni de la norme de la convergence uniforme. La base normale de M. van der Put formée de fonctions caractéristiques de boules est construite. Il donne quelques théorèmes généraux pour les espaces de Banach p-adiques : théorème de Monna-Fleischer d'existence de bases normales, théorème de Hahn-Banach p-adique.

Au chapitre V, il aborde le problème de la différentiation et de l'intégration en analyse p-adique, et démontre un analogue du théorème des accroissements finis qui lui est dû.

Le chapitre VI est consacré à la théorie des fonctions analytiques. Il débute par la théorie des fonctions analytiques sur une couronne à une variable (théorie de Lazard) avec entre autres les inégalités de Cauchy, la théorie du polygone de Newton, la localisation des zéros des séries de Laurent convergeant sur une couronne et le théorème de préparation de Weierstrass.

Il continue avec la théorie des éléments analytiques à la Krasner. Le théorème de Mittag-Leffler p-adique est démontré et, ce qui est moins courant, le théorème de factorisation de Motzkin. Les théorèmes de Christol-Robba caractérisant les éléments analytiques sur le disque unité ouvert de $\mathbf{C}_p$ et d'Amice-Fresnel caractérisant les éléments analytiques sur le complémentaire du disque ouvert de centre 1 et de rayon 1 sont démontrés.

La théorie des algèbres de Tate est effleurée ainsi que la théorie des normes multiplicatives sur le corps des fractions rationnelles à coefficients dans une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ qui préfigure la théorie de V. Berkovich des espaces analytiques p-adiques.

Dans chacun de ces chapitres et ainsi que dans le chapitre VII qui est un bestiaire p-adique, il y a de nombreux exemples d'applications, par exemples des congruences pour des suites de polynômes classiques (dus à l'auteur et à ses élèves), des études de fonctions spéciales p-adiques importantes : exponentielle, logarithme, fonction Γ p-adiques, exponentielle d'Artin-Hasse, exponentielle de Dwork, etc. Il est dommage que la remarquable preuve élémentaire de la formule de Gross-Koblitz due à A. Robert, parue trop tard, n'ait pas pu être incorporée dans ce livre.

De très nombreux exercices complètent cet ouvrage. La rédaction est extrêmement claire et très soignée. La bibliographie est suffisante mais ne prétend pas à l'exhaustivité.

Je recommande sans réserve le livre d'Alain Robert, *A course in p-adic analysis*, à toute personne qui veut avoir un ouvrage de référence sur l'analyse p-adique à une variable, clair, complet et agréable à lire.

Daniel Barsky, Université Paris-Nord (Villetaneuse)

Random walks in the quarter-plane. Algebraic methods, boundary value problems and applications.
G. Fayolle, R. Iasnogorodski, V. Malyshev
Applications of Mathematics, **40**. Springer-Verlag, Berlin, 1999. ISBN 3-540-65047-4. 69,95 €

Le livre porte sur le calcul de la mesure invariante (les fonctions génératrices des probabilités stationnaires) pour les marches aléatoires dans le quart du plan $\mathbf{Z}_+^2$ avec trois domaines d'homogénéité non limités : la partie intérieure, l'axe Ox, $S' = \{(m, 0) \mid m > L\}$, et l'axe Oy, $S'' = \{(0, n) \mid n > M\}$, partant de points arbitraires $(L, 0)$ et $(0, M)$ respectivement, $L, M > 0$. On suppose que dans la partie intérieure (mais pas nécessairement sur les axes) de $\mathbf{Z}_+^2$ les probabilités de sauts p_{ij} de (m, n) à $(m+i, n+j)$ sont différentes de zéro seulement quand leur distance est inférieure à 2, i.e. pour $|i|, |j| \leqslant 1$. Cette condition admise, le problème est résolu en toute généralité. Notamment, les deux vecteurs des probabilités de sauts p'_{ij} de S' et p''_{ij} de S'' et $L + M + 1$ vecteurs à partir des points $(0, 0)$, $(0, m)$, $(n, 0)$, $m = 1, \ldots, L$, $n = 1, \ldots, M$ sont choisis indépendamment et contiennent un nombre fini arbitraire de composantes. La seule contrainte imposée sur le choix de p_{ij}, p'_{ij} et p''_{ij} est la récurrence positive de la marche aléatoire.

Outre son intérêt en probabilités pures, ce problème est encore d'un intérêt appliqué : ces marches représentent de nombreux modèles de deux files d'attente. Mais ce livre est remarquable surtout pour les méthodes analytiques profondes et ingénieuses que les auteurs ont élaborées afin de traiter ce problème. Ces méthodes s'appliquent aussi à l'analyse asymptotique des probabilités stationnaires et à l'étude du comportement lorsque le processus est transient (calcul des fonctions de Green, de la frontière de Martin).

Nombre de problèmes faciles de files d'attente de dimension $d = 1$ se réduisent à une équation $Q(z)\pi(z) = U(z)$ dans le disque $|z| < 1$ où $\pi(z)$ est une fonction génératice de la mesure invariante inconnue, $U(z)$ un polynôme inconnu, $Q(z)$ une fonction connue dont le nombre de zéros dans le disque est égal au degré de U. Ces zéros et l'analyticité de $\pi(z)$ déterminent immédiatement $U(z)$ et $\pi(z)$. Dans le cas du livre l'équation est bivariée et s'écrit

$$Q(x, y)\Pi(x, y) = q(x, y)\pi(x) + \tilde{q}(x, y)\tilde{\pi}(y) + \pi_0(x, y), \qquad |x| < 1,\ |y| < 1. \quad (1)$$

Elle exprime les fonctions génératrices (inconnues) des probabilités stationnaires π_{ij} dans la partie intérieure $\Pi(x,y)$ et sur les axes $\pi(x)$ $\tilde{\pi}(y)$ à l'aide des fonctions génératrices (connues) Q des sauts à l'intérieur et q, $\tilde{q}$ des sauts sur les axes. Autrement dit, la masse à l'intérieure est égale à la masse sur les axes. L'ensemble de zéros de $Q(x,y)$ est dans ce cas une courbe algébrique $\mathbf{S}$. La première idée des auteurs est de considérer l'équation sur cette courbe. Mais, contrairement au cas $d=1$, ce n'est qu'un prélude à l'analyse très avancée.

Plus généralement, dans le livre, une équation de Wiener-Hopf de dimension $d=2$ est considérée. Ces équations se résolvent par la factorisation dans le cas $d=1$. Mais la recherche de leur solution « explicite » pour $d \geqslant 2$ est une tâche beaucoup plus ardue qui a résisté aux méthodes puissantes de l'analyse fonctionnelle et autres. (Notamment, dans le cas particulier de $\mathbf{Z}_+^2$ la théorie de l'index a été développée par B. Simonenko.) Les méthodes originales proposées dans ce livre permettent d'obtenir dans le quart du plan la solution explicite.

Le livre pourrait être intéressant autant pour les probabilistes que pour les spécialistes en analyse complexe. Les auteurs font un rappel détaillé de toutes les définitions et les théorèmes (souvent accompagnés des preuves) empruntées de la théorie des chaînes de Markov, la théorie des fonctions analytiques et méromorphes, des surfaces de Riemann, des variétés de recouvrement, de la théorie de Galois, des différentielles d'Abel, des fonctions elliptiques, des problèmes frontières de type Riemann-Hilbert, Riemann-Carleman. Le lecteur initié à la théorie des chaînes de Markov et à l'analyse complexe a rarement besoin d'autres sources pour suivre le livre. Nous allons maintenant préciser son cheminement.

1. D'abord on obtient l'équation fondamentale (1).

2. La condition sur le vecteur $\{p_{ij}\}$ assure que l'équation

$$Q(x,y) = xy\Big(\sum_{i,j} p_{ij} x^i y^j - 1\Big) = 0$$

est du second degré. Cette équation définit une fonction algébrique $Y(x)$, telle que $Q(x, Y(x)) \equiv 0$, de genre inférieur ou égal à un, c'est-à-dire comportant au plus deux branches et quatre points de branchement. Les relations particulières entre les paramètres p_{ij} conduisant au genre zéro, avec seulement deux points de branchement, sont analysées en détail dans le livre.

Ainsi, en général, la surface de Riemann de $Y(x)$ est un tore $\mathbf{S}_x$. De même elle définit la fonction $X(y)$ avec deux branches, quatre points de branchement et la surface de Riemann un tore $\mathbf{S}_y$. Les tores $\mathbf{S}_x$ et $\mathbf{S}_y$ étant conformément équivalents, les auteurs proposent de considérer *un seul* tore $\mathbf{S}$ avec deux recouvrements ; donc chaque point $s \in \mathbf{S}$ a deux « coordonnées » $x(s)$, $y(s)$ où $Q(x(s), y(s)) = 0$. Les fonctions génératrices $\pi(x)$ et $\tilde{\pi}(y)$ sont définies d'abord dans le domaine de $\mathbf{S}$ avec $|x(s)| < 1$, $|y(s)| < 1$.

3. L'idée suivante du livre est d'introduire les *automorphismes de Galois* sur $\mathbf{S}$. Les groupes de Galois du corps des fonctions méromorphes sur $\mathbf{S}$ sur le corps des fonctions rationnelles de $x(s)$ et sur le corps des fonctions rationnelles de $y(s)$ sont d'ordre 2. Ils sont engendrés par des éléments ξ et η. Pour chaque $s \in \mathbf{S}$ il existe un point $s' \in \mathbf{S}$ avec $x(s') = x(s)$ (et bien sûr $y(s) = Y_0(x(s)) \neq y(s') = Y_1(x(s))$) et un point s'' avec $y(s) = y(s')$. Les couples (s, s') et (s, s'')

sont liés par les automorphismes de Galois ξ et η : $s' = \xi s$, $s'' = \eta s$; $\xi^2 = Id$, $\eta^2 = Id$. Ensuite les fonctions $\pi(s)$ et $\tilde{\pi}(s)$ sont « montées » sur le recouvrement universel de $\mathbf{S}$ qui est le plan $\mathbf{C}$. Finalement, en se servant des automorphismes de Galois, ces fonctions se prolongent comme fonctions méromorphes sur tout $\mathbf{C}$. Cette procédure de *prolongement méromorphe* est cruciale. Elle se projette sur $\mathbf{S}$ en termes de fonctions elliptiques de l'uniformisation.

4. Les fonctions π et $\tilde{\pi}$ vérifient deux équations sur le recouvrement universel : $\pi(t+\omega_1) = \pi(t), \pi(t+\omega_3) = a(t)\pi(t) + b(t)$, où ω_1 (resp. ω_3) est une constante complexe (resp. réelle), les fonctions $a(t), b(t)$ sont connues. Sa solution peut être calculée en termes de séries ou produits infinis en ayant recours aux différentielles d'Abel. Cette voie a été réalisée dans les travaux de V. Malyshev dans les années 67–72.

5. Le livre propose également une autre voie originale, qui montre qu'on peut rester dans le plan complexe. Il s'agit d'une méthode générale élaborée par G. Fayolle et R. Iasnogorodski dans les années 75–79, qui a été aussi appliquée dans le cas de sauts généraux, non necéssairement bornés, et reprise avec fruit dans les travaux et les monographies de plusieurs auteurs. Il est démontré que le calcul de $\pi(x)$ ou $\tilde{\pi}(y)$ équivaut à la résolution d'un *problème aux limites* de type *Riemann–Hilbert–Carleman*, qui s'énonce comme suit : chercher une fonction Φ^+ analytique à l'intérieur d'un contour $\mathcal{L}$ et telle que

$$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t)\Phi^+(t) + g(t), \qquad t \in \mathcal{L}$$

où $G(t)$, $g(t)$ sont régulières, $\alpha(t)$ est une bijection du contour sur lui-même (automorphisme dit de Carleman, qui change le sens de parcours sur la courbe $\mathcal{L}$). Le nombre de solutions dépend de la valeur de l'indice du problème $\Delta_{\mathcal{L}} \arg G(t)$.

6. Les fonctions $\pi(x)$ et $\tilde{\pi}(y)$ ne sont pas nécessairement analytiques à l'intérieur du contour mais c'est la procédure de leur prolongement méromorphe qui permet d'identifier leurs pôles et de se ramener à la recherche de fonctions analytiques. La réduction astucieuse de l'indice conduit finalement à l'unique solution, avec au passage une démonstration purement analytiques des conditions d'ergodicité. La solution est présentée sous une forme intégrale, où toutes les fonctions sont explicitement exprimées en termes de la fonction elliptique $\wp$ de Weierstrass, dont les périodes sont calculées.

Un chapitre du livre est consacré au cas du groupe associé à la marche aléatoire d'ordre fini. C'est le groupe non commutatif engendré par les deux automorphismes de Galois précités. On y trouve de jolis critères sur les p_{ij} pour avoir l'ordre 4 ou 6. Les auteurs développent dans le cas de l'ordre fini une théorie algébrique très élégante pour obtenir les solutions et prouvent des critères pour qu'une solution soit algébrique ou rationnelle. Dans un autre chapitre, les cas dégénérés (où $\mathbf{S}$ est une sphère) mais néanmoins importants sont résolus.

En conclusion, remarquons que cette approche a permis de résoudre le problème du calcul de la mesure invariante de la marche aléatoire dans $\mathbf{Z}_+^d$ seulement pour $d = 2$. Dans le cas $d \geqslant 3$, le problème est encore plus difficile et reste toujours ouvert. Il serait nécessaire d'entrer de plein pied dans le champ de la geométrie algébrique avec un espoir extrêmement mince d'obtenir une solution explicite.

Ce livre est vivement recommandé.

Irina Kourkova,
Université Pierre-et-Marie-Curie (Paris 6)

Numerical Mathematics
Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri
Texts in Applied Mathematics **37**, Springer-Verlag 2000. 654 p.
ISBN 0-387-98959-5. 54,95 €

Structuré classiquement, ce nouveau livre d'analyse numérique présente un intérêt tout particulier. En effet, après l'exposition claire, succincte des techniques de base, les auteurs nous exposent un grand nombre de méthodes plus rares, des problèmes moins souvent abordés (EDP notamment), mais surtout, et c'est là la principale originalité de l'ouvrage, des codes Matlab, mettant en place les algorithmes exposés, des exemples traités complètement et des applications variées.

Citons parmi ces applications : étude des vibrations libres d'un pont, simulation du comportement d'un semi-conducteur, action du vent sur le mât d'un voilier, etc. Elles sont traitées (assez rapidement) sur un même schéma : modélisation, utilisation des algorithmes et résultats numériques et graphiques. On pourra cependant regretter le manque d'interprétation et de retour sur les modèles.

En conséquence, ce livre me semble particulièrement adaptés à tous ceux qui désirent mettre en œuvre des algorithmes numériques et maîtriser convenablement les schémas utilisés. Il me semble particulièrement approprié aux candidats de l'agrégation externe de mathématiques ayant choisi l'option de calcul scientifique et qui désirent préparer l'épreuve de modélisation.

Alain Chilles

Matrix Iterative Analysis
Richard S. Varga
Springer Series in Computational Mathematics **27**, 2e éd., 358 p.
Springer-Verlag, 2000. ISBN 3-540-66321-5. 84,95 €

Cette réédition d'un ouvrage de 1962 donne une description détaillée et très à jour des méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires. Une attention particulière est portée sur les matrices résultant de la discrétisation d'équations aux dérivées partielles elliptiques ou paraboliques. L'introduction mêle agréablement définitions classiques et développements plus originaux, par exemple sur les ovales de Cassini, qui permettent de localiser les valeurs propres d'une matrice plus finement que les habituels disques de Gerschgorin. Les méthodes sont dans la suite regroupées par catégorie, selon le type d'approche et la nature des matrices auxquelles elles s'appliquent. Les démonstrations des résultats de convergence et de comparaison sont détaillées et précises. De nombreux exercices (non corrigés), certains en application directe des résultats établis, d'autres plus en bordure du propos central, permettent au lecteur motivé d'approfondir sa compréhension de l'ensemble.

Chaque chapitre se termine par des commentaires historiques et bibliographiques, particulièrement bienvenus dans ce domaine très lié au développement de la capacité des ordinateurs. Il s'agit donc d'un très bon ouvrage de référence, dont l'essentiel peut être abordé avec un bagage minimal en algèbre linéaire.

Bertrand Maury,
Université Pierre-et-Marie-Curie (Paris 6)

Analysis and Geometry on complex homogeneous domains
J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Korányi, Q. Lu, G. Roos
Progress in Mathematics **185**, Birkhaüser, 2000. 560 p. ISBN : 0-8176-4138-6. 105 €

Le livre a été écrit à la suite d'une École d'automne organisée en 1997 dans le cadre du CIMPA à Pékin. Les textes sont une version (certainement remaniée) des cours qui y ont été donnés par cinq auteurs différents. Chacun forme un chapitre, pouvant être lu indépendamment des autres, bien qu'il existe des corrélations fortes entre chapitres. Le thème central est la géométrie et l'analyse sur les domaines complexes homogènes. Les exposés contiennent des introductions d'un niveau relativement élémentaire et mènent petit à petit à des résultats parmi les plus récents.

Ce sont les domaines bornés symétriques (encore appelés espaces hermitiens symétriques ou domaines de Cartan) qui occupent le premier plan. Il y a deux approches principales de ces domaines. On peut les aborder comme une classe particulière d'espaces riemanniens symétriques, en utilisant les techniques de groupes et algèbres de Lie semi-simples. Le deuxième point de vue repose sur la théorie des algèbres de Jordan et des systèmes triples de Jordan. Cette deuxième approche utilise plus directement l'analyse complexe, et réalise les domaines bornés symétriques comme les boules-unités ouvertes pour une norme spectrale liée à la structure de Jordan. Les deux techniques sont présentées et utilisées dans le livre. Le premier point de vue suppose un long parcours préliminaire que les auteurs ont su, à mon avis habilement, alléger et faciliter grâce à des présentations et des énoncés de théorèmes illustrés par des exemples judicieusement choisis sans nécessairement donner les démonstrations correspondantes.

Le premier exposé par J. Faraut concerne les semi-groupes complexes associés aux domaines bornés symétriques. Si $\mathcal{D}$ est un tel domaine, il possède un groupe de difféomorphismes holomorphes G qui opère transitivement sur $\mathcal{D}$. Le groupe opère en fait par des transformations rationnelles, et on peut étendre cette action au groupe complexifié $G_{\mathbb{C}}$. On s'intéresse au semi-groupe Γ des compressions du domaine $\mathcal{D}$ défini par $\Gamma = \{g \in G_{\mathbb{C}} \mid g(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}\}$. Le semi-groupe Γ est le protoptype des semi-groupes complexes d'Olshanskii : il possède une décomposition de la forme $\Gamma = G\exp(iC)$, où C est un certain cône convexe G-invariant dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Après des résultats géométriques, on passe à l'étude des représentations unitaires π de G qui se prolongent holomorphiquement à Γ par des contractions hilbertiennes. On aborde ensuite l'espace de Hardy $H^2(C)$. Cette notion est une généralisation de la notion de l'espace de Hardy classique pour le disque-unité, introduite pour le groupe $G = SL(2,\mathbb{R})$ par Gelfand et Gindikin. Le groupe G est regardé comme frontière distinguée (au sens de Shilov) du semi-groupe Γ. En particulier on obtient la décomposition de l'action unitaire de G sur $H^2(C)$. Le cas du semi-groupe associé au disque-unité du plan complexe est traité en détail.

La deuxième partie, due à S. Kaneyuki traite des espaces symétriques pseudo-hermitiens. Parmi les espaces symétriques semi-simples, ce sont ceux qui peuvent être munis d'une structure hermitienne (non nécessairement définie-positive). L'idée générale est : dans le cas où la métrique est définie-positive, il y a toute une série de résultats algébriques et géométriques : plongement de Borel dans le dual compact, réalisation de Harish Chandra comme domaines bornés dans $\mathbb{C}^N$, réalisation comme domaines de Siegel (théorie de Wolf-Korányi). Quels sont les analogues lorsqu'on ôte l'hypothèse de positivité ? Cette étude est liée à diverses théories : théorie des algèbres de Lie semi-simples $\mathbb{Z}$-graduées à 3 et 5 termes, R-espaces symétriques, domaines de Siegel, domaines de type-tube sur des cônes non convexes.

La troisième partie, dûe à A. Korányi concerne les domaines hermitiens symétriques. Les quatre premières sections sont une présentation fort agréable de la géométrie de ces espaces, et cet ensemble constitue ce qui doit logiquement être lu en premier dans tout le livre. Sans donner tous les détails des démonstrations, il offre néammoins des vues très précises sur le sujet. La deuxième partie concerne l'analyse sur ces domaines : noyau de Bergman et ses généralisations à poids, opérateurs différentiels invariants, série discrète holomorphe scalaire et son prolongement analytique (ensemble de Wallach).

La quatrième partie est due à Qi-keng Lu. Il s'agit principalement d'expliciter autant que peut se faire le laplacien, le noyau de Green et le noyau de la chaleur pour un espace riemannien symétrique de type classique. En fait on utilise une réalisation de ces espaces à l'aide d'espaces de matrices. Dans le cas des espaces hermitiens, il s'agit de réalisations comme boules-unités pour une norme de Banach (de type norme spectrale) sur un espace $\mathbb{C}^N$. On dispose alors de systèmes de coordonnées spécifiques dans lesquels on peut développer les calculs nécessaires.

La cinquième et dernière partie est due à G. Roos, et est un exposé sur les systèmes triples de Jordan. C'est la théorie algébrique qui est présentée, avec des démonstrations complètes. Les systèmes triples de Jordan hermitiens sont étudiés plus en détail, en raison de leurs liens avec les domaines hermitiens symétriques, et leur classification est présentée. Une dernière section contient quelques résultats nouveaux et des problèmes ouverts. En conclusion, ce livre est une bonne contribution à la littérature sur les espaces hermitiens symétriques et leurs généralisations. Il vient en complément du livre de J. Faraut et A. Korányi *Analysis on symmetric cones* (Oxford Univ. Press, 1994) qui est un exposé très complet de la géométrie et de l'analyse sur les domaines hermitiens dits de type-tube (liés aux algèbres de Jordan). Des résultats récents et des directions de recherche nouvelles sont présentés ici avec un souci constant de rester accessible au plus grand nombre.

Jean-Louis Clerc,
Université Henri Poincaré (Nancy 1)