

MICHEL HERMAN

Michel Herman : souvenirs de ses travaux

Albert Fathi (ENS Lyon)

*Au revoir Michel,
Ce que je connais de tes travaux est si peu,
Ce que je voudrais connaître est immense.
Bien à toi,*

Albert

Ce que l'on trouvera ici n'est pas du tout une discussion objective des travaux de Michel Herman. Il s'agit d'un point de vue personnel et subjectif sur Michel comme mathématicien et ami. Tout ce que je rapporte de personnel est basé sur ma mémoire et elle seule. Comme tel, tout a certainement été modifié et embelli au cours des années. Je m'en excuse d'avance auprès du lecteur. Ma seule vraie excuse est d'avoir été présent avec Michel dès le début de ses 25 Glorieuses (années) et d'avoir assisté en direct à la gestation de ses mathématiques.

Dans la suite, je ne parlerai que de ses articles effectivement publiés et parus. Ceci ne représente que la partie émergée de l'iceberg, surtout au cours de ces dix dernières années où Michel n'a que très peu publié et beaucoup produit.

Michel Herman est un ancien élève de l'École polytechnique. Il est de la même promotion qu'Alain Chenciner et François Laudenbach. On trouvera par ailleurs le texte d'Alain sur Michel sur cette amitié de plus de 35 ans [41]. À l'École polytechnique, Laurent Schwartz a eu une grande influence sur Michel Herman. Il l'a très souvent mentionnée et il a toujours été très reconnaissant envers Laurent Schwartz pour la confiance qu'il lui a accordé dès le début.

Dans les premières années de la carrière de mathématicien de Michel Herman, sa rencontre avec Harold Rosenberg a certainement été déterminante. J'ai toujours pensé que c'est Harold qui lui a fait découvrir les systèmes dynamiques à travers le théorème de Denjoy et ses généralisations aux feuilletages, sujet en pleine effervescence dans la fin des années 60, voir [42]. C'est Harold qui a été le directeur de thèse de Michel, même s'il a partout clamé qu'il a beaucoup appris et peu dirigé dans ce cas là, voir [43].

La plus ancienne publication mathématique portant le nom de Michel Herman que je connaisse est [44]. C'est la rédaction conjointe avec Alain Chenciner et François Laudenbach du cours sur le fibré tangent de Larry Siebenmann donné au premier semestre 66 à Orsay. Ceux qui connaissent les exigences de Larry en matière de rédaction ne seront pas surpris que les notes aient mis 3 années pour être publiées. Apprendre à rédiger des mathématiques avec Larry Siebenmann est une expérience que nous avons partagée à quelques années d'intervalle et nous nous en flattions mutuellement au cours des années.

Est-ce ce premier exemple qui a rendu Michel si exigeant sur la qualité des manuscrits que l'on donne à publier ? Toujours est-il que ses archives contiennent un nombre impressionnant de manuscrits contenant des résultats remarquables et dont il n'était pas content de la rédaction au point de ne pas les publier, bien que l'état dans lequel ils sont soit bien supérieur à beaucoup d'articles publiés même dans des revues très prestigieuses. De cette rédaction du cours de Siebenmann, Michel a gardé toute sa vie un très vif intérêt pour la topologie géométrique et ses avancées, nous en discutons très souvent.

Le premier travail publié [1] de Michel Herman date de 1971. Il y montre que le groupe linéaire $GL(\mathbf{H})$ et le groupe unitaire $U(\mathbf{H})$ d'un espace de Hilbert \mathbf{H} de dimension infinie sont parfaits, c'est-à-dire qu'ils sont égaux à leurs sous-groupes engendrés par les commutateurs ou encore que leurs abélianisés sont triviaux. C'est Nicole Desolneux-Moulis, qui a analysé ce travail pour les *Mathematical Reviews* (**44** #7586), elle y remarque que la démonstration est élégante mais que le résultat était déjà connu. Nicole Desolneux-Moulis a été jusqu'à la fin de sa vie (elle est décédée dans l'année précédant la mort de Michel) un des mathématiciens très proches de Michel. Elle était aussi un des participants les plus assidus au séminaire de systèmes dynamiques de Michel Herman à l'École polytechnique et à l'Université Paris 7 par la suite. Parmi les souvenirs forts que j'ai se trouvent deux discussions bien précises, au café après le séminaire, avec Michel et Nicole qui m'ont amené en l'espace de quelques minutes à comprendre un problème et à publier un article.

Le second travail publié dans la foulée [2] concerne le groupe $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^n)$ des difféomorphismes C^∞ isotopes à l'identité du tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ de dimension n . On cherchait à comprendre la structure algébrique des groupes de difféomorphismes, car ils intervenaient dans le calcul de l'homologie des divers espaces classifiants des feuilletages et donc dans la théorie de leurs classes caractéristiques. On conjecturait que le groupe $\text{Diff}_+^\infty(M)$ des difféomorphismes C^∞ isotopes à l'identité de la variété compacte sans bord M était simple. David Epstein venait de montrer que le sous-groupe des commutateurs de $\text{Diff}_+^\infty(M)$ était simple, [45]. Il restait à voir qu'il était parfait. C'est ce que Michel a fait dans le cas \mathbb{T}^n . Un très bel argument géométrique de Bill Thurston permet d'en déduire le théorème pour toute autre variété compacte sans bord. Il est à noter que, dans le cas de la dimension 1, le résultat de [2] a été aussi annoncé par John Mather [46]. Dans la suite, les travaux de Michel et John ont bien sûr connu bien d'autres croisements et moments d'influence réciproque. On peut se référer à l'article [47] de John Mather pour un exposé succinct sur la simplicité du groupe $\text{Diff}_+^\infty(M)$. Il est toutefois intéressant d'esquisser la démonstration contenue dans [2] et développée dans [5], car on voit déjà là apparaître des objets et des théorèmes qui sont des fils conducteurs dans l'œuvre de Herman : l'action de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur le cercle ainsi que le théorème local de conjugaison à des rotations. Une remarque fondamentale est que l'action naturelle du groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur le cercle \mathbb{S} comme bord du disque de Poincaré contient les rotations. On identifie \mathbb{S} naturellement à $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On voit donc que l'on peut trouver une copie de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})^n$ dans $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^n)$ en prenant le produit des actions sur chacun des facteurs de \mathbb{T}^n . Cette copie de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})^n$ contient les translations $R_\alpha : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n, x \mapsto x + \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{T}^n$.

Comme $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ est parfait, on en conclut que $W(\mathbb{T}^n)$, le sous-groupe distingué de $\mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^n)$ engendré par les R_α , $\alpha \in \mathbb{T}^n$, est contenu dans le sous-groupe des commutateurs de $\mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^n)$. Comme ce dernier groupe est connexe pour la topologie C^∞ , il suffit de voir que l'intérieur du sous-groupe $W(\mathbb{T}^n)$ est non vide. C'est là qu'interviennent les translations diophantiennes. Rappelons que R_γ est une translation diophantienne, si $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{T}^n = \mathbb{T} \times \dots \times \mathbb{T}$ satisfait une condition diophantienne, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes C, d strictement positives et telles que :

$$\forall (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \left\| \sum_{i=1}^n k_i \gamma_i \right\| \geq \frac{C}{\max_{i=1}^n |k_i|^d},$$

où $\|\theta\| = \inf\{|t| \mid t \in \mathbb{R}, t = \theta \pmod{1}\}$, pour $\theta \in \mathbb{T}$. Si $\gamma \in \mathbb{T}^n$ satisfait à une condition diophantienne, il existe un voisinage V de R_γ dans $\mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^n)$ pour la topologie C^∞ , tel que pour tout $f \in V$, il existe $\lambda(f) \in \mathbb{T}^n$ et $g(f) \in \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^n)$, tels que :

$$f = R_{\lambda(f)} \circ g(f)^{-1} \circ R_\gamma \circ g(f).$$

C'est ce que Michel Herman appellera sous diverses formes le théorème de conjugaison locale. Il en résulte que l'intérieur de $W(\mathbb{T}^n)$ contient toutes les translations diophantiennes, ce qui finit de montrer que $\mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^n)$ est parfait. Le théorème de conjugaison locale est, sous ses premières formes, essentiellement dû à Arnold et Moser et appartient à ce que l'on appelle aujourd'hui la théorie KAM (pour Kolmogorov, Arnold et Moser). Toutefois les versions d'Arnold et Moser à l'époque ne couvraient pas le cas C^∞ sous cette forme et donc Michel Herman, avec la collaboration de Francis Sergeraert, démontre la version C^∞ dans [3], en utilisant un théorème de fonctions implicites dans les espaces de Fréchet qui venait d'être démontré par Sergeraert.

Tout au long de ses travaux Michel Herman retournera encore et encore à ce théorème de conjugaison locale lui en donnant plusieurs démonstrations et en obtenant de nouvelles conséquences. L'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur le cercle sera aussi un autre thème récurrent dans ses travaux. On peut dire que l'on commence à voir une première forme de sa méthodologie pour comprendre les phénomènes de la théorie des Systèmes Dynamiques : trouver des exemples explicites dont on peut comprendre toutes les perturbations (éventuellement contraintes dans un sous-espace ad hoc de tous les systèmes). Michel de manière presque obsessionnelle insistait pour comprendre d'abord certains phénomènes dans le cas des tores car disait-il « on peut tout écrire et calculer dans des coordonnées explicites », alors, que la tendance naturelle de beaucoup de dynamiciens est au contraire de trouver des formulations générales dans le cadre des variétés, afin d'éviter de faire des calculs explicites.

Il est peut-être bon de souligner ici, pour le non-spécialiste, le lien étroit des premiers travaux de Herman avec la conjecture d'Arnold sous forme locale. Pour les notations et les concepts utilisés, nous renvoyons à la partie de la notice de John Mather [48] sur Michel où il décrit la conjecture d'Arnold. Dans le cas du cercle \mathbb{T} , si $\gamma \in \mathbb{T}$ satisfait à une condition diophantienne, le théorème de conjugaison locale est équivalent au fait que tout difféomorphisme f proche de R_γ et de même nombre de rotation est C^∞ conjugué à R_γ . Ceci résulte du fait que pour $g \in \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$, la fonction $\lambda \rightarrow \rho(R_\lambda \circ g)$ est continue

localement monotone croissante et même strictement croissante en tout point λ avec $\rho(R_\lambda \circ g) \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

C'est au début des années 70, que j'ai dû croiser Michel. Mon premier souvenir de lui date d'une séance du séminaire de topologie d'Orsay. Je pense que c'était un exposé de Claude Roger, qui servait de mentor aux topologues débutants qu'étaient Daniel Luçon, Alexis Marin, Alain Prouté, Yves-Marie Visetti et moi-même, nous avions droit à ses cours particuliers. C'était certainement un des premiers exposés auxquels nous assistions sans vraiment comprendre tout ce qui se passait pendant cette nouvelle expérience. L'exposé concernait, il me semble, les classifiants de feuilletages et Michel est intervenu vigoureusement du fond de la salle. À la sortie du séminaire, Lucien Guillou, qui jouait le rôle de vieil initié pour les nouveaux élèves de Larry Siebenmann que nous étions, nous transmet le jugement de notre maître commun Larry Siebenmann : « Herman est follement amoureux des mathématiques », ce qui devait être pris comme le plus grand des compliments.

Michel Herman a obtenu sa thèse de 3e cycle en mars 1972. Elle représente une singularité parmi ses publications. Elle concerne la théorie de Nash sur les variétés (algébriques). Il y donne une caractérisation des sous-variétés d'une variété qui sont des intersections complètes. En particulier, une variété compacte est une intersection complète, algébrique et non-singulière dans un espace euclidien si et seulement si son fibré tangent est stablement trivial. Je n'ai découvert cette thèse de 3e cycle qu'en écrivant cet article. Alain Chenciner, à qui elle est dédiée, m'en a fait parvenir une copie. Bien que nous ayons, surtout à nos premières rencontres, parlé de cette théorie de Nash que je trouve fascinante, Michel ne m'a jamais donné une copie de cette thèse.

Dans la suite de ses travaux, Michel Herman s'est intéressé à la structure de groupe des difféomorphismes analytiques. Dans [6], il montre, par un argument très astucieux de densité des difféomorphismes analytiques dans les difféomorphismes C^∞ , que le groupe des difféomorphismes analytiques de \mathbb{T}^n isotopes à l'identité est simple. Encore une fois, la démonstration s'appuie sur des exemples explicites, obtenus à partir de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, ainsi que sur une version spécifique du théorème de conjugaison locale. À la fin de cet article, Michel Herman donne comme problème ouvert la simplicité du groupe des difféomorphismes analytiques isotopes à l'identité d'une variété compacte quelconque. Ce problème est à ma connaissance toujours ouvert. La principale difficulté par rapport au cas C^∞ est évidemment l'absence de difféomorphismes analytiques à support dans des boules. Pratiquement chaque année, Michel me rappelait ce problème. Comprendre la frontière entre analytique et C^∞ (et plus généralement C^r et $C^{r+\varepsilon}$, voir par exemple [30] pour le cas $r = 3$, ainsi que la notice de Mather [48]) le fascinait.

Les articles [7] et [8] sont dans la même veine. Dans [7], il démontre la simplicité de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs analytiques sur une variété compacte, c'est-à-dire la version infinitésimale du problème ouvert mentionné plus haut. Dans [8], il montre que le groupe des difféomorphismes analytiques de \mathbb{R} est simple. Dans le cas C^∞ , c'est le groupe des difféomorphismes à support compact qui est simple.

L'article suivant [9] porte comme titre « Sur la conjugaison des difféomorphismes du cercle à des rotations ». Il s'agit d'un article présenté aux « Journées

de géométrie de dimension infinie » organisées par Nicole Desolneux-Moulis à Lyon au printemps 1975. J'y assistai parce que je travaillais à cette époque sur les variétés sur le cube de Hilbert. Je ne me souviens pas d'une conférence faite par Michel (son domaine de recherches était très loin de mes préoccupations mathématiques). J'ai quand même un souvenir d'une discussion avec lui sur les restaurants, ce qui augurait d'une autre passion commune qui nourrirait notre amitié future. Il est intéressant de noter que cet article est présenté à une conférence au printemps 75 avant que Michel n'ait obtenu ses premiers résultats positifs sur la conjecture d'Arnold, et qu'il est paru effectivement en 76, donc après ces premiers résultats. Pourtant, la conjecture d'Arnold n'y est pas mentionnée ! Toutefois, il est clair aujourd'hui qu'il n'est question que de cela. Il reprend l'exemple célèbre :

$$f_b(x) = x + b + a \sin 2\pi x,$$

introduit par Arnold dans [49] et qui a conduit Arnold à poser sa conjecture. On voit déjà apparaître là des éléments qui seront importants dans la résolution de la conjecture d'Arnold. Le critère de conjugaison C^∞ est énoncé : un difféomorphisme f est C^∞ conjugué à une rotation si et seulement si pour tout entier $r \geq 1$, les dérivées d'ordre r des itérées f^n , $n \in \mathbb{Z}$, sont équibornées. On y voit introduite une autre « arme » utilisée très efficacement par Michel tout au long de ses travaux : comprendre les conjugués d'une famille de transformations dans leur adhérence, c'est la seconde forme de sa méthodologie. Dans ce cas précis, il annonce que pour $\gamma \in \mathbb{T}$, un nombre de Liouville (c'est-à-dire non rationnel et ne satisfaisant pas à une condition diophantienne), dans la fermeture pour la topologie C^∞ des conjugués C^∞ de R_γ , les difféomorphismes C^1 conjugués à une rotation forment un ensemble maigre au sens de Baire. Une excellente référence sur ce que Michel savait à ce moment-là est l'exposé de Harold Rosenberg [50] au Séminaire Bourbaki en novembre 1975, c'est peut-être par là qu'il faut commencer.

Dans [10], Michel Herman annonce l'existence d'homéomorphismes PL de \mathbb{T} topologiquement conjugués à une rotation irrationnelle, mais dont la mesure invariante est étrangère à la mesure de Lebesgue. Ceci force la conjugaison à être singulière, sa dérivée est Lebesgue presque partout nulle. Il s'agit encore une fois d'une communication présentée à un congrès qui a lieu en 75 et dont les actes paraîtront en 76. La conjecture d'Arnold est encore absente, tout en pointant son nez sous la surface. Cet article est le premier article de Michel, où la théorie ergodique apparaît. Cette théorie est une des composantes essentielles de sa démonstration de la conjecture d'Arnold. Bien que la théorie ergodique apparaisse ici pour la première fois dans ses travaux, Michel en avait déjà développé une connaissance presque encyclopédique au cours de conversations quasi-hebdomadaires avec François Ledrappier, Jean-Marie Strelcyn et Jean-Paul Thouvenot, voir la notice de ce dernier [51]. Durant plusieurs années, il a été un fidèle participant du séminaire de théorie ergodique de Paris VI.

Je peux dater ma relation amicale et mathématique avec Michel d'un jour très précis de septembre 75. Nous nous sommes rencontrés ce jour-là à Offilib, la meilleure librairie scientifique parisienne pendant longtemps. Nous l'écumions tous les deux indépendamment : les livres, surtout de mathématiques, ont été un autre grand ciment de notre amitié. Nous sommes allés prendre un pot,

avec Lucien Guillou que j'avais encore une fois traîné à Offilib, au café en face, celui qu'on appelait la plage à cause des ses chaises en osier. J'étais à la recherche d'un nouveau sujet de recherches, Bob Edwards avait « liquidé » celui sur lequel Larry Siebenmann nous avait aiguillé. Michel nous a parlé des transformations préservant la mesure et des merveilles de la théorie ergodique, que nous ignorions totalement. En une petite heure, il a totalement réorienté ma recherche et lui a donné la direction qu'elle a encore aujourd'hui. À partir de ce jour-là, j'ai vécu les mathématiques de Michel aux premières loges.

Quelques semaines après cette conversation Michel me fit savoir qu'il avait déjà obtenu une réponse positive à la conjecture d'Arnold, bien que l'ensemble des nombres de rotation pour lesquels il pouvait démontrer l'existence de la conjugaison C^∞ soit de mesure nulle. Si ma mémoire est bonne, il m'avait dit qu'il pensait que la solution était correcte, car il l'avait « testée » sur Adrien Douady. En fait les textes de Harold Rosenberg [43] et de Dennis Sullivan [52] sont certainement des comptes rendus plus conformes à ce qui s'est passé (voir aussi la notice de Raphaël Douady [53], qui deviendra par la suite un élève de Michel). Michel fit ensuite un exposé au séminaire de Dennis Sullivan à l'IHÉS. J'assistai évidemment à cet exposé qui eut lieu dans les derniers jours d'octobre 75. Je ne me rappelle plus qui était là, mais, c'était un dialogue entre trois titans : Michel, Dennis Sullivan et Pierre Deligne. C'est certainement un des grands moments mathématiques que j'ai connus. Au bout de 2 heures, Michel n'ayant qu'effleuré la question, Sullivan a proposé de se réunir le 1er novembre, vu que tout le monde était certainement libre, ce jour-là. Nous sommes donc revenu dans un IHÉS désert et difficile d'accès. Michel a tenu la rampe toute la journée, avec une courte interruption pour le déjeuner. Mon souvenir le plus marquant est le suivant : Pierre Deligne n'arrêtait pas de poser des questions ; à un moment, exaspéré, Dennis Sullivan lui a reproché de poser une question dont il lui était clair que Deligne connaissait la réponse. Ce dernier lui a répondu du tac au tac qu'il posait des questions dont il connaissait la réponse afin de se donner le temps de réfléchir aux points qu'il ne comprenait pas. Ce fut un très grand jour pour Michel. Cette participation de Pierre Deligne a certainement aidé Michel pour la suite. Pierre Deligne a amené des améliorations importantes à la preuve du théorème fondamental. Ces résultats ont été annoncés dans une note aux CRAS [11]. L'exposé [54] de Pierre Deligne au séminaire Bourbaki en février 1976 est le meilleur texte introductif aux premiers travaux de Herman sur la conjecture d'Arnold.

Il est amusant de constater que l'exposé [50] de Rosenberg a été fait mi-novembre 75, quelques semaines après que Michel donne une solution partielle de la conjecture d'Arnold. Dans ce texte, ce fait n'est pas mentionné. Je ne me souvenais plus si Harold a mentionné dans son exposé oral les derniers résultats de Michel, mais, il m'a confirmé qu'il l'a fait. L'exposé de Deligne [54] a été fait à la séance suivante du séminaire Bourbaki.

La thèse d'État [12] est soutenue le 23 avril 1976. On y trouve une démonstration de la conjecture d'Arnold pour les nombres de rotations de type borné qui forment un ensemble de mesure de Lebesgue nulle mais de dimension de Hausdorff 1. On y trouve aussi, les versions complètes de [9] et [10], ainsi que les articles [5], [6], [7] et [8], éventuellement complétés par des démonstrations.

Il m'est difficile de donner une idée sur la démonstration de la conjecture d'Arnold qui soit courte et utile. Toutefois, on peut en donner quelques éléments cruciaux. On dit que $\alpha \in \mathbb{T}$ est de type Roth, si on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \inf_{p/q \in \mathbb{Q}} q^{2+\varepsilon} \left\| \alpha - \frac{p}{q} \right\| > 0.$$

Cette condition est satisfaite par presque tout nombre. Une version précise du théorème de conjugaison local, prouvée dans [12] et s'inspirant d'un travail de Helmut Rüssmann [55], montre que si $f \in \text{Diff}^\infty(\mathbb{T})$ a un nombre de rotation $\rho(f)$ de type Roth et est assez proche de $R_{\rho(f)}$ dans la topologie $C^{2+\varepsilon}$, pour un $\varepsilon > 0$, alors, le difféomorphisme f est C^∞ conjugué à $R_{\rho(f)}$. Il reste alors à conjuguer un difféomorphisme f pour le rendre proche de $R_{\rho(f)}$. Pour cela, Herman introduit une suite g_n de difféomorphismes du cercle donnés par $\tilde{g}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\tilde{f}^i - ia)$, où \tilde{g}_n et \tilde{f} sont les relevés de g_n et f au revêtement universel \mathbb{R} de \mathbb{T} , et $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}^n(x)/n$ est donc un représentant ad hoc dans \mathbb{R} de $\rho(f) \in \mathbb{T}$. Les g_n sont des difféomorphismes C^∞ et convergent uniformément vers l'homéomorphisme g donné par le théorème de Denjoy qui conjugue topologiquement f à $R_{\rho(f)}$; de plus, on a $\tilde{g}_n \circ \tilde{f} \circ \tilde{g}_n^{-1} = R_a + (f^n - \text{Id} - na)/n \circ \tilde{g}_n^{-1}$. Il suffit donc de voir que $(\tilde{f}^n - \text{Id} - na)/n \circ \tilde{g}_n^{-1}$ tend vers zéro dans la $C^{2+\varepsilon}$ topologie. Il est clair que la dérivée seconde de cette dernière application fait intervenir en particulier le quotient de la dérivée seconde $D^2 f^n$ de l'itérée d'ordre n par la dérivée Dg_n . Comme on peut écrire :

$$D^2 f^n = Df^n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{D^2 f}{Df} \circ f^i \cdot Df^i \right),$$

$$Dg_n = \sum_{i=1}^{n-1} Df^i,$$

on voit que l'on fait intervenir par ces quotients des quantités qui peuvent être traitées par le théorème ergodique de Chacon-Ornstein. Ce qui montre l'intervention naturelle de la théorie ergodique. En fait, Herman démontre que la convergence de $(\tilde{f}^n - \text{Id} - na)/n \circ \tilde{g}_n^{-1}$ vers zéro dans la $C^{2+\varepsilon}$ topologie est vraie dès que f est $C^{1+\varepsilon'}$ conjugué à une rotation pour un $\varepsilon' > \varepsilon$. Il reste à voir que f est $C^{1+\varepsilon'}$ conjugué à une rotation; c'est surtout là que les conditions arithmétiques sur $\rho(f)$ interviennent. Évidemment cette esquisse ne dit rien de la finesse des arguments d'estimation utilisés pour obtenir ces résultats.

À la suite de sa thèse Michel Herman a séjourné à Warwick pendant le printemps 76. La publication [13] est de cette époque. Il y considère l'équation fonctionnelle $\psi - \psi \circ \mathbb{R}_\alpha = \varphi$, où $\psi, \varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ sont mesurables. Anosov a montré que pour certains choix de φ dans L^1 , cette équation a des solutions ψ mesurables, mais aucune d'elles n'est dans L^1 . Dans cette note, Michel Herman montre que si $\varphi \in L^1$ a une série de Fourier lacunaire, alors, il y a des solutions ψ dans L^2 .

Pendant ce séjour à Warwick, Michel a aussi complètement résolu la conjecture d'Arnold, puisqu'il trouve un ensemble de mesure pleine dans \mathbb{T} , qu'il appelle d'ailleurs A et tel que tout $f \in \text{Diff}^\infty(\mathbb{T})$ avec $\rho(f) \in A$ est conjugué à une rotation. Ce résultat est annoncé dans [14]. La démonstration complète se

trouve dans [18], la version améliorée des parties non publiées précédemment de sa thèse [12]. La lecture de [18] montre bien le talent de Michel pour étudier une question de manière exhaustive et lui donner le meilleur traitement possible. Notons aussi qu'au chapitre 9 de [18], Herman donne une démonstration de la conjecture d'Arnold qu'il qualifie d'élémentaire puisqu'elle n'utilise plus un théorème de conjugaison local.

Une caractérisation complète de l'ensemble des nombres de rotations pour lesquels la conjugaison de Denjoy est toujours C^∞ a été donnée par Jean-Christophe Yoccoz [56].

Les deux articles suivants sont parus dans les comptes-rendus de la « Troisième École de Mathématiques d'Amérique Latine » qui a eu lieu en juillet 1976 à Rio de Janeiro à l'IMPA, dans les anciens locaux près de la place Tiradentes, au cœur du quartier chaud de Rio. J'y assistai sur la recommandation de Michel. J'ai évidemment des souvenirs extrêmement vifs de ce premier congrès dans le monde des systèmes dynamiques, en particulier, du premier déjeuner où j'ai été ébloui par une conversation mathématique très animée entre trois mathématiciens et surtout menée par un gamin volubile qui buvait énormément de Coca-Cola : Charles Pugh, Sheldon Newhouse et le « gamin » Ricardo Mañé. La baie de Rio vue du Pain de Sucre et du Corcovado dès les premiers jours m'a tellement marqué, que j'y suis retourné le week-end avec Michel qui n'y avait pas encore été. J'ai souvenir d'un Michel radieux au sommet du Pain de Sucre, se protégeant du soleil. Je me souviens surtout de trois conférences de mathématiques : une de José Adem qui faisait un cours en espagnol [57], la conférence de Michel sur l'invariant de Godbillon-Vey et une conférence de Jürgen Moser (si impressionnant dans cette première rencontre comme dans les suivantes) qui, il me semble, portait sur KdV dont j'entendais parler pour la première fois (ma mémoire me trahit-elle encore une fois, aucun des papiers publiés par Moser dans les proceedings ne porte sur cette question?). Je vois Michel, à la sortie de sa conférence, discutant avec Jürgen Moser, qui avait ce regard souriant et si infiniment doux dont il gratifiait ceux dont il appréciait les mathématiques. Je vois aussi Michel avec Jaco Palis, qui l'entourait de cette chaleur et de cette sollicitude (peut-être) brésilienne (mais dans laquelle je reconnais aussi une composante moyen-orientale), dont il fait si souvent preuve. Michel a été très heureux là ; ceux qui lui sont proches savent combien les moments de bonheur ont été précieux dans sa vie. Son plaisir d'être à Rio n'a fait que s'accroître au fil des années, jusqu'à décider d'y aller début 2001 pour plusieurs années. Quel dommage qu'il n'ait pas pu aller vivre à Rio, où il était ces dernières années toujours moins malheureux qu'ailleurs.

Pour en revenir au contenu mathématique des publications de Michel, l'article [15] étudie les chemins $(f_t)_{t \in [0,1]}$ de classe C^1 dans $\text{Diff}^\infty(\mathbb{T})$ (par exemple). On désigne par $M(f_t)$ l'ensemble des points $t \in [0,1]$ tels que f_t soit C^∞ conjugué à une rotation. Si $\rho(f_t)$ n'est pas une constante, Herman montre que la mesure de Lebesgue de $M(f_t)$ est > 0 . De plus, cette mesure tend vers 1 si la famille f_t tend en topologie C^3 vers la famille des rotations R_t , $t \in [0,1]$. En fait, un raisonnement élémentaire montre que l'on a :

$$\forall f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}), \forall \alpha \in \mathbb{T}, \|\rho(f) - \alpha\| \leq \sup_{x \in \mathbb{T}} \|f(x) - R_\alpha(x)\|.$$

Si $g = h^{-1}R_\alpha h$ avec h un C^1 -difféomorphisme, il en résulte que :

$$\forall f \in \text{Homeo}_+(\mathbb{T}), \|\rho(f) - \rho(g)\| \leq \sup_{x \in \mathbb{T}} |h'(x)| \sup_{x \in \mathbb{T}} \|f(x) - g(x)\|.$$

On peut, alors, écrire $M(f_t) = \cup_{k \in \mathbb{N}} D_k$, où l'ensemble D_k est formé par les $t \in [0, 1]$ tels que $f_t = h^{-1}R_\alpha h$, avec h tel que $\sup_{t \in T} |h'(t)| \leq k$. Si on pose $C = \sup_{(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{T}} \partial f_t / \partial t(x)$, l'application continue $t \mapsto r(t) = \rho(f_t)$ est lipschitzienne sur D_k de constante Ck , donc $m(r(D_k)) \leq Ckm(D_k)$. L'image $r(M(f_t))$ est un intervalle $[a, b]$ non réduit à un point. Par la conjecture d'Arnold $r(M(f_t)) = \cup_{k \in \mathbb{N}} r(D_k) \supset [a, b] \cap A$, qui est de mesure $b - a > 0$. Il en résulte que l'on a $0 < m(r(D_k)) \leq Ckm(D_k)$, pour au moins un indice k , et donc $m(M(f_t)) > 0$. Le fait que $m(M(f_t)) \rightarrow 1$ quand f_t tend vers la famille des rotations R_t , $t \in [0, 1]$, résulte encore une fois d'une version précise du théorème de conjugaison local.

L'article [16] répond positivement à une question de Rosenberg et Thurston : l'invariant de Godbillon-Vey d'un feuilletage par plan du tore \mathbb{T}^3 , de classe C^2 et transversalement orientable est nul. Cet invariant de Godbillon-Vey a été le premier invariant numérique des feuilletages qui ne venait pas des classes caractéristiques du fibré normal d'un feuilletage de codimension 1, puisque Thurston avait montré qu'il pouvait prendre n'importe quelle valeur réelle en prenant des exemples ad hoc de feuilletage de codimension 1 sur des variétés de dimension 3 « plutôt hyperboliques » que plates. Le travail de Herman a été une étape importante pour la compréhension de cet invariant de Godbillon-Vey jusqu'aux travaux de Duminy. Il faut toutefois ajouter qu'au même moment que Herman, Guy Wallet obtenait aussi un résultat un peu plus faible de ce type [58]. Pour démontrer la nullité de l'invariant de Godbillon-Vey, Herman utilise un travail de Rosenberg et Roussarie : un tel feuilletage sur \mathbb{T}^3 s'obtient par une opération de type suspension, à partir de deux difféomorphismes $f, g \in \text{Diff}_+^2(\mathbb{T})$ qui commutent. Comme les feuilles du feuilletage sont des plans, les nombres de rotation de f et g sont irrationnels et rationnellement indépendants. Ensuite, utilisant une classe de cohomologie du groupe $\text{Diff}_+^2(\mathbb{T})$ introduite par Thurston pour exprimer l'invariant de Godbillon-Vey dans ce cadre, il montre que l'invariant est donné par :

$$- \int_{\mathbb{T}} \left[\frac{\log Dg^n}{n} \log Df^{-1} + \frac{\log Dg^{-n}}{n} \log Df \right] dm$$

où m est la mesure de Lebesgue et n est un entier quelconque. Il reste à observer que $\log Dg^{\pm n}/n \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$. Or, on peut écrire :

$$\frac{\log Dg^n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\log Dg) \circ g^i,$$

par l'unique ergodicité de g (de nombre de rotation irrationnel), on en déduit que $\log Dg^n/n$ tend vers une constante, cette constante est nécessairement nulle car $\int_{\mathbb{T}} Dg^n dm = 1$ (puisque g^n est un difféomorphisme de \mathbb{T}).

Mike Shub était en 76-77 en sabbatique à Orsay et il y avait une activité assez forte en systèmes dynamiques autour de son cours. C'est donc tout naturellement en automne 76 que Michel est venu à Orsay nous parler de son dernier

travail : la construction d'un difféomorphisme minimal sur \mathbb{S}^3 , c'est-à-dire d'un difféomorphisme dont toute orbite est dense. C'était une construction qui était assez subtile et où des propriétés fines de théorie de la mesure intervenaient. À la suite de son exposé, il m'avait encouragé à regarder le cas des variétés produits du type $\mathbb{T} \times M$. M'inspirant du travail d'Anosov-Katok [59] que Michel m'avait fait découvrir, je réussis à traiter ce cas dans les mois suivants. Finalement, nous joignîmes nos forces et les derniers arguments ont été échangés dans une conversation téléphonique entre Orsay où je me trouvais et l'Institut Mittag-Leffler où Michel a dû passer deux mois au printemps 77. Nous avons obtenu qu'une variété compacte, munie d'une action localement libre du cercle, admettait toujours un difféomorphisme de classe C^∞ dont toute orbite est dense [18]. En fait, si on désigne par R_t , $t \in \mathbb{T}$, les éléments de l'action de \mathbb{T} sur la variété M , alors, dans la fermeture de l'orbite $O^\infty(\mathbb{T}) = \{f \circ R_t \circ f^{-1} \mid f \in \text{Diff}_+^\infty(M)\}$ pour la topologie C^∞ , les difféomorphismes minimaux forment un G_δ dense. Ce travail s'inspire fortement de [59] et, comme nous l'apprîmes par la suite, l'existence de difféomorphismes minimaux était due à Anatole Katok, qui l'avait déjà annoncée dans [60], voir [61], §11.44 pages 102–105, pour la preuve. Notre travail a beaucoup popularisé cette méthode d'Anosov-Katok en la mettant à l'œuvre dans son cas le plus simple.

C'est malheureusement à cette époque que Michel a été victime d'une agression qui devait le laisser perpétuellement handicapé. Jusqu'à la fin de sa vie, il a gardé un genou très douloureux et il devait utiliser une béquille. L'article [18] a été rédigé par Michel à la fin du printemps 77, pendant qu'il était hébergé chez Harold Rosenberg, à sa sortie de l'hôpital après cette agression. Avec François Laudénbach, nous allions le voir en lui emmenant des gâteaux au chocolat de chez Lenôtre, un de nos vices communs. Cet article fut publié dans les comptes rendus du colloque de systèmes dynamiques à Varsovie de l'été 77. Comme Michel n'avait pas pu se rendre à ce colloque, à la suite de ses problèmes de genou, et que je n'avais pas prévu d'y aller, c'est Mike Shub qui a présenté le papier pour nous.

C'est à la rentrée 77, que Pierre Arnoux et Jean-Christophe Yoccoz sont devenus les deux premiers élèves de Michel (Larry Siebenmann est resté mon patron de thèse. Jusqu'à ce jour, il s'est toujours intéressé de très près à mes progrès). Michel a fait travailler Pierre sur les échanges d'intervalles et Jean-Christophe sur les difféomorphismes du cercle, voir leurs notices [62, 63].

L'exposé de Michel Herman [19] au Congrès International des Mathématiciens, qui eut lieu à Helsinki pendant l'été 1978, donne un panorama de ses travaux qu'il est intéressant de consulter. Il y réfère déjà à des travaux qu'il n'a pas publiés de son vivant et qui ont pourtant circulé sous forme de notes manuscrites. Pour ce premier exemple, il s'agit des constructions de difféomorphismes ergodiques ayant diverses propriétés.

En 78-79, Michel a co-organisé, avec François Ledrappier et Jean-Paul Thouvenot le séminaire de théorie ergodique de Paris VI sur les travaux de Yasha Pesin [64, 65] qui permettent d'étendre la théorie des difféomorphismes d'Anosov et celles des difféomorphismes Axiome A, introduite par Smale, en mettant en lumière l'universalité du rôle des exposants de Lyapunov et leur importance dans les calculs d'entropie. Il s'agit là d'une pierre angulaire de la

théorie moderne des systèmes dynamiques. Ce séminaire, ainsi que les travaux de David Ruelle [66], ont permis de diffuser rapidement les travaux de Pesin, au delà du cercle des dynamiciens d'Europe de l'Est. Des notes manuscrites ont été distribuées pendant ce séminaire et ont beaucoup circulé ensuite. Une des forces des travaux de Pesin est d'avoir réalisé que les variétés stables existaient presque sans aucune condition, ce qui permet de trouver des coordonnées produits stable-instable mesurables, dans lesquels la théorie ergodique pouvait intervenir de manière bien plus efficace. Les exposés de Michel Herman, Jean-Christophe Yoccoz et moi-même concernaient surtout la partie existence de variété stable. Ils montraient comment adapter les arguments du cas uniformément hyperbolique tels que nous les avons appris des travaux d'Irwin [67] et du cours de Mike Shub [68]. La version finale en anglais des notes [20] est parue en 1983, dans les comptes-rendus du colloque d'inauguration des nouveaux locaux de l'IMPA à Rio en 1981. Elle avait été rédigée par Jean-Christophe et moi-même dans un de ces bureaux « cagibi » qui servaient aux thésards de l'Université de Warwick, où nous séjournions pendant l'été 1980.

L'article [21] (dédié à Laurent Schwartz pour son 65ème anniversaire) utilise la théorie de Pesin pour montrer l'existence d'un difféomorphisme minimal d'entropie non nulle sur une variété compacte. Michel considérait cet article comme un de ses tout meilleurs. C'est effectivement un véritable tour de force : jusque là les difféomorphismes minimaux avaient plutôt tendance à être d'entropie nulle (translations sur les tores, flots horocycliques, exemples donnés par les techniques Anosov-Katok comme dans [17]). Par contre, l'entropie non nulle se rencontrait plutôt dans les situations d'hyperbolicité à la Anosov-Smale, ce qui implique l'existence d'orbites périodiques. La construction de [22] se fait à l'aide d'un produit croisé (skew-product) au-dessus d'une translation irrationnelle de \mathbb{T} . On considère l'application $A : \mathbb{T} \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, de classe C^∞ , définie par :

$$A(\theta) = A_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta & -\sin 2\pi\theta \\ \sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix},$$

où $\lambda > 1$ est fixé. On se donne $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ un sous-groupe discret tel que $M_1 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$ soit le fibré unitaire tangent d'une surface compacte à courbure négative (en particulier $-\mathrm{Id} \in \Gamma$). Le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ opère sur M_1 à gauche. Pour tout $\alpha \in \mathbb{T}$, on peut définir le produit croisé $F_\alpha : \mathbb{T} \times M_1 \rightarrow \mathbb{T} \times M_1, (\theta, x) \mapsto (\theta + \alpha, A_\theta x)$. Michel Herman montre que pour $\alpha \in \mathbb{T}$, l'entropie topologique de F_α est $\geq 2 \log(\lambda/2 + 1/2\lambda) > 0$, et pour un G_δ dense de α , le difféomorphisme F_α est minimal. Je ne résiste pas à la tentation d'en donner pratiquement la démonstration, car elle est bien représentative d'un style de mathématiques qu'affectionnait particulièrement Michel. En fait, la mesure de Haar sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, qui est unimodulaire, donne sur M_1 une mesure de probabilité qui vient d'une forme volume analytique. Cette mesure ν est préservée par l'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, grâce à l'unimodularité. Il en résulte que F_α préserve la mesure produit $\mu = m \otimes \nu$, où m est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{T} . C'est l'entropie métrique de F_α pour μ que l'on peut

minorer par $2 \log(\lambda/2 + 1/2\lambda) > 0$. Par la théorie de Pesin, il suffit de minorer la quantité :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T} \times M} \log \|D_{(\theta,x)} F_\alpha^n\| d\mu(\theta, x).$$

On a $F_\alpha^n(\theta, x) = (\theta + n\alpha, A_{\alpha,\theta}^n x)$, où $A_{\alpha,\theta}^n = A_{\theta+(n-1)\alpha} \cdots A_{\theta+\alpha} A_\theta$. En ne regardant que la norme de la restriction de l'action de la dérivée de F_α sur la partie tangente à M_1 dans le produit $M = \mathbb{T} \times M_1$ et en comparant des normes, on voit que la quantité ci-dessus se minore par :

$$2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T} \times M_1} \log \|A_{\alpha,\theta}^n\| dm(\theta).$$

Le théorème ergodique sous-additif montre que la limite $a_\alpha(\theta)$ de la suite $n^{-1} \log \|A_{\alpha,\theta}^n\|$ existe pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}$, que la fonction a_α est invariante par R_α et que $\lambda_+(\alpha, A) = \int_{\mathbb{T}} a_\alpha dm$ est $\inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T} \times M_1} \log \|A_{\alpha,\theta}^n\| dm(\theta)$, la limite de la suite sous-additive $\frac{1}{n} \int_{\mathbb{T} \times M_1} \log \|A_{\alpha,\theta}^n\| dm(\theta)$. Comme A est à valeurs dans $SL(2, \mathbb{R})$, la fonction a_α est ≥ 0 . Pour α irrationnel, l'ergodicité de R_α montre que $a_\alpha = \lambda_+(\alpha, A)$ presque partout. Si $\alpha = p/q \pmod{1}$, alors $a_\alpha(\theta)$ existe partout et est égale $q^{-1} \log |\beta_{p,q}(\theta)|$, où $\beta_{p,q}(\theta)$ est la valeur propre de plus grand module de la matrice $A_{p/q,\theta}^q$. Ensuite, pour α irrationnel, par la stricte ergodicité de R_α , on montre que $n^{-1} \log[\sup_\theta \|A_{\alpha,\theta}^n\|]$ converge aussi vers $\lambda_+(\alpha, A)$. En prenant, une diagonalisation sur \mathbb{C} de la partie rotation de A_θ et en effectuant des conjugaisons dans $SL(2, \mathbb{R})$ on se ramène à un cocycle $C_{\alpha,\theta}^n$ à valeurs matricielles, avec $\|C_{\alpha,\theta}^n\| \leq K \|A_{\alpha,\theta}^n\|$, où K est une constante, et tel que $\int_{\mathbb{T}} C_{\alpha,\theta}^n dm(\theta)$ est une matrice dont un des coefficients est $(\lambda/2 + 1/2\lambda)^n$. Il en résulte aisément que $\lambda_+(\alpha, A) \geq \log(\lambda/2 + 1/2\lambda)$, pour tout α irrationnel. Comme $\lambda(\alpha, A)$ est semi-continue supérieurement en α (car c'est la borne inférieure des quantités $n^{-1} \int_{\mathbb{T} \times M} \log \|A_{\alpha,\theta}^n\| dm(\theta)$, qui sont continues en α), on en conclut que $\lambda_+(\alpha, A) \geq \log(\lambda/2 + 1/2\lambda)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{T}$. Ce qui finit de montrer que l'entropie de F_α est toujours > 0 .

Il reste à voir que pour un G_δ dense de $\alpha \in \mathbb{T}$, le difféomorphisme F_α de $M = \mathbb{T} \times M_1$ est minimal. Comme M admet une base dénombrable d'ouverts non vides de la forme $I \times V$, où I est un intervalle non vide de \mathbb{T} et V est un ouvert de M_1 , il suffit de voir que l'ouvert $\mathcal{U}_{I \times V} = \{\alpha \in \mathbb{T} \mid M = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F_\alpha^n(I \times V)\}$ de \mathbb{T} est dense. On remarque alors que cet ouvert $\mathcal{U}_{I \times V}$ contient l'intersection de l'ouvert $\mathcal{V}_{I \times V} = \{\alpha \in \mathbb{T} \mid \exists \theta_0 \in \mathbb{T}, \{\theta_0\} \times M_1 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F_\alpha^n(I \times V)\}$ avec les irrationnels $\mathbb{T} \setminus \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. En effet, soit α dans cette intersection comme $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F_\alpha^n(I \times V)$ est ouvert et M_1 compact, il existe un intervalle ouvert $J \ni \theta_0$ avec $J \times M_1 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F_\alpha^n(I \times V)$. Il en résulte que l'ensemble invariant $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F_\alpha^n(I \times V)$ contient l'orbite $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F_\alpha^n(J_1 \times M_1) = [\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} R_\alpha^n(J)] \times M_1$, comme J est un ouvert non vide et que α est irrationnel, on a $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} R_\alpha^n(J) = \mathbb{T}$. On est ramené à voir que $\mathcal{V}_{I \times V}$ est dense dans \mathbb{T} . On va montrer qu'il contient tous les rationnels p/q , avec p et q premiers entre eux et $1/q$ plus petit que la longueur de I . On a $F_{p/q}^q(\theta, x) = (\theta, A_{p/q,\theta}^q(x))$, il suffit de voir qu'il existe $\theta \in I$ tel que l'action de la matrice $A_{p/q,\theta}^q$ soit minimale sur M_1 . En fait, comme $A_{p/q,\theta}^q = A_{\theta+(q-1)p/q} A_{\theta+(q-2)p/q} \cdots A_{\theta+p/q} A_\theta$ et $A_{p/q,\theta+i/q}^q = A_{\theta+i/q+(q-1)p/q} A_{\theta+i/q+(q-2)p/q} \cdots A_{\theta+i/q+p/q} A_{\theta+i/q}$ sont deux

produits de matrices inversibles qui diffèrent par une permutation cyclique, la minimalité de l'action $A_{p/q,\theta}^q$ est équivalente à celle de l'action de n'importe laquelle des matrices $A_{p/q,\theta+i/q}^q$. Or $1/q$ est inférieur à la longueur de I et donc pour tout $\theta \in \mathbb{T}$, l'un des $\theta + i/q$ sera dans I , on voit donc que l'on doit montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{T}$ tel que l'action de la matrice $A_{p/q,\theta}^q$ sur M_1 soit minimale. Herman utilise alors la minimalité du flot horocyclique sur M_1 . L'action du flot horocyclique h_t sur M_1 est l'action des matrices $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Depuis, les travaux de Hedlund, on sait que le flot horocyclique est minimal sur M_1 et même que l'action de chaque difféomorphisme h_{t_0} sur M_1 , pour tout $t_0 \neq 0$, est minimale. Une matrice parabolique de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ est une matrice conjuguée dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ à une des h_t , avec $t \neq 0$. Une matrice de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ est parabolique si elle n'est pas l'identité et ses deux valeurs propres sont confondues et égales à 1. Il faut alors trouver un θ tel que $A_{p/q,\theta}^q$ soit parabolique. Le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ agit bien sûr sur l'espace projectif $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \approx \mathbb{T}$ des droites vectorielles de \mathbb{R}^2 , on note par $\hat{B} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, l'action de $B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \approx \mathbb{T}$. Tout \hat{B} est un homéomorphisme de \mathbb{T} homotope à l'identité, on peut donc parler de son nombre de rotation $\rho(\hat{B})$. On a $\rho(\hat{B}) = 0$ si et seulement si \hat{A} admet un point fixe c'est-à-dire si A a une valeur propre réelle. Revenons alors à $A_{p/q,\theta}^q$, par ce que l'on a vu plus haut $a_{p/q}(\theta)$ existe partout et est égale $q^{-1} \log |\beta_{p,q}(\theta)|$, où $\beta_{p,q}(\theta)$ est la valeur propre de plus grand module de la matrice $A_{p/q,\theta}^q$, et $\int_{\mathbb{T}} a_{p/q}(\theta) d\theta = \lambda_+(p/q, A) > 0$. Il en résulte qu'il existe θ telle que $A_{p/q,\theta}^q$ admette une valeur propre strictement plus grande que 1 en module, cette valeur propre est alors réelle, car $A_{p/q,\theta}^q \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Notons alors par O le sous-ensemble de \mathbb{T} formé par les θ tels que $A_{p/q,\theta}^q$ ait une valeur propre strictement plus grande que 1 en module. C'est un ouvert de \mathbb{T} , de plus $\rho(\hat{A}_{p/q,\theta}^q) = 0$, pour tout $\theta \in O$. On a $O \neq \mathbb{T}$, car $\hat{A}_\theta = R_{2\theta}\hat{\Lambda}$, où $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ et donc $\theta \mapsto \rho(\hat{A}_\theta)$ est surjectif. Prenons $\theta_0 \in \bar{O} \setminus O$ alors $\rho(A_{p/q,\theta_0}^q) = 0$ et $A_{p/q,\theta_0}^q$ a une valeur propre réelle de module 1. Montrons que $\hat{A}_{p/q,\theta_0}^q$ n'est pas l'identité. Puisque $\hat{A}_\theta = R_{2\theta}\hat{\Lambda}$, il n'est pas difficile de voir que, pour tout $t \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \approx \mathbb{T}$ fixé, l'application $\theta \mapsto \hat{A}_\theta(t)$ est une application de \mathbb{T} dans lui-même (localement) strictement croissante. Par composition, cette propriété est encore vrai pour $\hat{A}_{p/q,\theta_0}^q$ il en résulte que $\theta \mapsto \rho(A_{p/q,\theta}^q)$ est strictement croissante en tout point θ tel que $\hat{A}_{p/q,\theta}^q$ est l'identité. Comme $\theta_0 \in \bar{O} \setminus O$ et que $\theta \mapsto \rho(A_{p/q,\theta}^q)$ est constante sur \bar{O} , on en conclut que $A_{p/q,\theta_0}^q$ a ses deux valeurs propres réelles et égales (donc égales soit à 1 soit à -1) et qu'elle n'est pas diagonale. Comme $M_1 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$, avec $-\mathrm{Id} \in \Gamma$, on voit que l'action de $A_{p/q,\theta_0}^q$ est l'action d'une matrice parabolique et qu'elle est donc minimale.

C'est en 1980 que Michel a commencé son séminaire de Systèmes Dynamiques à l'École polytechnique. Ce séminaire s'est poursuivi en différents endroits jusqu'à la fin de sa vie. J'y ai découvert une grande partie de toutes les nouvelles avancées des Systèmes Dynamiques (du moins avant mon départ pour les États-Unis). Je crois que ce séminaire a non seulement marqué tous ses participants, mais qu'il a eu un rôle très important pour la dissémination des connaissances en dehors du cercle des participants réguliers.

Au début des années 80, Michel Herman a fait un cours à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm sur les théorèmes KAM. Il a produit des notes manuscrites qui ont largement circulé et exerce jusqu'à aujourd'hui une grande influence. Une trace publiée de ce cours se trouve dans un séminaire Bourbaki de Jean-Benoît Bost [69].

Dans [22], Michel, avec Jean-Christophe Yoccoz, établit, pour des corps non-archimédiens, les analogues du théorème de Siegel sur la linéarisation des germes de fonctions holomorphes, ainsi qu'un analogue du théorème de conjugaison local d'Arnold et Moser.

Ce dernier travail [22] comme [20] a été publié dans les proceedings de la conférence qui eut lieu à Rio de Janeiro l'été 1981 pour l'inauguration des nouveaux locaux de l'IMPA. C'était une très grande conférence qui a couvert un très large spectre des Systèmes Dynamiques. C'était aussi le premier de nombreux séjours de Michel dans le quartier de Leblon, dont il apprit à connaître tous les restaurants et surtout la churrascaria Plataforma qu'il affectionnait particulièrement et où il m'a entraîné plusieurs fois. Nous sommes allés ensemble un des premiers jours de nouveau au sommet du Pain de Sucre, ce mois de juin 1981 avait été particulièrement pourri à Paris et lézarder au soleil de Rio nous avait remonté le moral. Je me souviens aussi d'un dîner avec Michel, Charles Conley (en grande forme) et Eddy Zehnder.

L'article [23] a été publié en 1983, mais, nous en avons corrigé la première version pendant l'été 1982 assis tous les deux sur le muret du jardin du CIRM à Luminy pendant le colloque de théorie ergodique que Michel avait organisé avec François Ledrappier. C'est un article foisonnant, où Michel récolte tous les bénéfices possibles des méthodes qu'il a mises au point dans [21]. Des versions abstraites et générales de minorations d'exposants de Lyapunov, ainsi que des études fines de produits croisés lui permettent de construire plein d'exemples et de contrexemples qui délimitent les domaines de ses théorèmes préférés : Siegel, Arnold-Moser, Denjoy. Il introduit dans ce papier une notion de nombre de rotations pour les produits croisés d'homéomorphismes du cercle au-dessus d'un homéomorphisme minimal qui se révèle bien utile (elle apparaît aussi dans des travaux de R. Johnson et Moser [70]). Les exposés que Michel devait faire dans son séminaire en décembre 2000 (et qui n'ont donc pas eu lieu) concernaient les exposants de Lyapunov, ce qui montre bien que ce sujet a fait partie des préoccupations de Michel jusqu'au bout.

C'est vers cette époque, que pour la seule et unique fois de sa vie Michel s'est fâché avec moi. Il reprochait à une tierce personne de ne pas le remercier suffisamment dans son dernier papier. Comme je les aimais bien tous les deux, j'ai eu le malheur de lui dire que tout ça n'avait pas tant d'importance et que ce n'était pas si grave que cela, il s'est alors fermé comme une huître. J'avais visiblement touché une corde bien plus sensible que je ne le pensais. Quelques jours après, j'ai eu droit à un coup de téléphone de Michel où il m'a fait la morale sur nous autres petits jeunes (seules huit années nous séparent) qui ne reconnaissent pas les mérites de leurs aînés qui les ont tant aidés et ainsi de suite. Afin de finir de me clouer le bec, il a ajouté que d'ailleurs François (Laudenbach) lui donnait raison. J'ai dû balbutier quelques mots, après lesquels, il a raccroché. L'incident était clos et nos rapports ont après toujours été au

beau fixe. Je suis bien conscient que beaucoup de lecteurs qui ont connus Michel ne l'ont jamais considéré comme un monument de gentillesse. Il a souvent fait preuve d'une grande agressivité tant dans ces relations professionnelles que personnelles. Toutefois quand il décidait d'exercer son charme celui-ci pouvait être infini. Ces élèves ont tous parlé de sa grande sollicitude et de sa gentillesse à leur égard. Personnellement, en dehors de l'incident mentionné ci-dessus, mes relations avec lui ont toujours été agréables et enrichissantes, tant sur le plan mathématique que sur le plan personnel.

Le deux volumes de [24] et [30] représentent la partie publiées des travaux de Herman sur le théorème de la courbe invariante pour les « twist-maps » de l'anneau. La découverte par John Mather [71] et indépendamment par Serge Aubry [72] des ensembles dits d'Aubry-Mather avait, à cette époque du début des années 80, bien relancé les travaux sur ces questions difficiles. Pour expliquer un peu ce dont il s'agit, considérons sur l'anneau $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ les coordonnées naturelles (θ, r) et la 1-forme $r d\theta$ dont la dérivée extérieure $-d\theta \wedge dr$ est une forme volume qui donne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$. Un difféomorphisme $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ est dit globalement canonique si la forme $F^*(r d\theta) - r d\theta$ est exacte, un tel F préserve les aires. C'est une sous-classe de l'ensemble des difféomorphismes préservant les aires, par exemple $G_{r_0}(\theta, r) = (\theta, r + r_0)$ préserve les aires mais n'est pas globalement canonique. L'exemple fondamental de difféomorphisme globalement est $T(\theta, r) = (\theta + r, r)$, c'est ce qu'on appelle le cas intégrable (plus précisément un difféomorphisme conjugué à T est dit intégrable). C'est effectivement un cas simple et intéressant puisque T préserve chaque cercle horizontal $r = \alpha$ et que sur ce cercle T n'est rien d'autre que la rotation R_α . Le théorème de la courbe invariante de Moser, qui fait partie de la famille des théorèmes KAM, dit que si $\alpha \in \mathbb{T}$ satisfait à une condition diophantienne, pour tout difféomorphisme globalement canonique F , qui est une petite perturbation de T en topologie C^k pour un certain $k = k(\alpha)$, il existe une courbe invariante par F , non homotopiquement triviale et sur laquelle F est conjugué à R_α . Rüssmann a beaucoup amélioré la valeur de $k(\alpha)$, voir par exemple [73]. Le but de [24] et [30] est de montrer que dans le cas où α est de type constant (c'est-à-dire que $\inf_{p/q \in \mathbb{Q}} q^2 |\alpha - p/q| > 0$), alors le plus petit $k(\alpha)$ possible est 3 (Rüssmann avait aussi obtenu la valeur $3 + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$). Dans le premier des deux volumes, Michel reprend les travaux de Birkhoff qui montrent qu'une courbe invariante par un tel F et non homotopiquement triviale est nécessairement de la forme $\{(\theta, \psi(\theta)) \mid \theta \in \mathbb{T}\}$, où $\psi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application lipschitzienne. Dans les chapitres 2 et 3, il montre que si on fixe un nombre de rotation $\alpha \in \mathbb{T}$, il existe en suite de difféomorphismes F_n , $n \in \mathbb{N}$ de classe C^∞ tels que $F_n \rightarrow T$ en topologie $C^{3-\varepsilon}$ et qui n'ont pas de courbe invariante non homotopiquement triviale sur laquelle F_n est conjugué à R_α . Je ne peux pas esquisser ici la démonstration. Je voudrais juste donner une idée du début pour montrer comment exclure des courbes invariantes. Soit F de la forme $F(\theta, r) = (\theta + r, r + \varphi(\theta + r))$, où $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$. Si une courbe non homotope à 0 est invariante par F , elle est de la forme $\{(\theta, \psi(\theta)) \mid \theta \in \mathbb{T}\}$. Si on note par $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ la restriction de F à ce cercle identifié à \mathbb{T} par la projection, Herman montre que :

$$x + \frac{1}{2}\varphi(x) = \frac{\tilde{g}(x) + \tilde{g}^{-1}(x)}{2},$$

où \tilde{g} est un relevé ad hoc de g en un homéomorphisme de \mathbb{R} . Je me souviens du sourire radieux de Michel le jour, où dans son séminaire, il nous écrivit cette équation. C'était clairement pour lui une observation géométrique clé. Cette équation permet alors d'exclure les courbes invariantes, en s'arrangeant pour que φ soit choisi tel que $\theta \mapsto \theta + 1/2\varphi(\theta)$ évite le sous-ensemble formé par les $(\tilde{g} + \tilde{g}^{-1})/2$, où g est le relevé d'un homéomorphisme de \mathbb{T} de nombre de rotation α .

Dans les chapitres 2 et 3, Michel donne deux constructions pour la suite F_n . Dans le chapitre 4, il démontre le théorème de Moser pour α de type constant, en topologie $C^{3+\varepsilon}$, pour tout $\varepsilon > 0$. Si j'avais à peu près suivi le contenu de [24], surtout à l'occasion des nombreux séminaires donnés par Michel sur cette partie, il est vrai que je n'ai pas lu du tout le second volume [30]. Dans le premier chapitre de ce second volume (chapitre 5), Michel démontre le cas C^3 , il lui faut près de 90 pages, l'une des difficultés est qu'il faut renoncer aux espaces Hölder et introduire des espaces de Sobolev. Michel considérait ce chapitre comme étant de loin la meilleure partie de ces deux volumes. Le chapitre 6 introduit les espaces de Besov et montre que le théorème d'existence de courbe invariante s'applique sous des hypothèses sur les dérivées au sens des distributions parfois plus faibles. Le chapitre 7 estime diverses meilleures constantes intervenant dans les théorèmes précédents. Le dernier chapitre démontre l'existence de courbe invariante pour une classe d'applications qui ne sont pas nécessairement C^2 , couvrant ainsi des cas qui avaient été étudiés (numériquement) par Froeschlé en 1968.

Dans [25], Michel Herman montre que pour un difféomorphisme de classe C^2 de nombre de rotation α de type constant et assez proche de R_α en topologie C^2 , la conjugaison topologique donnée par le théorème de Denjoy est absolument continue. Jane Hawkins et Klaus Schmidt [74] avaient montré auparavant qu'un résultat de ce type est faux si le nombre de rotation n'est pas de type constant. On voit apparaître dans ce papier les espaces de Sobolev ainsi que BMO. Ce papier précède [30] et le chapitre 5 de [30] utilise le résultat de [25] et en donne aussi une autre démonstration. Dans ces deux démonstrations le travail [75] d'Yves Meyer est crucial.

Les travaux [26, 27, 28, 31] et [32] sont les travaux publiés de Michel en dynamique holomorphe. Ce travail a culminé en sa collaboration avec Jean-Christophe Yoccoz pour décrire presque entièrement ce qui se passe au bord du disque de Siegel d'un point fixe, malheureusement ce travail n'a pas été entièrement rédigé sous une forme publiable. Il m'est impossible de donner une vue d'ensemble et de placer ces travaux dans le contexte des autres travaux sur la dynamique holomorphe. C'est un sujet qui a connu une grande explosion dans les vingt dernières années et dont je n'ai suivi que les premiers balbutiements au début des années 80, quand j'étais encore à Orsay, vu que toutes les informations passaient par la trinité locale Douady-Herman-Sullivan (avant que Yoccoz ne revienne de son service militaire à l'IMPA). Je renvoie au séminaire Bourbaki d'Adrien Douady sur la question [76], ainsi qu'à l'article de Herman [32] qui est un article de type « survey » à la fois des résultats anciens et récents (en 1986) sur le problème de linéarisation de Siegel et l'étude du bord du disque maximal de linéarisation.

Dans [26], Michel considère les itérations de fractions rationnelles sur la sphère \mathbb{S}^2 . Dennis Sullivan [77] venait de montrer qu'il n'y avait pas de composante connexe errante dans le complémentaire de l'ensemble de Julia ; il résolvait ainsi magistralement un problème qui remontait aux travaux de Fatou. Ceci permet alors d'appliquer la classification obtenue par Fatou sur la dynamique d'une fraction rationnelle f sur une composante C du complémentaire de l'ensemble de Julia $J(f)$. Par le résultat de Sullivan, une telle composante C est prépériodique sous l'action de f et quitte à la remplacer par une de ses images, il existe un entier $q \geq 1$ tel que $f^q(C) = C$. Il résulte des travaux de Fatou que l'on peut distinguer deux cas. Dans le premier cas (la composante connexe C est alors appelé un domaine de Fatou), il existe un point critique $c \in C$ de f^q et on peut trouver un point fixe fixe de f^q dans la fermeture de C , tel que $f^{nq}(y) \rightarrow x$, pour tout $y \in C$. Dans le second cas (la composante C est appelé un domaine singulier), Fatou montre que C est conformétement équivalente soit à \mathbb{D} , le disque unité, soit à un anneau $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < 1\}$, avec $r > 0$, et sur un tel domaine singulier f^q est holomorphiquement conjugué à une rotation. Le fait qu'il existe (beaucoup) de domaines singuliers qui sont des disques est donné par le théorème de Siegel de linéarisation au voisinage d'un point fixe où la dérivée est de la forme $\exp(2i\pi\alpha)$, avec α diophantien (ou même satisfaisant une condition plus générale obtenue par Brjuno), un tel disque est appelé disque de Siegel. Michel montre comment obtenir ici des anneaux singuliers. Il suffit pour cela de trouver des fractions rationnelles f qui laissent invariantes le bord \mathbb{S}^1 de \mathbb{D} (par exemple des quotients de deux produits finis de type Blaschke utilisés dans la théorie classique des fonctions d'une variable complexe) et telles que $f|_{\mathbb{S}^1}$ est un difféomorphisme. On considère alors $f_\alpha = e^{2i\pi\alpha} f$, $\alpha \in \mathbb{T}$. Si on note par $\rho(\alpha)$ le nombre de rotation de $f_\alpha|_{\mathbb{S}^1}$, l'application $\alpha \mapsto \rho(\alpha)$ est surjective et on peut donc trouver un α tel que l'on puisse appliquer la conjecture d'Arnold au difféomorphisme \mathbb{R} -analytique f_α qui est donc analytiquement conjugué à la rotation $z \mapsto e^{2i\pi\alpha} z$. Par le principe de prolongement analytique, cette conjugaison analytique s'étend automatiquement à un voisinage de \mathbb{S}^1 . Les anneaux invariants du type donnés par la classification de Fatou ont été par la suite nommés anneaux de Herman.

Ce travail [26] contient aussi des exemples de fractions rationnelles ayant des orbites denses (comme son titre l'indique). Lattès avait construit de tels exemples en passant au quotient des endomorphismes complexes de \mathbb{T}^2 . Michel Herman montre qu'il y en a beaucoup d'autres.

Dans l'appendice de [26], Michel donne une démonstration du théorème de conjugaison local d'Arnold et Moser pour les nombres de type constant sans utiliser le théorème des fonctions implicites dans les espaces de Fréchet. Il le remplace par le théorème point fixe de Schauder-Tykhonov. Dans [29], Michel Herman montre comment généraliser cette démonstration de l'appendice de [26] du théorème de conjugaison locale des difféomorphismes du cercle de nombre de rotation de type constant au cas du nombre de rotation diophantien. La dérivée schwartzienne y est explicitement utilisée, elle était implicite dans [18].

Dans [27], Michel étudie le bord d'un disque de Siegel ou d'un anneau de Herman invariant par une fraction rationnelle f . Par un argument remarquable [78] (dont Michel aurait bien aimé pouvoir revendiquer la paternité), Étienne Ghys

avait montré que si un bord d'un tel domaine était une courbe de Jordan et f restreinte à ce domaine était conjuguée à $z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z$, avec α diophantien, alors f a un point critique sur la courbe de Jordan. Dans [27], Michel généralise ce résultat au cas où le bord n'est plus une courbe de Jordan, il doit toutefois ajouter que l'hypothèse que f est injective sur le bord. Je me rappelle que lors du premier exposé de ce travail, Michel pensait que l'injectivité sur le bord résultait aisément de celle de f sur l'intérieur (qui est, elle, une conséquence du fait que sur le domaine singulier f est conjuguée à la multiplication par un nombre complexe). Dennis Sullivan a directement soulevé le lièvre pendant l'exposé. C'est la seule et unique fois où j'ai vu Michel coincé par une erreur stupide lors d'un exposé.

Dans [28], Michel Herman montre qu'un difféomorphisme f du cercle \mathbb{T} du type $x + \varphi(x) \pmod{1}$, où φ est un polynôme trigonométrique réel de degré au plus n a au plus $2n$ cycles périodiques, ce qui répond à une question d'Arnold. La démonstration passe par le domaine complexe et la théorie de l'itération de Fatou et Julia.

Dans [31], revenant sur la méthode d'Anosov-Katok [59], Michel construit un difféomorphisme C^∞ de la sphère \mathbb{S}^2 ayant un 0 comme point fixe, qui est holomorphe sur un ouvert invariant U contenant 0, holomorphiquement conjugué sur U à une rotation irrationnelle sur le disque unité et tel que le bord de U soit un pseudo-cercle (c'est un compact pathologique du plan). Les nombres de type constant sont de nouveau présents à la fin de l'article.

Les articles [33, 34, 35, 36, 37] et [38] sont les travaux publiés de Michel Herman sur les tores invariants en dimension supérieure. Le séminaire Bourbaki [79] de Jean-Christophe Yoccoz est une excellente référence sur la question.

La publication [33] est la rédaction d'un exposé fait en janvier 88 au Séminaire sur les EDP de l'École Polytechnique annonçant les résultats contenus dans [34] (article dédié à René Thom pour son 65ème anniversaire). Il s'agit de généraliser les théorèmes de Birkhoff sur les courbes invariantes par les applications de type « twist ». Vers la même époque (fin 88), John Mather obtenait les généralisations de la théorie d'Aubry-Mather [80, 81].

Je me souviens parfaitement bien de la première fois que Michel m'a parlé des résultats de [34]. C'était en janvier 1989, j'étais à l'Université de Floride à Gainesville. Michel passait la majeure partie de l'année académique 88-89 à l'Institut à Princeton et il est venu faire une visite en Floride. Il devait bien sûr faire un exposé et il m'a dit qu'il savait de quoi il allait parler parce qu'il était sûr que ça me plairait beaucoup. Il a donc exposé la première partie de [34].

Avant d'en venir à la partie mathématique, je voudrais rapporter une autre anecdote concernant ce séjour. Cette semaine là nous avions aussi la visite à Gainesville de Howie Weiss que je cherchais à faire recruter par notre université. Howie était un peu effrayé par la présence de Michel, car les premiers contacts qu'il avait eus avec Michel avaient été aussi rudes que Michel pouvaient les rendre. Toutefois lors de ce séjour commun, Michel a tout fait pour exercer son charme sur Howie lui parlant de mathématique et de bien d'autres choses, en particulier, de vin. Ce qui a le plus impressionné Howie Weiss est certainement la visite que nous avons faite tous les trois au « Cheese and Wine Gallery » (le meilleur commerce de vins et fromages du coin) où Michel a montré par ses commentaires qu'il était un grand œnologue et a dégotté en quelques minutes

une bouteille de vin à un prix ridiculement bas, qui s'est révélée excellente plus tard dans la journée lors de la dégustation.

Pour en revenir à l'exposé et au contenu de [34], introduisons sur $\mathbb{A}^n = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ les coordonnées canoniques (θ, r) et la forme $\lambda = \sum_{i=1}^n r_i d\theta_i$. La forme $\omega = -d\lambda$ est la forme symplectique usuelle. On suppose que F est un difféomorphisme de \mathbb{A}^n symplectique exact, c'est-à-dire que la forme $F^*\lambda - \lambda$ est exacte. La condition de monotonie sur F (qui étend naturellement la condition « twist » pour les difféomorphismes de l'anneau) est que pour tout θ l'image de $r \rightarrow F(\theta, r)$ soit transverse aux fibres de la projection $\mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$. Par des exemples bien choisis, Michel montre que cette condition ne suffit pas pour généraliser la théorie de Birkhoff, mais qu'il faut lui ajouter une condition de positivité et de croissance à l'infini (qui en fait correspondent aux conditions de lagrangien défini positif imposées par Mather dans [81]). Il montre de plus que les tores invariants (qui remplacent les courbes de l'anneau pour les « twists ») doivent être lagrangiens. Sous ces hypothèses, il montre que l'on peut contrôler effectivement la constante lipschitzienne d'une fonction $\psi : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue dont le graphe est lagrangien (au sens des distributions) et invariant par F . Dans la seconde partie, il montre que pour les F qui sont des petites perturbations (en topologie C^1) du cas intégrable (par exemple du temps 1 du flot géodésique d'une métrique plate sur le tore), si T est un tore lagrangien homotope à la section nulle, invariant par F et tel que la dynamique de la restriction à T soit récurrente par chaînes, alors T est un graphe. Pour sa démonstration, Michel doit supposer que la classe de Maslov est nulle, ce qui est donné par un théorème de Claude Viterbo [82]. Des généralisations non-perturbatives de cette partie de la théorie de Birkhoff ont été donnée par Mischa Bialy et Leonid Polterovitch, voir par exemple [83].

Sur un plan plus personnel, Michel avait parfaitement raison de programmer cet exposé à Gainesville en janvier 89. Depuis plusieurs années mon programme de recherches tourne autour des thèmes de cet article, des travaux de John Mather [81] ainsi que de leur relation avec les solutions de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi.

Dans [35], Michel Herman considère le difféomorphisme L de \mathbb{A}^n défini par $L(\theta, r) = (\theta + r, r)$. Généralisant une idée de Yoccoz dans le cas $n = 1$, il construit un voisinage ouvert \mathcal{U} de L dans les difféomorphismes de \mathbb{A}^n muni de la topologie C^∞ dans lequel on peut appliquer les résultats de [34]. Pour tout $F \in \mathcal{U}$, il note $Y^\infty(F)$ l'ensemble formé par les tores T de classe C^∞ invariants, lagrangiens, homotopes à $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ et pour lesquels la restriction de F à T est C^∞ conjuguée à une rotation diophantienne. Tous ces tores sont par [34] des graphes lipschitziens (avec borne de la constante lipschitzienne de graphes intersectant un compact fixé), la fermeture $Y(F)$ en topologie C^0 de $Y^\infty(F)$ est donc formée par des graphes qui sont des tores lagrangiens et invariants. Il démontre alors que, quitte à rétrécir \mathcal{U} , il existe $\mathcal{G} \subset \mathcal{U}$ un G_δ dense, tel que pour tout $F \in \mathcal{G}$, il existe un ensemble $G_1 \subset Y(F)$, dense en topologie C^0 , et tel que tout $T \in G_1$ soit de classe C^1 , avec $F|T$ minimal et uniquement ergodique. De plus, si $n \geq 2$, on peut s'arranger pour que $F|T$ soit faiblement mélangeant pour son unique mesure de probabilité. En particulier, la dynamique sur un tel tore n'est même pas boréliennement conjuguée à une translation sur un tore (ou sur un autre groupe compact). C'est un résultat

assez étonnant puisqu'il dit que, dans l'adhérence des tores invariants donnés par le théorème KAM, on trouve des tores avec de la dynamique exotique.

Dans [36], Michel Herman considère un difféomorphisme L de \mathbb{A}^n de la forme $L(\theta, r) = (\theta + D\ell(r), r)$, où $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ . Un tel difféomorphisme est toujours symplectique exact. Il est monotone si $D^2\ell(r)$ est une forme bilinéaire non dégénéré. Si cette forme est partout définie positive (ou partout définie négative), alors, les résultats de [34] s'appliquent pour toutes les perturbations suffisamment petite en topologie C^1 . Par contre s'il existe r_0 tel que $D^2\ell(r_0)$ soit indéfinie (ce qui est parfaitement compatible avec la non-dégénérescence pour $n \geq 2$), il montre qu'il existe une suite F_i de difféomorphismes de \mathbb{A}^n de classe C^∞ , tendant vers L en topologie C^∞ , et une suite de tores lagrangiens T_i de classe C^∞ , homotopes à $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ et tels que T_i soit invariant par F_i , de plus T_i n'est pas un graphe et T_i tend vers $\mathbb{T}^n \times \{r_0\}$ dans la topologie de Hausdorff. C'est une manière très forte de montrer que la théorie de Birkhoff ne peut être généralisée que dans le cadre de [34]. L'article contient aussi des conséquences de ce théorème sur des difféomorphismes symplectiques génériques qui ont un tore invariant sur lequel la dynamique est conjuguée à une rotation diophantienne.

Dans la note [37], Michel donne un exemple explicite d'une structure symplectique sur \mathbb{T}^{2p} et d'un hamiltonien $H_0 : \mathbb{T}^{2p} \rightarrow [-1, 1]$ tel que pour toute petite perturbation $H : \mathbb{T}^{2p} \rightarrow \mathbb{R}$ de H_0 dans une topologie C^k (avec k ad hoc, dans [38] il donne la valeur optimale de ce k), le flot hamiltonien de H n'a pas d'orbite périodique dans $H^{-1}[-1/2, 1/2]$. Ceci montre qu'on ne peut pas obtenir « le closing lemma » dans le cadre hamiltonien de Pugh et Robinson [84] au-delà de la topologie C^2 (sur les hamiltoniens) qu'ils considèrent. Décrivons un peu précisément l'exemple, on se donne $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2p-1}) \in \mathbb{R}^{2p-1}$ satisfaisant une condition diophantienne. On définit la forme symplectique w_α sur \mathbb{R}^{2p} dont la matrice dans la base canonique est A avec :

$$-A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{2p-1} \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \cdots & -\alpha_{2p-1} & 0 \end{pmatrix}$$

On prend comme hamiltonien $H_0(\theta_1, \dots, \theta_{2p}) = \sin \theta_{2p}$. Le flot hamiltonien est donné par le champ de vecteurs $X_H(\theta_1, \dots, \theta_{2p}) = \cos(\theta_{2p}) \sum_{i=1}^{2p-1} \alpha_i \partial / \partial \theta_i$. On voit alors que le niveau $H_0^{-1}(c)$, $c \in]-1, 1[$ est formé par les deux tores $\mathbb{T}^{2p-1} \times \{\beta_i(c)\}$, $i = 1, 2$, avec $\sin(\beta_i(c)) = c$, invariants par le flot et sur lesquels l'action du flot est donnée par le champ de vecteurs $\cos(\beta_i(c))\alpha$. En particulier, pour $c \in]-1, 1[$, le flot est minimal sur chacun de ces deux tores et donc n'a pas d'orbites périodiques dès que $p \geq 2$. Bien sûr, si H est une petite perturbation de H_0 , pour tout $c \in [-1/2, 1/2]$ la surface de niveau $H^{-1}(c)$ est encore formée par deux copies $T_{c,1}$ et $T_{c,2}$ de \mathbb{T}^{2p-1} qui se projettent chacune difféomorphiquement sur \mathbb{T}^{2p-1} (projection donnée par les $2p - 1$ premières coordonnées). Chacun de ces deux tores est invariant par le champ de vecteurs hamiltonien

X_H de H , et la situation est une perturbation de celle pour $H = H_0$. Par le théorème de Liouville sur chacun des deux tores $T_{c,j}$, on peut trouver une forme volume invariante par X_H qui est donc un multiple (par une fonction) de la forme volume usuelle de \mathbb{T}^{2p-1} . On reparamètre X_H sur $T_{c,j}$ pour préserver la forme volume usuelle. Un calcul explicite montre alors que le vecteur de rotation (pour la forme volume usuelle) du flot ainsi paramétré est encore α . Comme la situation est une perturbation de la situation $H = H_0$, un argument un peu délicat (mais presque standard pour Michel) permet d'utiliser le théorème local de conjugaison d'Arnold et Moser pour obtenir qu'un temps de ce flot reparamétré est conjugué, dans le groupe des difféomorphismes préservant la forme volume, à une rotation diophantienne. Par un simple argument de densité, cette conjugaison envoie le champ reparamétré sur un champ constant; par un argument de vecteur de rotation, ce champ constant est α . Il en résulte bien que l'on ne peut pas avoir d'orbite périodique dans la surface de niveau $H^{-1}(c)$. On a en fait obtenu qu'un reparamétrage de X_H restreint à $T_{c,j}$ est conjugué au flot du champ de vecteurs constant α , qui satisfait à une condition diophantienne. Michel va un peu plus loin : un argument dû essentiellement à Kolmogorov permet de se ramener à un reparamétrage constant, et donc la restriction de X_H à $T_{c,j}$ est conjuguée à $C(T_{c,j})\alpha$, avec $C(T_{c,j}) \in \mathbb{R}^*$.

Des méthodes un peu plus raffinées montrent comment donner des contre-exemples à l'hypothèse ergodique. Michel n'a pas publié cette partie, mais on peut consulter [79] pour une description.

Michel a bien sûr souligné que les structures symplectiques dans ces exemples sont « exotiques », toutefois ces résultats sont assez extraordinaires comme l'explique John Mather [48]. Ils ont été annoncés au cours d'un Colloque à l'ENS-Lyon qui était le point culminant d'une année spéciale de Systèmes Dynamiques en France qui eut lieu pendant l'année académique 90-91. Les auditeurs se rappellent que ce colloque avait démarré en grande fanfare par une conférence de Mischa Gromov, qui d'entrée a représenté par deux patatoïdes son opinion sur l'importance relative des systèmes dynamiques et de la géométrie. Michel n'était définitivement pas d'accord avec cette représentation (sur ce genre de choses, il lui manquait une bonne dose d'humour!).

Je me rappelle aussi qu'à l'occasion de ce colloque Michel m'a fait découvrir le Saint-Joseph (un crû de de la vallée du Rhône) au cours d'un dîner chez Gamboni. Nous étions assis tous les deux seuls à une table, j'avais bien apprécié le vin et Michel encouragé par mes commentaires a commandé une seconde bouteille. J'ai rapidement dépassé mon niveau de saturation. Michel ne voulait évidemment pas laisser une bonne bouteille à moitié pleine et insistait pour que j'en reprenne. Heureusement le rire tonitruant d'Helmut Hofer, installé à une autre table avec plusieurs personnes, m'a sauvé ce jour la face (et peut-être la vie) : Michel est allé leur porter la bouteille.

Dans [39], Michel esquisse en une page des exemples de hamiltoniens sur \mathbb{R}^{2p} dont une hypersurface de niveau n'a pas d'orbite périodique. Ce résultat est aussi dû à Victor Guinzburg [73, 74].

Le dernier article [40] est une liste de problèmes ouverts que Michel considérait comme important dans son domaine des systèmes dynamiques (remarquer la dédicace). Il a été publié dans les Comptes rendus du Congrès International de Berlin en 1998, c'est la rédaction de l'exposé qu'il y a fait. J'étais dans la

salle, pleine, quand il a fait cet exposé. À la sortie, il m'a demandé « comment c'était ? », comme il le faisait toujours anxieusement après un exposé. Jürgen Moser qui assistait à la conférence au premier rang est venu lui dire quelques mots d'encouragement. C'est la dernière fois que je les ai vus réunis.

Michel a demandé que ses cendres soient dispersées au-dessus de la baie de Rio. Cela a été fait lors d'un congrès à l'IMPA, du 9 au 12 avril 2001. Une bonne partie des mathématiciens proches de Michel y participaient, ainsi que de plus jeunes représentants de cette école brésilienne de systèmes dynamiques que Michel considérait comme un second chez lui. Le mardi 10 avril en fin de matinée nous sommes conduits dans la forêt de Tijuca au-dessus de l'IMPA pour la cérémonie de dispersion des cendres. Nous arrivons à un belvédère dominant la baie, un escalier descend vers un petit balconnet, où je vais rejoindre Jaco Palis regardant au loin la baie de Rio, la main posée sur l'urne contenant les cendres de Michel. Près de lui, Marguerite Flexor qui a courageusement ramené toute seule cette urne depuis Paris. Aussi présents sur ce balconnet devant moi César Camacho, François Laudenbach, Harold Rosenberg et Jean-Christophe Yoccoz, derrière moi le long des marches et sur le grand balconnet beaucoup de monde : Alain Chenciner, Raphaël Krikorian, Patrice Le Calvez, Raphaël Douady, John Mather, Jack Milnor, Eddy Zehnder, François Ledrappier, Anatole Katok, Jean-Paul Thouvenot, tous les dynamiciens de Rio et d'autres, impossible de tous les citer. Les voitures sous les directives de Marcello Viana, partent chercher d'autres personnes. Nous attendons sous un soleil de plomb, regardant la baie au loin. Je n'oublierai jamais Jaco Palis très ému, la main sur les cendres de celui qu'il aurait dû voir s'installer vers cette époque pour quelques années à l'IMPA. Les derniers participants arrivent. Jaco part, transversalement au balconnet le long d'un rebord. Il disperse les cendres de Michel vers le bas le long de ce rebord. Quand il a fini, il remet l'urne vide à Marguerite, nous remontons, pas un mot n'a été dit. L'après-midi les mathématiciens reprennent leurs droits. De la dernière journée, je voudrais retenir la phrase d'Eddy Zehnder : « I liked Michel for his mathematics, and also for his sharp tongue ». Hakan Elliasson, dans le dernier exposé, nous fait part de la conjecture sur laquelle il travaille, qu'il considère comme presque démontrée puisqu'il l'a déjà mentionnée deux fois dans des exposés devant Michel sans que celui-ci ne la conteste ! Juste avant ce dernier exposé, Marcello Viana nous lit avec une voix pleine d'émotion, un texte admirable de Lennart Carleson sur Michel (il est bien dommage que Carleson ne veuille pas en laisser une trace). La conférence est finie. Le soir plusieurs d'entre nous se retrouvent à dîner autour d'une table. Nous ne parlons que de Michel : le mathématicien (sans concession, aimant s'attaquer aux problèmes difficiles), l'homme (à la fois charmeur et cultivé, pas toujours gentil) et puis le bon vivant, fin gourmet avec qui nous avons partagés tant de bons moments.

Cette nuit là, je me réveille vers trois heures du matin, le chagrin m'envahit, les larmes sortent enfin. En regardant la baie de Rio par la fenêtre, je réalise : Michel est parti.

Au revoir Michel, tu me manques infiniment.

Lyon, le 4 Juin 2001.

Références

- [1] Michael-Robert Herman. Le groupe linéaire des espaces de Hilbert de dimension infinie est égal à son groupe des commutateurs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 273 : A15–A17, 1971.
- [2] Michael-Robert Herman. Simplicité du groupe des difféomorphismes de classe C^∞ , isotopes à l'identité, du tore de dimension n . *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 273 : A232–A234, 1971.
- [3] Michael Herman and Francis Sergeraert. Sur un théorème d'Arnold et Kolmogorov. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 273 : A409–A411, 1971.
- [4] M.R. Herman . Intersection complète, algébrique, affine, non singulière, en géométrie algébrique réelle. Thèse de 3e cycle, Université Paris Sud, Centre d'Orsay, Mars, 1972.
- [5] Michael R. Herman. Sur le groupe des difféomorphismes du tore. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 23 (2) : 75–86, 1973. Colloque International sur l'Analyse et la Topologie Différentielle (Colloques Internationaux CNRS, Strasbourg 1972).
- [6] M. R. Herman. Sur le groupe des difféomorphismes \mathbf{R} -analytiques du tore. In *Differential topology and geometry (Proc. Colloq., Dijon, 1974)*, pages 36–42. Lecture Notes in Math., Vol. 484. Springer, Berlin, 1975.
- [7] M. R. Herman. Sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs \mathbf{R} -analytiques du tore. In *Differential topology and geometry (Proc. Colloq., Dijon, 1974)*, pages 43–49. Lecture Notes in Math., Vol. 484. Springer, Berlin, 1975.
- [8] Michael-Robert Herman. Sur le groupe des difféomorphismes \mathbf{R} -analytiques de \mathbf{R} . *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **78** = *Indag. Math.*, 37 (4) : 351–355, 1975.
- [9] Michel R. Herman. Sur la conjugaison des difféomorphismes du cercle à des rotations. Journées sur la Géométrie de la Dimension Infinie et ses Applications à l'Analyse et à la Topologie (Univ. Claude-Bernard–Lyon I, Lyon, 1975). *Bull. Soc. Math. France, Mém.*, 46 : 181–188, 1976.
- [10] M. R. Herman . Sur les mesures invariantes. In *International Conference on Dynamical Systems in Mathematical Physics (Rennes, 1975)*, pages 103–104. Astérisque, No. 40 Soc. Math. France, Paris, 1976.
- [11] Michael-Robert Herman. Conjugaison C^∞ des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotations satisfait à une condition arithmétique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 282 (10) : Ai, A503–A506, 1976.
- [12] M. R. Herman . Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. Thèse d'État, Université Paris Sud, Centre d'Orsay, avril, 1976.
- [13] Michael-Robert Herman. L^2 regularity of measurable solutions of a finite difference equation of the circle. Technical report, University of Warwick, May, 1976.
- [14] Michael-Robert Herman. Conjugaison C^∞ des difféomorphismes du cercle pour presque tout nombre de rotation. *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A-B*, 283 (8) : Aii, A579–A582, 1976.
- [15] Michael-Robert Herman. Mesure de Lebesgue et nombre de rotation. In *Geometry and topology (Proc. III Latin Amer. School of Math., Inst. Mat. Pura Aplicada CNPq, Rio de Janeiro, 1976)*, pages , 271–293. Lecture Notes in Math., Vol 597 Springer, Berlin, 1977.
- [16] Michael-Robert Herman. The Godbillon-Vey invariant of foliations by planes of T^3 . In *Geometry and topology (Proc. III Latin Amer. School of Math., Inst. Mat. Pura Aplicada CNPq, Rio de Janeiro, 1976)*, pages 294–307. Lecture Notes in Math., Vol. 597 Springer, Berlin, 1977.
- [17] Albert Fathi and Michael R. Herman. Existence de difféomorphismes minimaux. In *Dynamical systems, Vol. I—Warsaw*, pages 37–59. Astérisque, No. 49 Soc. Math. France, Paris, 1977.
- [18] Michael-Robert Herman. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 49 : 5–233, 1979.
- [19] Michael-Robert Herman. Résultats récents sur la conjugaison différentiable. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*, pages 811–820 Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980.

- [20] A. Fathi, M.-R. Herman and J.-C. Yoccoz. A proof of Pesin's stable manifold theorem. In *Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981)*, pages 177–215 Springer, Berlin, 1983.
- [21] M.-R. Herman. Construction d'un difféomorphisme minimal d'entropie topologique non nulle. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 1 (1) : 65–76, 1981.
- [22] M. Herman and J.-C. Yoccoz. Generalizations of some theorems of small divisors to non-Archimedean fields. In *Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981)*, pages 408–447 Springer, Berlin, 1983.
- [23] Michael-R. Herman. Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'Arnol'd et de Moser sur le tore de dimension 2. *Comment. Math. Helv.*, 58 (3) : 453–502, 1983.
- [24] Michael-R. Herman. Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau. Vol. 1. Société Mathématique de France, Paris, i+221, 1983. With an appendix by Albert Fathi, With an English summary.
- [25] M.-R. Herman. Sur les difféomorphismes du cercle de nombre de rotation de type constant. In *Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Vol. I, II (Chicago, Ill., 1981)*, pages 708–725 Wadsworth, Belmont, CA, 1983.
- [26] Michael-R. Herman. Exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphère de Riemann. *Bull. Soc. Math. France*, 112 (1) : 93–142, 1984.
- [27] Michael-R. Herman. Are there critical points on the boundaries of singular domains? *Comm. Math. Phys.*, 99 (4) : 593–612, 1985.
- [28] Michael-R. Herman. Majoration du nombre de cycles périodiques pour certaines familles de difféomorphismes du cercle. *An. Acad. Brasil. Ciênc.*, 57 (3) : 261–263, 1985.
- [29] Michael-R. Herman. Simple proofs of local conjugacy theorems for diffeomorphisms of the circle with almost every rotation number. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 16 (1) : 45–83, 1985.
- [30] Michael-R. Herman. Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau. Vol. 2. *Astérisque*, (144) : 248, 1986. With a correction to : *On the curves invariant under diffeomorphisms of the annulus, Vol. 1* (French) [Astérisque No. 103-104, Soc. Math. France, Paris, 1983 ; MR 85m : 58062].
- [31] Michael-R. Herman. Construction of some curious diffeomorphisms of the Riemann sphere. *J. London Math. Soc. (2)*, 34 (2) : 375–384, 1986.
- [32] Michael-R. Herman. Recent results and some open questions on Siegel's linearization theorem of germs of complex analytic diffeomorphisms of \mathbf{C}^n near a fixed point. In *VIIIth international congress on mathematical physics (Marseille, 1986)*, pages 138–184 World Sci. Publishing, Singapore, 1987.
- [33] Michael-R. Herman. Existence et non existence de tores invariants par des difféomorphismes symplectiques. In *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles 1987–1988*, pages Exp. No. XIV, 24 École polytech., Palaiseau, 1988.
- [34] Michael-R. Herman. Inégalités « a priori » pour des tores lagrangiens invariants par des difféomorphismes symplectiques. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 70 : 47–101 (1990), 1989.
- [35] M.-R. Herman. On the dynamics of Lagrangian tori invariant by symplectic diffeomorphisms. In *Progress in variational methods in Hamiltonian systems and elliptic equations (L'Aquila, 1990)*, pages 92–112 Longman Sci. Tech., Harlow, 1992.
- [36] Michael-R. Herman. Dynamics connected with indefinite normal torsion. In *Twist mappings and their applications*, pages 153–182, Springer, New York, 1992.
- [37] Michael-R. Herman. Exemples de flots hamiltoniens dont aucune perturbation en topologie C^∞ n'a d'orbites périodiques sur un ouvert de surfaces d'énergies. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 312 (13) : 989–994, 1991.
- [38] Michael-R. Herman. Différentiabilité optimale et contre-exemples à la fermeture en topologie C^∞ des orbites récurrentes de flots hamiltoniens. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 313 (1) : 49–51, 1991.
- [39] Michel R. Herman. Examples of compact hypersurfaces in \mathbf{R}^{2p} , $2p \geq 6$, with no periodic orbits. In *Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom (S'Agaró, 1995)*, pages 126 Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

- [40] Michael Herman. Some open problems in dynamical systems. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998)* number Extra Vol. II, pages 797–808 (electronic) 1998.
- [41] Alain Chenciner. Michel Herman, la mécanique céleste et quelques souvenirs. *Gazette des Mathématiciens*, 88 : 84–90, 2001.
- [42] Henri Cartan and Harold Rosenberg. Actualité de A. Denjoy. In *Arnaud Denjoy : évocation de l'homme et de l'oeuvre*, pages 70–78. Astérisque, Vol. 28–29 SMF, Paris, 1975.
- [43] Harold Rosenberg. quelques souvenirs d'avant la thèse de Michael. *Gazette des Mathématiciens*, 88 : 67–68, 2001.
- [44] L. C. Siebenmann. Le fibré tangent. Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, Paris, 1969. Cours donné à la Faculté des Sciences d'Orsay, premier semestre 1966-1967, notes de A. Chenciner, M. Herman et F. Laudenbach.
- [45] D. B. A. Epstein. The simplicity of certain groups of homeomorphisms. *Compositio Math.*, 22 165–173, 1970.
- [46] John N. Mather. On Haefliger's classifying space. I. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77 : 1111–1115, 1971.
- [47] John N. Mather. A curious remark concerning the geometric transfer map. *Comment. Math. Helv.*, 59 (1) : 86–110, 1984.
- [48] John N. Mather. Michael Herman. *Gazette des Mathématiciens*, 88 : 55–58, 2001.
- [49] V. I. Arnol'd. Small denominators. I. Mapping the circle onto itself. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 25 : 21–86, 1961.
- [50] Harold Rosenberg. Les difféomorphismes du cercle (d'après M. R. Herman). In *Séminaire Bourbaki, Vol. 1975/76, 28ème année, Exp. No. 476*, pages 81–98. Lecture Notes in Math., Vol. 567 Springer, Berlin, 1977.
- [51] Jean-Paul Thouvenot. Michel Herman et la théorie ergodique. *Gazette des Mathématiciens*, 88 : 70–71, 2001.
- [52] Dennis Sullivan. Reminiscences of Michel Herman's first great theorem. *Gazette des Mathématiciens*, 88 : 84–90, 2001.
- [53] Raphaël Douady. Herman ou la passion des mathématiques et de la vie. *Gazette des Mathématiciens*, 88 : 75–77, 2001.
- [54] Pierre Deligne. Les difféomorphismes du cercle (d'après M. R. Herman). In *Séminaire Bourbaki, Vol. 1975/76, 28ème année, Exp. No. 477*, pages 99–121. Lecture Notes in Math., Vol. 567 Springer, Berlin, 1977.
- [55] Helmut Rüssmann. Kleine Nenner. I. Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringes. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, 1970 : 67–105, 1970.
- [56] J.-C. Yoccoz. Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 17 (3) : 333–359, 1984.
- [57] José Adem. Algebra lineal, campos vectoriales e immersiones. IMPA, Rio de Janeiro, 1978. III Escola Latino Americana de Mathmática, Rio de Janeiro, julio 1976.
- [58] Guy Wallet. Nullité de l'invariant de Godbillon-Vey d'un tore. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 283 (11) : Aii, A821–A823, 1976.
- [59] D. V. Anosov and A. B. Katok. New examples in smooth ergodic theory. Ergodic diffeomorphisms. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 23 : 3–36, 1970.
- [60] A. B. Katok. Minimal diffeomorphisms on principal S^1 -fiber spaces. In *Teszisy VI Vsesojuznoi Topol. Konf. Tbilisi*, pages 63, 1972.
- [61] I. U. Bronštejn. Extensions of minimal transformation groups. Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, viii+319, 1979. Translated from the Russian.
- [62] Pierre Arnoux. Quelques souvenirs de Michel Herman. *Gazette des Mathématiciens*, 88 : 74–75, 2001.
- [63] Jean-Christophe Yoccoz. Souvenirs de Michel. *Gazette des Mathématiciens.*, 88 : 58–60, 2001.
- [64] Ja. B. Pesin. Families of invariant manifolds that correspond to nonzero characteristic exponents. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 40 (6) : 1332–1379, 1440, 1976.
- [65] Ja. B. Pesin. Characteristic Ljapunov exponents, and smooth ergodic theory. *Uspehi Mat. Nauk*, 32 (4 (196)) : 55–112, 287, 1977.

- [66] David Ruelle. Ergodic theory of differentiable dynamical systems. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (50) : 27–58, 1979.
- [67] M.C. Irwin. On the stable manifold theorem. *Bull. London Math. Soc.*, 2 : 196–198, 1970.
- [68] Michael Shub. Stabilité globale des systèmes dynamiques. With an English preface and summary., Société Mathématique de France, Paris, iv+211, 1978.
- [69] Jean-Benoît Bost. Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens (d’après Kolmogorov, Arnol’d, Moser, Rüssmann, Zehnder, Herman, Pöschel, ...). *Astérisque*, (133-134) : 113–157, 1986. Seminar Bourbaki, Vol. 1984/85.
- [70] R. Johnson and J. Moser. The rotation number for almost periodic potentials. *Comm. Math. Phys.*, 84 (3) : 403–438, 1982.
- [71] John N. Mather. Existence of quasiperiodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus. *Topology*, 21 (4) : 457–467, 1982.
- [72] Serge Aubry. The devil’s staircase transformation in incommensurate lattices. In *The Riemann problem, complete integrability and arithmetic applications (Bures-sur-Yvette/New York, 1979/1980)*, pages 221–245 Springer, Berlin, 1982.
- [73] Helmut Rüssmann. On the existence of invariant curves of twist mappings of an annulus. In *Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981)*, pages 677–718 Springer, Berlin, 1983.
- [74] Jane Hawkins and Klaus Schmidt. On C^2 -diffeomorphisms of the circle which are of type III₁. *Invent. Math.*, 66 (3) : 511–518, 1982.
- [75] Yves Meyer. Sur un problème de Michael Herman. In *Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Vol. I, II (Chicago, Ill., 1981)*, pages 726–731 Wadsworth, Belmont, CA, 1983.
- [76] Adrien Douady . Disques de Siegel et anneaux de Herman. Séminaire Bourbaki, Vol. 1986/87. *Astérisque*, (152-153) : 4, 151–172 (1988), 1987.
- [77] Dennis Sullivan. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains. *Ann. of Math. (2)*, 122 (3) : 401–418, 1985.
- [78] Étienne Ghys. Transformations holomorphes au voisinage d’une courbe de Jordan. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 298 (16) : 385–388, 1984.
- [79] , Jean-Christophe Yoccoz. Travaux de Herman sur les tores invariants. Séminaire Bourbaki, Vol. 1991/92. *Astérisque*, (206) : Exp. No. 754, 4, 311–344, 1992.
- [80] John N. Mather. Minimal action measures for positive-definite Lagrangian systems. In *IXth International Congress on Mathematical Physics (Swansea, 1988)*, pages 466–468 Hilger, Bristol, 1989.
- [81] John N. Mather. Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems. *Math. Z.*, 207 (2) : 169–207, 1991.
- [82] Claude Viterbo. Generating functions, symplectic geometry, and applications. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 537–547 Birkhäuser, Basel, 1995.
- [83] M. Bialy and L. Polterovich. Hamiltonian diffeomorphisms and Lagrangian distributions. *Geom. Funct. Anal.*, 2 (2) : 173–210, 1992.
- [84] Charles C. Pugh and Clark Robinson. The C^1 closing lemma, including Hamiltonians. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 3 (2) : 261–313, 1983.
- [85] Viktor L. Ginzburg. A smooth counterexample to the Hamiltonian Seifert conjecture in \mathbf{R}^6 . *Internat. Math. Res. Notices*, (13) : 641–650, 1997.
- [86] Viktor L. Ginzburg. Hamiltonian dynamical systems without periodic orbits. In *Northern California Symplectic Geometry Seminar*, pages 35–48 Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.