Les Supercordes

I. Antoniadis [1,2], E. Cremmer [2,3] & K.S. Stelle [2,4]
Rédacteur : B. Duplantier [2,5]
Dessins : J. Tolmie [6]

(2ème partie)

La première révolution des supercordes

Théorie des cordes et gravité quantique bidimensionnelle

Si l'importance des théories bidimensionnelles était reconnue dans la formulation des théories de cordes, seul leur aspect classique avait été utilisé. En 1981, Polyakov montra l'importance des aspects quantiques bidimensionnels. Brink, Howe et Di Vecchia, ainsi que Deser et Zumino, avaient introduit une formulation « du premier ordre » qui considère la métrique bidimensionnelle $g_{ab}(\sigma,\tau)$ et les coordonnées de la corde $X_\mu(\sigma,\tau)$ plongée en D dimensions comme des champs indépendants, dont l'action s'écrit

$$S=-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d\sigma d\tau\sum_{a,b=1}^{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{D}\sqrt{g}g^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu\eta_{\mu\nu},$$

où g est le déterminant de la matrice g_{ab}, dont g^{ab} est la matrice inverse.

L'équation de champs de g_{ab} est algébrique et peut être résolue ; la solution reportée dans l'action redonne l'action de Nambu-Goto. Classiquement, cette action du premier ordre est invariante par changement d'échelle de la métrique (transformation de Weyl) $g_{ab}\to e^{\rho(\sigma,\tau)}g_{ab}$. Comme toute métrique bidimensionnelle peut s'écrire (localement) $g_{ab}=e^{\varphi(\sigma,\tau)}\eta_{ab}$, l'action est indépendante du champ de Liouville φ. Polyakov remarqua que la mécanique quantique de la corde peut être considérée comme une théorie de la gravité bidimensionnelle, couplée à D champs de matière qui sont les coordonnées de la corde $X_\mu(\sigma,\tau)$. Il montra que l'invariance d'échelle n'est préservée au niveau quantique que si le nombre de champs de matière est précisément égal à 26 ! (On dit alors que les champs de matière sont ceux d'une théorie conforme avec charge centrale

1 CERN Division Théorique CH-1211, Genève 23, Suisse
En détachement du Centre de Physique Théorique, École Polytechnique, F-91128 Palaiseau
2 Centre Émile Borel, IHP, 11 rue Pierre et Marie Curie, F-75231 Paris, France
3 Laboratoire de Physique Théorique de l'ENS, 24 rue Lhomond, F-75231 Paris, France
4 Department of Physics, Imperial College, Prince Consort Road, London SW7 2BW
5 Service de Physique Théorique de Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex
6 jatolmie@ozemail.com.au

26.) Si la dimension est différente de 26, le champ φ n'est pas découplé au niveau quantique et possède une dynamique décrite par la théorie du champ de Liouville (on parle alors de corde *non critique*).

Cette approche permet aussi de définir des cordes, non plus dans un espace plat à D dimensions, mais dans un fond non trivial en partant d'une action plus générale :

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d\sigma d\tau \Big\{ \sum_{a,b,\mu,\nu} [\sqrt{g} g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X) \\ + \varepsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu H_{\mu\nu}(X)] + \alpha' R_g \Phi(X)\Big\}.$$

R_g est la courbure scalaire de Ricci de la métrique g_{ab}, ε^{ab} le tenseur antisymétrique d'ordre 2, et les champs de fond $G_{\mu\nu}(X)$, $H_{\mu\nu}(X)$ et $\Phi(X)$ sont ceux qui sont associés aux particules de masse nulle du modèle de Shapiro-Virasoro. Fradkin et Tseytlin, Sen, et Callan, Martinec, Perry et Friedan ont montré que la condition d'invariance de Weyl quantique (ou absence d'anomalies) se traduisait, outre la condition $D = 26$, par des équations différentielles en X pour ces trois champs. De plus, celles-ci peuvent se dériver de la minimisation d'une action à 26 dimensions. Or celle-ci n'est autre que celle qui régit la dynamique des particules de masse nulle du modèle de cordes fermées bosoniques, dans la limite de théorie des champs où α' tend vers zéro. Ainsi apparaissait comment une théorie de champs peut être limite d'une théorie de cordes.

Ces résultats s'étendent aux supercordes, mais cette fois en 10 dimensions. Ce point de vue a permis d'aller au-dela de la géométrie classique, en remplaçant l'espace de variétés classiques sur lesquelles une corde peut se propager par l'espace plus grand, « quantique », des théories bidimensionnelles (super)conformes. Il a conduit à la construction de « compactifications non-géométriques », et à la découverte de la symétrie miroir. On reviendra plus loin sur certains de ces développements.

Cela conduisit également peu après à un développement très important de la théorie conforme des champs , par Belavin, Knizhnik, Polyakov et Zamolodchikov, ainsi qu'à des progrès parallèles et essentiels en mécanique statistique, dans l'étude des phénomènes critiques bidimensionnels.

Vers SO(32) ***et*** $E_8 \times E_8$

La troncation de Gliozzi, Scherk et Olive dans le modèle de Neveu-Schwarz-Ramond, et l'apparition de la supersymétrie dans l'espace-temps, ont préparé la scène pour l'apparition d'un nouveau formalisme des supercordes. Jusque-là, les processus bosoniques et fermioniques demandaient des calculs de style très différents. Les calculs d'amplitudes d'émission des fermions étaient particulièrement pénibles.

Avec l'apparition de la supersymétrie, Green et Schwarz ont commencé en 1981 à mettre sur pied un nouveau formalisme qui rendait la supersymétrie dans l'espace-temps manifeste. Les vertex pour toutes les amplitudes des modes sans masse du multiplet de super Yang-Mills ont ainsi été déterminés par les transformations de supersymétrie. Au début, les calculs d'amplitudes ont été faits en utilisant la jauge de cône de lumière, qui simplifiait sensiblement les vertex, mais n'était pas manifestement covariante de Lorentz. Cependant, cette procédure cachait des points importants du formalisme et, en particulier, rendait difficile l'étude des anomalies (violations de symétries classiques au niveau quantique).

Dans un développement parallèle à celui de la supergravité (où cela se réfère à la théorie de Kaluza-Klein), Green et Schwarz, rejoints aussi par Brink, ont étudié la réduction dimensionnelle des supercordes aux dimensions D inférieures à 10. Ceci rendait particulièrement visibles les défauts d'une pure théorie des champs. Par réduction des supercordes aux dimensions $D < 10$ sur un tore de rayon R, des calculs ont montré des exemples d'apparition de singularités dans les amplitudes, dans la limite $R \to 0$. De même, la limite $\alpha' \to 0$ produisait aussi des singularités. Pour avoir une théorie finie, il fallait conserver des valeurs différentes de zéro pour α' et R, et seule la théorie des supercordes dans sa dimension critique $D = 10$ avait des chances d'être sauvée des divergences qui ruinaient toutes les théories de champs incluant la gravitation. Ces conclusions étaient en accord avec l'étude des divergences en supergravité. Commençant avec les travaux de Deser, Kay et Stelle en 1977, une longue recherche par divers auteurs a mené à la conclusion que toutes les théories de supergravité en dimensions $D \geq 3$ sont vulnérables aux divergences, à différents niveaux de nombres de boucles dans les diagrammes de Feynman, bien que les calculs explicites de ces divergences soient trop difficiles en supergravité pour avoir été faits jusqu'à présent.

L'étude formelle des singularités dans les différentes théories de supercordes a suivi une évolution liée à celle d'une autre question : celle des anomalies. Les théories de jauge dans lesquelles les fermions de chiralité gauche et droite entrent de façon *asymétrique* peuvent subir une violation de la symétrie de jauge au niveau quantique. En général, ceci est inacceptable, car cela implique le sacrifice, soit de l'unitarité de la matrice S, soit d'autres principes fondamentaux, tels que l'invariance de Lorentz. La question des anomalies en théories de jauge à 4 dimensions avait déjà été explorée par Adler, Bell et Jackiw à la fin des années 60, et cette analyse fut étendue ensuite à d'autres dimensions paires par Grimm et Marculescu. En ce qui concerne les supercordes et les supergravités associées, c'est l'article d'Alvarez-Gaumé et de Witten en 1983 qui a montré l'étendue du problème. En dimensions $D = 2 + 4n$ sont possibles des anomalies gravitationnelles, car dans ces dimensions les particules et les anti-particules ont la même chiralité, et il est donc possible d'avoir des théories « chirales », c'est-à-dire contenant des nombres inégaux de particules à chiralité gauche et droite. Ceci est important, car le modèle standard est justement une théorie chirale. Alvarez-Gaumé et Witten ont déduit une formule générale pour les anomalies de jauge, gravitationnelles et mixtes, en dimension arbitraire. Ils ont appliqué cette analyse à l'étude des supergravités en diverses dimensions, et spécifiquement à la supergravité IIB en $D = 10$. Cette théorie correspond à la limite $\alpha' \to 0$ de la supercorde IIB ; les champs chiraux en sont un gravitino complexe à chiralité droite, et une courbure 5-forme autoduale. Chacun de ces champs contribue à l'action effective par diverses combinaisons des trois anomalies reliées aux trois formes fermées de degré 12 : $\mathrm{tr}R^6$, $\mathrm{tr}R^4 \times \mathrm{tr}R^2$, $(\mathrm{tr}R)^3$ dans un espace à 12 dimensions $(12 = 10 + 2)$. Mais quand toutes ces contributions sont additionnées, une annulation « miraculeuse » se produit : la théorie IIB, quoique vivant dangereusement, est en fait complètement dépourvue d'anomalies.

Ces recherches ont naturellement mené à une étude détaillée des anomalies dans les différentes théories de supercordes. En 1984, Green et Schwarz ont découvert que la corde de « type I » contenant un secteur de cordes ouvertes avec un groupe de jauge SO(32) et aussi un secteur de cordes fermées, est elle aussi complètement dépourvue d'anomalies, bien qu'elle vive aussi dangereusement que la théorie IIB. Cette annulation d'anomalies a lieu d'une façon non-triviale entre classes de diagrammes Feynman topologiquement différents, c'est-à-dire entre diagrammes à surfaces planaires ou surfaces non-orientables. Une autre façon de comprendre l'annulation des anomalies est reliée à la disparition des divergences dans la théorie. À cause de l'invariance modulaire (un groupe global contenu dans l'invariance de reparamétrisation), les divergences « ultraviolettes » (à courte distance) deviennent essentiellement des effets « infrarouges » (à grande distance), et sont alors éliminées par la supersymétrie.

L'annulation des anomalies peut se voir également dans la limite $\alpha' \to 0$, c'est-à-dire dans la théorie de champs effective pour ce modèle. Cette théorie effective comprend la supergravité de type I couplée à une théorie de super Yang-Mills avec groupe de jauge SO(32). Considérée comme théorie de supergravité classique, contenant des opérateurs de champs dont la dimension d'échelle peut aller jusqu'à 2, cette théorie a des anomalies, à la fois de type gravitationnel et de jauge, pour n'importe quel choix de groupe. Cependant, la théorie effective contient aussi des opérateurs de dimensions supérieures 4, 6, 8, qui ne sont pas présents dans la théorie classique. C'est l'effet de ces corrections qui réussit, de façon encore très non-triviale, à annuler les anomalies, et ceci seulement pour deux groupes : SO(32) et $E_8 \times E_8$. L'apparition du groupe $E_8 \times E_8$ comme possibilité a été notée par Thierry-Mieg et par Dixon, Harvey et Witten, de même que par Green et Schwarz [7].

Ces développements ont fait grand bruit dans la communauté : pour la première fois, on entrevoyait la possibilité d'un mécanisme concret pour déterminer la théorie de la gravitation quantique à partir des principes fondamentaux. Cela conduisit à des résultats spectaculaires (appelés « première révolution des supercordes ») sous l'influence de Witten, à la fois du côté physique et mathématique.

La nouvelle possibilité suggérée par l'étude de la théorie effective, avec groupe de jauge $E_8 \times E_8$, était bien attrayante, quoique troublante, car les théories de cordes ouvertes peuvent avoir des groupes de jauge sélectionnés seulement parmi les séries unitaires, orthogonales, et symplectiques. Pour les cordes ouvertes, ces groupes doivent être introduits en attachant des nombres quantiques de la représentation fondamentale aux bouts de la corde, comme l'ont prouvé Marcus et Sagnotti. Cependant, il y avait d'autres indications que $E_8 \times E_8$ pouvait quand même exister, surtout le fait qu'il y ait seulement deux réseaux autoduaux à 16 dimensions, qui correspondent aux réseaux des poids des groupes $E_8 \times E_8$ et $\mathrm{Spin}(32)/\mathbb{Z}_2$. De plus, le rang 16 de SO(32) et de $E_8 \times E_8$

[7] Deux autres possibilités semblaient exister pour les théories effectives, $[\mathrm{U}(1)]^{496}$ et $E_8 \times [\mathrm{U}(1)]^{248}$, mais il a ensuite été reconnu que celles-ci souffrent d'anomalies mixtes gravitationnelles et de jauge.

coïncide avec la différence de dimensions critiques entre les supercordes (10) et la corde bosonique (26).

La corde hétérotique

Ces indices ont finalement suffi à Gross, Harvey, Martinec et Rohm pour suggérer en 1985 un nouveau type de corde fermée, nommée « hétérotique », effectivement moitié supercorde, moitié corde bosonique (mais sans le tachyon qui gêne dans la corde bosonique pure). Utilisant les techniques mathématiques développées par Goddard et Olive, Frenkel et Kac, ils ont montré l'existence de deux nouvelles théories basées sur les cordes fermées orientables, associées aux deux réseaux autoduaux possibles à 16 dimensions. Ce développement a donc fourni deux nouvelles théories de cordes fermées, l'une à groupe $E_8 \times E_8$, et l'autre à groupe SO(32). En fait, ceci est équivalent à compactifier la corde bosonique de 26 dimensions à 10 dimensions sur le tore associé à ces deux réseaux (au lieu de la compactification triviale sur un 16-tore). Ces nouvelles théories de cordes fermées ne possèdent pas de bouts de corde auxquels on pourrait attacher des nombres quantiques, mais contiennent quand même des charges correspondant aux groupes en question, distribuées le long des cordes, d'une façon qui donne naissance très naturellement aux algèbres de Kac-Moody. Ceci avait déjà été découvert par Bardacki et Halpern dans les années 70, mais était passé complètement inaperçu. Au total, on arrivait donc à cinq théories de cordes cohérentes en dimension 10 : IIA, IIB, I (contenant aussi des cordes ouvertes), hétérotique SO(32) et hétérotique $E_8 \times E_8$. Avec celles-ci, on pouvait commencer l'« exploration du monde », car le groupe $E_8 \times E_8$ contient le groupe $\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ du modèle standard, et le secteur fermionique contient des états qui pourraient représenter les particules élémentaires.

Pour commencer l'exploration du monde physique avec ces bases, les physiciens ont dû se plonger dans un nouveau chapitre mathématique. La théorie hétérotique $E_8 \times E_8$ avait des possibilités phénoménologiques alléchantes, parmi lesquelles la chiralité du spectre en dimension $D = 10$. Cependant, conserver cette chiralité dans une réduction jusqu'à $D = 4$ n'était pas évident : l'espace de réduction devait lui-même avoir des propriétés chirales, similaires à celles de la célébré variété K3 qui est autoduale. Pour trouver des espaces analogues compacts de dimension 6, appropriés à une réduction $D = 10 \to D = 4$, une recherche a dû être effectuée dans le domaine des variétés de Calabi-Yau. Ces analogues de K3 en dimension complexe 3 sont Ricci-plats, kähleriens, avec une holonomie SU(3) et sont de première classe de Chern nulle. L'étude de ces espaces demandait des outils du domaine de la géométrie algébrique peu connue alors des physiciens. Cependant, Candelas, Horowitz, Strominger et Witten ont réussi à exploiter une classe d'espaces de Calabi-Yau pour effectuer une réduction vers une théorie chirale en $D = 4$, conservant une supersymétrie $D = 4$, $\mathcal{N} = 1$, mais en brisant l'un des facteurs E_8 jusqu'à un sous-groupe E_6, l'un des groupes de grande unification d'un certain intérêt phénoménologique. L'autre E_8 restait intact, dans un secteur « caché » (visible seulement par des interactions aussi faibles que la gravité), que l'on pouvait quand-même imaginer avoir un rôle dans la brisure éventuelle complète de la supersymétrie par des mécanismes non-perturbatifs. Les « quarks » et « leptons », qui apparaissent dans la limite de la théorie des champs dans ce modèle, se transforment dans des représentations standards de E_6 à dimension 27, avec un nombre de familles égal à $\frac{1}{2}|\chi(K)|$, où $\chi(K)$ est la caractéristique eulérienne de la variété de Calabi-Yau K. Pour arriver à ce modèle, il fallait aussi faire la réduction avec une courbure de Yang-Mills non-triviale prenant sa valeur dans un sous-groupe SU(3) de E_8, identifié dans la réduction au groupe d'holonomie SU(3) de la variété de Calabi-Yau.

Ce premier modèle montrait que la phénoménologie des supercordes n'était pas totalement étrangère aux modèles reconnus en physique des particules, événement fondamental dans l'acceptation des supercordes comme une voie très prometteuse entre gravité quantique et physique des particules. Fut alors développé un programme étendu de recherche de modèles plus réalistes (par exemple, avec seulement trois familles de quarks et de leptons), par une grande communauté de physiciens, parmi lesquels beaucoup de jeunes, adeptes de la nouvelle mathématique de la géométrie algébrique. Jusqu'à la fin 1994, la recherche sera dirigée presque exclusivement vers les deux théories hétérotiques, tandis que les trois autres seront abandonnées parce qu'elles étaient considérées soit sans intérêt physique (type II), soit très difficiles (type I).

Cependant, on a vite réalisé que le nombre restreint de seulement cinq théories cohérentes à 10 dimensions paraissait moins impressionnant quand on considérait le nombre énorme de possibilités de réduction vers quatre dimensions. En outre, l'étude de ces possibilités a révélé que des réductions qui auraient paru trop singulières au niveau de la théorie des champs devenaient inexceptionnelles dans la théorie des cordes. Spécifiquement, il a été reconnu, d'abord par Dixon, Harvey, Vafa et Witten, que les *orbifolds* représentaient des fonds sur lesquels les cordes pouvaient se propager de façon cohérente. Un orbifold peut se réaliser comme le quotient d'un espace pourvu d'une symétrie discrète, par son groupe de symétrie. Si la symétrie en question possède des éléments invariants sous son action, ces éléments deviennent des singularités de l'orbifold. Étant donné les conditions aux bords appropriées pour les cordes en présence de ces singularités, une propagation cohérente reste quand même possible. Les cordes ne « ressentent » donc pas les singularités de la même façon que les théories ponctuelles. La force de cette approche est que la théorie des cordes permet d'expliquer les degrés de liberté près d'une singularité classique, où la théorie des champs n'explique rien. L'extension du concept mathématique de variété que représentent les orbifolds a mené à un point de vue encore plus abstrait. Pour les cordes, l'important était que les conditions de cohérence sur la surface d'univers, que représente l'évolution de la corde, soient respectées (en particulier, l'annulation des anomalies conformes). Pour une réduction de dix dimensions vers quatre, ce qui compte est que le secteur de la théorie bidimensionnelle représentant les dimensions « cachées » soit une *théorie conforme quantique.*

Une première étude des théories hétérotiques à quatre dimensions avec supersymétrie maximale $\mathcal{N} = 4$ a été effectuée par Narain en 1986. Elles sont caractérisées par 6×22 paramètres continus, qui paramétrisent les transformations de Lorentz propres du réseau autodual de compactification, ayant 6 dimensions chirales du côté supercorde et 22 dimensions antichirales du côté bosonique. Ces paramètres correspondent par ailleurs aux valeurs constantes des composantes internes de la métrique ($6\times 7/2$ paramètres), du tenseur antisymétrique de rang 2 ($6\times 5/2$ paramètres), et des champs de jauge suivant les 16 directions de Cartan du groupe de jauge (6×16 paramètres). Cependant, la classification des théories conformes quantiques ne demande pas particulièrement une interprétation en termes de variables évoluant dans l'espace-temps. Ce qui importe est plutôt une sommation correcte des dimensions conformes des opérateurs « primaires » de la théorie conforme. Ainsi, dans les travaux de Kawai, Lewellen et Tye, d'Antoniadis, Bachas et Kounnas et de Lerche, Lust et Schellekens, certains modèles pourraient être réalistes au niveau phénoménologique, avec supersymétrie $\mathcal{N}=1$, fermions chiraux, et un groupe de jauge contenant le modèle standard. Ces modèles étaient construits en utilisant des compactifications asymétriques dans les secteurs chiraux et antichiraux de la corde, ce qui ne correspondait évidemment pas à une compactification géométrique normale.

Ces méthodes de construction ont ouvert la voie à une phénoménologie des cordes basée sur la théorie hétérotique. Plusieurs travaux ont été effectués sur la dérivation et l'étude détaillée de modèles concrets dérivés de la supercorde hétérotique. En particulier, le SU(5) « renversé » d'Antoniadis, Ellis, Hagelin et Nanopoulos, construit en 1987 en utilisant la méthode des fermions libres d'Antoniadis, Bachas et Kounnas, est un exemple explicite « réaliste », avec un spectre et des propriétés très proches de celles du modèle standard.

Une autre direction importante de recherche était l'analyse détaillée de l'action effective des supercordes à quatre dimensions, le calcul des corrections radiatives et l'étude de ses symétries, notamment l'invariance modulaire, agissant dans l'espace des champs des modules associés aux paramètres de compactification. En particulier, dans les travaux de Dixon, Kaplunovsky et Louis, de Derendinger, Ferrara, Kounnas et Zwirner, et d'Antoniadis, Gava, Narain et Taylor, plusieurs couplages de la théorie effective ont été calculés au niveau d'une boucle de cordes, et leur dépendance par rapport aux champs de modules a été étudiée.

Ainsi on commençait à voir comment la théorie des cordes pouvait faire contact avec la théorie standard des particules. Mais le problème qui se posait alors était un embarras de richesses : des milliers (!) de théories cohérentes à quatre dimensions en résultaient, beaucoup d'entre elles sans interprétation particulière d'espace-temps. Cette situation de plus en plus abstraite s'éloignait davantage de l'idée originale de seulement cinq théories cohérentes en 10 dimensions.

Dualité T et symétries miroir

Mais, enfin, un peu d'ordre a commençé à émerger de ce maelström. On a découvert que certaines théories apparemment différentes (par exemple IIA/IIB) étaient reliées entre elles par des transformations appelées de façon générique « dualités ». Nous avons déjà vu que la notion de dualité T avait fait son apparition dès les premières années de la théorie des cordes. Cette dualité est une symétrie de la corde fermée qui échange les cordes enroulées autour des dimensions compactes d'un tore dans l'espace-temps avec des cordes fermées non-enroulées, mais à moment cinétique quantifié en unités proportionnelles à l'inverse du rayon de la dimension compacte du tore. L'action de cette symétrie sur les cordes peut se dérouler à l'intérieur d'une théorie particulière, échangeant « états enroulés » contre « états cinétiques » entre deux compactifications sur des cercles de rayons inverses. Cette symétrie, que nous avons vue rapidement au niveau du spectre, est également vraie au niveau de l'interaction. En fait, pour une corde compactifiée dans la direction m

$$X_m(\sigma,\tau) = X_m^{\mathrm{L}}(\sigma+\tau) + X_m^{\mathrm{R}}(\sigma-\tau) \ ,$$

la transformée par dualité T est

$$X_m^{\mathrm{T}}(\sigma,\tau) = X_m^{\mathrm{L}}(\sigma+\tau) - X_m^{\mathrm{R}}(\sigma-\tau) \ .$$

Ceci commençait à mettre un peu d'ordre dans le catalogue des compactifications, car celles-ci apparaissent par paires reliées par la dualité T. Indice plus important pour la suite de l'histoire, il a été reconnu que la dualité T reliait aussi des compactifications entre *différentes* théories : les théories de supercordes IIA et IIB s'échangent sous l'action de la dualité T. Dans la suite, cette observation sera à l'origine d'une unification surprenante de toutes les théories de supercordes.

L'unification des théories IIA et IIB, et le schéma général des paires de compactifications sous la dualité T étaient bien attirants, mais aussi très limités, car ils ne s'appliquaient qu'aux compactifications sur les tores. Une classe de compactifications non triviales et importantes du point de vue de la phénoménologie concernait les variétés de Calabi-Yau, qui ne sont guère des tores. (Cependant ces variétés possèdent parfois des limites singulières qui peuvent être décrites par des orbifolds formés par des tores divisés par les groupes de symétries discrètes correspondants). Or, les variétés de Calabi-Yau sont classifiées par des indices topologiques dits de Betti, déterminant le nombre de formes harmoniques de divers rangs. En particulier, les espaces de Calabi-Yau sont complexes et kähleriens, ce qui veut dire qu'il existe une forme de degré 2 (tenseur antisymétrique à deux indices) provenant de la « structure complexe » (tenseur représentant la racine carée de (-1) sur la variété) par contraction d'un indice avec la métrique. Les déformations de la structure complexe sont associées au groupe d'homologie $H^{(1,1)}$, de dimension $h^{(1,1)}$, qui classifie les formes avec un indice holomorphique (comme la variable complexe z) et un indice anti-holomorphique (comme le conjugué $\bar{z}$). D'autres groupes d'homologie entrent aussi dans la classification de ces espaces. Par exemple, les déformations de la connection ω_μ^{ab}, nécessaire pour construire les dérivées covariantes, sont classifiées par le groupe $H^{(2,1)}$, à dimension $h^{(2,1)}$, correspondant aux formes avec deux indices holomorphiques et un indice anti-holomorphique.

Prises une à une, les variétés de Calabi-Yau n'ont pas de schéma particulièrement visible dans la répartition des valeurs de $h^{(1,1)}$ et $h^{(2,1)}$. Mais quand on regarde l'ensemble de toutes les variétés de Calabi-Yau, une belle symétrie apparaît. Presque toutes les variétés Calabi-Yau possèdent une variété « miroir », ou les valeurs de $h^{(1,1)}$ et $h^{(2,1)}$ sont échangés. Presque toutes, mais pas nécessairement toutes, à première vue. Les variétés de Calabi-Yau sont construites à la manière de la géométrie algébrique comme des surfaces plongées dans un espace de dimension supérieure, déterminées par une équation polynomiale. De là, pour une variété spécifique on peut déterminer $h^{(1,1)}$ et $h^{(2,1)}$, mais il n'y a pas de construction inverse : on ne peut pas simplement construire une variété Calabi-Yau avec des valeurs de $h^{(1,1)}$ et $h^{(2,1)}$ données. Et toutes les variétés n'avaient pas de variété jumelle connue. Mais la quasi-symétrie du schéma de beaucoup des paires de Calabi-Yau, avec des valeurs $h^{(1,1)}$ et $h^{(2,1)}$ échangées, a suggéré l'hypothèse de l'existence d'une « symétrie miroir » générale reliant chaque variété de Calabi-Yau à une variété de Calabi-Yau « miroir ». On a dû attendre la fin des années 90 pour en avoir la preuve. En effet, comme l'a montré en particulier Gepner, la question peut s'exprimer dans la théorie des cordes dans le langage des symétries superconformes, qui est un langage beaucoup plus puissant. Un simple automorphisme $\mathbb{Z}_2$ de l'algèbre superconforme $\mathcal{N} = 2$, effectuant un changement de signe d'une variable sur la surface d'univers, décrit presque trivialement la symétrie miroir. Mais ceci devient beaucoup plus compliqué dans l'espace-temps.

Cette symétrie miroir dans le domaine abstrait de la géométrie algèbrique fut l'exact analogue de la dualité T, qui commençait à mettre de l'ordre dans les milliers de théories de cordes réduites à quatre dimensions.

Les p-branes en supergravité

Cependant, un autre développement est survenu, que certains considéreront comme un peu rétrograde. Bien que la théorie des supercordes donnât pour la première fois une base solide à la théorie quantique de la gravitation, et fît contact avec les théories de la supergravité à 10 dimensions, elle n'entrait pas en contact avec la théorie clé de la supergravité en 11 dimensions. Bien que cette théorie, découverte en 1978 par Cremmer, Julia et Scherk, fut la plus élégante des supergravités, elle restait figée au niveau classique. Au niveau quantique, elle se confrontait à toutes les difficultés des divergences ultraviolettes non renormalisables de n'importe quelle théorie de champs contenant la gravité. Mais dans le contexte des objets étendus et des solitons supersymétriques, elle jouait un rôle aussi important que les théories reliées aux cordes à 10 dimensions.

Les supergravités à 10 et à 11 dimensions ont un secteur bosonique contenant la gravité et d'autres champs de jauge. Parmi ceux-ci, dans les supergravités associées aux cordes, on trouve un champ de jauge abélien analogue au champ vectoriel de Maxwell dans l'électrodynamique, mais de rang deux et antisymétrique (donc une 2-forme). Pour le couplage à la corde, ce champ est fondamental, car c'est par lui que le couplage à la surface d'univers se fait, en analogie au couplage du champ de Maxwell à la ligne d'univers d'une particule via son courant : la surface d'univers de la corde est bidimensionnelle, et ceci demande donc une 2-forme pour faire un couplage minimal de type « électrique » à la corde. Et en effet, ce champ 2-forme représente justement un secteur important du spectre des supercordes à 10 dimensions. Green et Schwarz ont ainsi montré comment les supercordes doivent se coupler à un fond de supergravité non-trivial, généralisant l'action pour la corde introduite originalement dans l'espace-temps plat : la possibilité de cette généralisation était un autre atout important de leur formalisme manifestement supersymétrique dans l'espace-temps.

Si le couplage à la corde demandait un champ 2-forme, on pouvait se demander quel sorte d'objet étendu pourrait se coupler à la théorie « oubliée » par les cordes – la supergravité à 11 dimensions. Cette théorie comporte un secteur bosonique très simple : seulement la gravité et un tenseur antisymétrique de rang 3. L'analogie avec la situation à 10 dimensions était claire : la supergravité à 11 dimensions voulait non pas une supercorde, mais une *supermembrane* couplée de façon « électrique » au champ 3-forme. La construction de l'action de la supermembrane à 11 dimensions a été faite par Bergshoeff, Sezgin et Townsend en 1987, suivant un modèle plus simple de Hughes, Liu et Polchinski et les constructions de Green et Schwarz pour le couplage de la supercorde à la supergravité. Un point clé dans cette construction était la présence d'une symétrie locale fermionique sur le volume d'univers, appelée « symétrie κ ». La présence de cette symétrie locale réduit le nombre de degrés de liberté des fermions d'un facteur deux, rendant donc ce nombre égal au nombre de degrés de liberté bosoniques, égalité caractéristique d'un système supersymétrique. L'existence de cette symétrie κ dépend d'une identité satisfaite par les matrices de Dirac à 11 dimensions, et aussi en plusieurs dimensions inférieures d'espace-temps et dimensions du volume d'univers pour divers types de « p-branes », de natures magnétiques aussi bien qu'électriques. Ces branes apparaissent comme « solitons » dans les théories en dimension D comprenant la gravitation et des champs de jauge associés à des formes de degré $p+1$: p-branes « électriques » ou $(D-p-4)$-branes « magnétiques ».

Mais qu'étaient donc ces autres possibilités d'objets étendus ? La théorie des cordes ne semblait pas les connaître.

C'était le fameux instanton de la théorie Yang-Mills (solution des équations de champs avec action finie dans un espace euclidien à 4 dimensions) qui a indiqué la réponse. Car cette solution d'un champ de jauge pur pouvait se loger dans la supergravité hétérotique en 10 dimensions (composée de la supergravité $D=10$, $\mathcal{N}=1$ couplée à une théorie de Yang-Mills), comme l'a montré Strominger en 90, créant donc une solution où l'instanton euclidien de 4 dimensions devient la partie « transverse » d'une solution de la supergravité hétérotique. Les six autres dimensions forment donc une hypersurface plate mais à métrique minkowskienne, plongée dans les dix dimensions de l'espace-temps. Cette solution se prêtait à une interprétation comme volume d'univers d'une 5-brane statique. Et le caractère statique de cette solution s'accordait aussi avec une autre propriété : la solution conservait une certaine fraction de la supersymétrie. Étant une symétrie locale, où le gravitino se transforme comme un champ de jauge, c'est à dire de façon inhomogène, la supersymétrie est nécessairement quasi-totalement brisée dans n'importe quel fond décrit par des champs purement bosoniques. Mais un petit soupçon de cette symétrie locale peut être préservé ; l'exemple de base est l'espace plat lui-même, qui est invariant par 32 transformations indépendantes de supersymétrie à paramètres constants dans une théorie de supergravité maximale. En effet, c'est l'espace plat qui sert de référence pour le degré maximal de la supersymétrie qui peut être préservé dans une solution purement bosonique.

Après la 5-brane hétérotique, d'autres solutions admettant des interprétations comme volumes d'univers d'objets étendus ont été trouvées. Dabholkar, Harvey, Gibbons et Ruiz-Ruiz ont trouvé une solution de la supergravité IIA à 10 dimensions qui pouvait s'interpréter comme surface d'univers de la corde IIA elle-même. Donc, « la boucle était bouclée » : la théorie IIA des cordes possédait une limite vers une théorie des champs, la supergravité IIA, qui elle-même avait une solution qui pourrait être vue comme la surface d'univers de la corde IIA. Les théories de supergravité et les théories quantiques des cordes se liaient logiquement : une théorie approximative montrait dans ses solutions l'évidence de sa théorie mère. Duff et Stelle ont ensuite trouvé en 1990 une solution de la supergravité à 11 dimensions qui peut être interprétée comme volume d'univers de la supermembrane : le lien logique des objets étendus et des supergravités se manifestait aussi dans cette « mère » de toutes les supergravités. Puis Güven a trouvé une autre solution « magnétique » de la supergravité à 11 dimensions, avec comme interprétation celle d'un volume d'univers pour une 5-brane à 11 dimensions. Toutes ces solutions solitoniques s'appellent solutions « BPS » d'après l'inégalité de Bogomolny-Prasad-Sommerfield qu'elles saturent, condition équivalente à celle requise pour la préservation d'une partie de la supersymétrie par une solution purement bosonique.

Donc, une espèce de « chimie » de ces solutions étendues commençait à émerger. La 5-brane à 11 dimensions complétait une série d'objets étendus, permis par une identité requise pour l'invariance κ de l'action sur le volume d'univers six-dimensionnel pour ces objets. Mais ce sont les relations de symétrie entre ces objets étendus qui ont embrasé ce sujet. Hull et Townsend ont suggéré en 1995 que le spectre des p-branes formait une représentation d'un sous-groupe discret de la symétrie non-linéaire de la supergravité correspondante, symétries trouvées par Cremmer et Julia à la fin des années 70, par exemple le E_7 trouvé à $D = 4$. Ce sous-groupe discret de transformations respectait les règles de quantification de Dirac en présence simultanée d'objets électriques et magnétiques. Et ce groupe contenait à son tour des symétries connues de la théorie des cordes, comme la T-dualité. En effet, des transformations de T-dualité d'une solution de p-brane peuvent la transformer en solutions admettant des interprétations comme branes de types $p + 1$ et $p - 1$. À ce point, on pouvait se demander si la théorie des cordes était uniquement une théorie de cordes, ou bien plutôt une théorie de tous les types de branes possibles. Mais pour cela il fallait trouver une interprétation microscopique de tous ces objets étendus, qui existât aussi hors de la limite de la théorie effective des champs.

Deuxième révolution et dualités des cordes

Au cours des six dernières années, un progrès remarquable se produisit alors en théorie des champs et des cordes, appelé parfois « deuxième révolution ». Ce progrès est basé sur la découverte des symétries de dualité qui ont permis pour la première fois d'obtenir des résultats exacts sur la dynamique des théories de jauge et de gravitation, au-delà de deux dimensions. Ces symétries identifient deux théories qui ont des constantes de couplage inverses l'une de l'autre, en échangeant des champs élémentaires avec des objets non perturbatifs, comme des solitons et des monopôles. Ainsi, la région de couplage fort d'une théorie peut être étudiée par le développement perturbatif de sa théorie duale dans le domaine du couplage faible.

Dualité électromagnétique

La conjecture sur l'existence d'une symétrie de dualité, dite « électromagnétique », a été faite initialement par Montonen et Olive en 1977 pour des théories de Yang-Mills, où la symétrie de jauge est spontanément brisée par un champ scalaire sans potentiel, dans la représentation adjointe du groupe de jauge (limite de BPS pour Bogomolny-Prasad-Sommerfield). Un an plus tard, Olive et Witten ont réalisé que cette symétrie peut être exacte au niveau quantique en présence d'une supersymétrie étendue avec $\mathcal{N} = 4$. Cette dernière garantie que la formule des masses ne reçoit pas de corrections quantiques et fournit une théorie des champs finie à quatre dimensions.

Les transformations de dualité « électromagnétique » forment le groupe discret $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, ce qui implique que les charges électriques et magnétiques permises forment un réseau bidimensionnel entier qui satisfait à la condition de quantification de Dirac et de Zwanziger-Schwinger :

$$q_1 g_2 - q_2 g_1 = 2\pi n\hbar\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$$

valable pour toute paire des points du réseau (q_1, g_1) et (q_2, g_2), où les q_i sont les charges électriques et les g_i les charges magnétiques. Les états correspondants, qui portent à la fois des charges électriques et magnétiques, s'appellent dyons ou plus généralement états BPS. Une question difficile, qui était restée sans réponse à l'époque, fut de montrer que les états de dyons, qui portent à la fois des charges électrique et magnétique non nulles, ne détruisent pas la conjecture de dualité. La démonstration fut faite en 1994 par Sen, qui utilisa la métrique qui décrit le mouvement de deux monopôles magnétiques, construite par Atiyah et Hitchin en 1985.

Quelques mois plus tard, Seiberg et Witten ont réussi à utiliser une version brisée de la dualité pour déterminer le spectre exact d'une théorie de Yang-Mills avec supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, ainsi que son action effective à basse énergie. Comme cette théorie est très proche de la chromodynamique quantique qui décrit les interactions fortes, les résultats obtenus donnent des nouveaux outils pour résoudre de vieux problèmes importants, comme le confinement des quarks dans les hadrons. Par ailleurs, Witten utilisa la nouvelle « équation de monopôle » pour obtenir des résultats spectaculaires dans le domaine des mathématiques pures, notamment sur la classification des variétés de dimension quatre basée sur la théorie de Donaldson.

Dualités des supercordes

En théories des cordes, la conjecture dite de dualité S (voir plus loin sa définition), qui généralise la dualité électromagnétique pour certaines compactifications de la supercorde hétérotique à quatre dimensions, a été évoquée pour la première fois en 1990 par Font, Ibáñez, Lüst et Quevedo, et réexaminée en détail par Schwarz et Sen en 1993. Mais la situation est restée calme jusqu'à l'apparition de l'article de Seiberg et Witten en 1994, qui a provoqué quelques mois plus tard une explosion de résultats sur les dualités des supercordes.

Une implication spectaculaire des dualités est que *toutes les théories cohérentes, et apparemment distinctes, de supercordes définies en dix dimensions sont en fait identiques après prise en compte des effets non perturbatifs.*

Dans un premier temps après 1994, plusieurs exemples de paires duales ont été découverts en comparant le spectre des états BPS, ou l'action effective aux basses énergies, obtenus par la compactification de deux théories correspondantes sur des variétés appropriées qui préservent le même nombre de supersymétries. Les transformations qui identifient les théories duales sont en général de trois types, appelés dualités S, T et U. En bref, S inverse la constante de couplage g, T inverse le rayon de compactification R, et U échange les deux

$$\mathrm{S} : \ g \longleftrightarrow 1/g \ ; \qquad \mathrm{T} : \ R \longleftrightarrow 1/R \ ; \qquad \mathrm{U} : \ g \longleftrightarrow 1/R \, .$$

Il était déjà connu que les deux théories hétérotiques, d'une part, ainsi que les deux théories de type II, de l'autre, sont reliées par la dualité T après une compactification, par exemple sur un cercle. Ceci réduit à trois le nombre de théories distinctes.

Dualité hétérotique – type IIA

Le premier résultat nouveau non trivial a été obtenu par Hull et Townsend fin 1994, qui ont proposé que la supercorde hétérotique $E_8 \times E_8$ après une compactification toroïdale sur T^4 à six dimensions, est S-duale de la supercorde de type IIA compactifiée sur une variété K3. Cette dernière brise la moitié des supersymétries et permet ainsi la comparaison directe avec la théorie hétérotique, qui possède la moitié des supersymétries déjà en dimension dix. Une propriété centrale de l'équivalence est l'apparition des symétries de jauge non abéliennes en des points particuliers de l'espace des paramètres qui caractérisent les variétés de compactification de deux théories, appelé espace des modules. Au voisinage de ces points, la masse de certains états chargés s'annule. Ces états appartiennent au spectre perturbatif de la théorie hétérotique, mais ils sont non perturbatifs du côté de la théorie de type IIA.

L'existence des états de masse nulle se manifeste en général par des singularités dans l'expression des couplages de l'action effective comme fonctions des modules. Ceci a conduit Strominger au début de 1995 à interpréter certaines singularités obtenues par la compactification de la supercorde de type II à quatre dimensions sur une variété de Calabi-Yau, comme trous noirs chargés et de masse nulle. Cette réalisation a permis d'étendre au niveau non-perturbatif la notion de symétrie miroir que nous avons discutée plus haut. Deux variétés de compactification de Calabi-Yau seraient « duales » quand le spectre de *tous* les états, cordes fondamentales et p-branes incluses, sont isomorphes.

La dualité hétérotique – type II a été étendue par Kachru et Vafa en 1995 pour des compactifications à quatre dimensions qui préservent une supersymétrie $\mathcal{N} = 2$. Ainsi la supercorde hétérotique $E_8 \times E_8$ compactifiée sur $\mathrm{K3} \times T^2$ est-elle U-duale de la théorie de type II compactifiée sur une variété de Calabi-Yau, qui est une fibration de K3. Comme la théorie effective à basse énergie de ces compactifications est une théorie de Yang-Mills avec supersymétrie $\mathcal{N} = 2$, cette équivalence permet de réobtenir miraculeusement les résultats de Seiberg et Witten par la dualité des supercordes. Dans ce cadre, le calcul de l'action effective quantique se réduit à un calcul classique de géométrie algébrique dans la théorie duale de type II (voir figure 12).

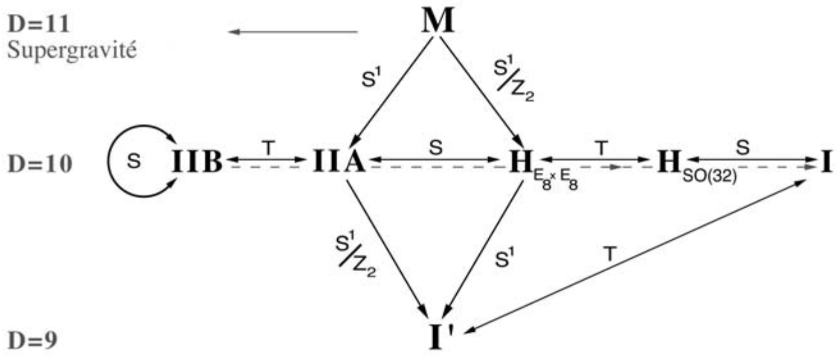

FIG. 12. Relations de dualité ($\leftrightarrow$), de compactification ($\rightarrow$), et de projection ($\cdots$) entre les théories de supercordes et la théorie M.

Autres dualités

La dernière connection entre supercordes fut étudiée par Polchinski et Witten fin 1995, qui ont mis en évidence que la théorie de type I à dix dimensions est S-duale de la supercorde hétérotique SO(32). D'autre part, à $D = 10$, il y a une autre dualité fondamentale qui implique que la théorie de type IIB est auto-duale par rapport à un groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ de S-dualité.

Avec ces dévelopements, les idées de dualité allaient mener à une unification de la théorie des cordes, amenant à une vision plus globale de celle-ci qui prendra plus tard le nom de théorie M.

D-branes

Une découverte (invention) importante fut celle des D-branes (ou p-branes de Dirichlet) par Polchinski fin 1995, qui ont changé radicalement notre conception des théories des cordes, obligeant à aussi considérer les autres types d'objets étendus qui apparaissent comme solitons de la supergravité ou des supercordes. Ce sont les p-branes considérées précédemment. La propriété fondamentale des D-branes est qu'elles interagissent par l'échange des cordes ouvertes, ce qui rend leur étude possible en utilisant des méthodes conventionnelles de la théorie des cordes initiées par Sagnotti en 1988 et Hořava en 1989. Plus précisément, une Dp-brane est définie par des extrémités de cordes ouvertes qui sont libres de se propager suivant les p directions de l'espace balayé par la p-brane, tandis qu'elles sont fixes dans les $9-p$ directions de l'espace transverse. Pour une corde qui satisfait aux conditions aux limites de Dirichlet (pour une corde sur un tore de rayons R_i, $i = p+1, \ldots, 9$) on a $X_i(0, \tau) = d_i^1$ et $X_i(\pi, \tau) = d_i^2 + 2m_i\pi R_i$. La solution de l'équation des ondes s'écrit alors

$$X_i(\sigma, \tau) = d_i^1 + (d_i^2 - d_i^1)\frac{\sigma}{\pi} + 2m_i R_i \sigma + (2\alpha')^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (a_i^n e^{-in\tau} + a_i^{*n} e^{in\tau}) \sin(n\sigma) .$$

Il est facile de voir que ceci est la transformée par dualité T d'une corde à extrémité libre. Il est aussi facile de voir que la corde à extrémités fixes n'a pas de quantification de l'impulsion (celle-ci est évidemment nulle) mais possède des nombres d'enroulement m_i (voir figure 13).

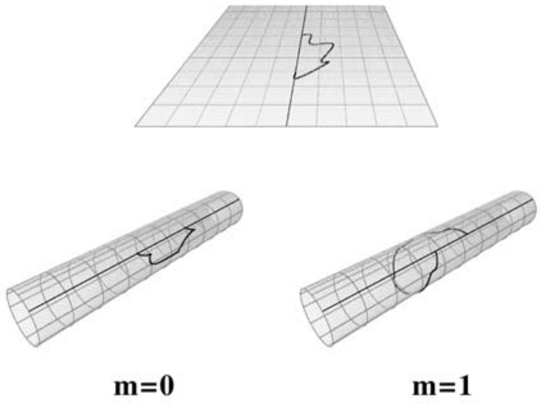

FIG. 13. Corde s'accrochant sur une D-brane (ici une ligne à une dimension) dans un espace infini (ici à 2 dimensions) et dans un espace compact (ici un tore) ; m est le nombre d'enroulements.

La tension des D-branes étant proportionnelle à l'inverse de la constante de couplage de la corde, les Dp-branes s'enroulant sur des p-cycles non triviaux de la variété de compactification génèrent des états ponctuels non perturbatifs. En effet, la masse de ces états solitoniques est donnée par le nombre d'enroulements multiplié par la tension des D-branes et par l'aire de la surface des p-cycles. Par conséquent, elle s'annule quand les cycles correspondants se réduisent à une taille nulle. Par exemple, les bosons de jauge non abéliens qui apparaissent en compactification de la supercorde de type IIA sur K3, ainsi que les trous noirs de masse nulle au voisinage de singularités de Calabi-Yau, peuvent être identifiés avec des D2-branes enroulées autour de 2-cycles.

Théorie M

La troisième étape de cette évolution rapide fut la découverte de l'existence d'une théorie fondamentale sous-jacente, qui est la source de toutes les connections entre les différentes théories des supercordes. En effet, l'existence d'une théorie M, appelée ainsi pour indiquer une théorie « Mère », « Mystérieuse », ou des « Membranes », selon les goûts, a été découverte par Witten au début de 1995 [8]. Son observation initiale était que la limite de couplage fort de la théorie de type IIA génère une dimension supplémentaire sur un cercle de rayon donné par la constante de couplage de la corde. Plus précisément, les D0-branes de

[8] Le nom de théorie M a été introduit par Witten dans un cours donné à l'Institut for Advanced Study de Princeton. J. Schwarz fut le premier à l'utiliser sous forme imprimée. Witten n'avait pas cependant en tête la signification de « mère », quoique Vafa l'eût, lorsqu'il choisit plus tard la lettre « F » (« father ») pour une autre théorie avec deux temps.

la théorie de type IIA, qui sont des particules ponctuelles, sont identifiées avec les modes de Kaluza-Klein associés à une onzième dimension. On trouve ainsi que la fameuse supergravité à onze dimensions de Cremmer, Julia et Scherk réapparaît comme un état fondamental de la théorie M, de même que les cinq théories des supercordes décrivent des régions perturbatives différentes autour d'autres états fondamentaux.

La supergravité à onze dimensions est constituée de la métrique, du gravitino et d'une 3-forme. La théorie M contient, outre la supergravité, une 2-brane et une 5-brane qui sont les sources de type électrique (2-brane) et magnétique (5-brane) de la 3-forme. Il est remarquable que malgré notre ignorance de la formulation exacte de la théorie M, une série des résultats non triviaux aient été obtenus, qui établissent sa connexion précise avec toutes les théories des supercordes, y compris leurs structures non perturbatives (p-branes).

Les symétries de dualité découlent ainsi de l'invariance par difféomorphismes de cette théorie sous-jacente. Plus précisément, Hořava et Witten ont montré, fin 1995, que la théorie M compactifiée sur un intervalle de la onzième dimension donne lieu à la théorie hétérotique $E_8 \times E_8$, dans la région de couplage fort. Les deux E_8 apparaissent séparés sur deux 9-branes localisées sur les deux bouts de l'intervalle de la onzième dimension, le long de laquelle il n'y a que les champs de supergravité qui se propagent. On peut alors expliquer la dualité hétérotique – type II observée en dimensions plus basses, comme celle de deux supercordes correspondant à deux compactifications différentes de la même théorie M. Ainsi, en compactifiant par exemple deux dimensions de la théorie M, on peut obtenir les cinq théories des supercordes, IIA ou IIB, hétérotique $E_8 \times E_8$ ou SO(32), et type I, dans des limites appropriées des paramètres de compactification (voir figure 12).

Applications

Tous ces résultats théoriques sur les symétries de dualité et la nature non perturbative des théories de cordes ont changé radicalement notre conception de la physique théorique et ont déjà conduit à des applications concrètes révolutionnaires.

Entropie des trous noirs

La première concerne la physique des trous noirs. Au début de 1996, Strominger et Vafa ont calculé l'entropie des trous noirs chargés, dans la limite extrême qui correspond à une masse minimale, par un comptage de leurs états microscopiques décrits par des D-branes. Ils ont ainsi obtenu la loi empirique de Bekenstein (1973) et Hawking (1975), qui identifie l'entropie avec le quart de l'aire de l'horizon du trou noir. Ce résultat fondamental a renforcé la conviction de la cohérence des théories de supercordes en tant que théories microscopiques de la gravité quantique. Cette cohérence était pour la première fois démontrée, non pas au niveau des interactions perturbatives dans l'espace de Minkowski plat, mais dans la description de la physique à proximité d'un grand trou noir. Un des grands principes qui s'en dégage, dit « holographique », évoqué initialement par 't Hooft pendant les années 1980-90, gouverne la physique des trous noirs et toute théorie de gravitation. Selon ce principe, l'information des trous noirs est contenue sur la surface de l'horizon et non pas en son intérieur. Ceci implique qu'aux très courtes distances il y a beaucoup moins de degrés de liberté par unité de volume, ce qui invalide l'extensivité naïve de l'entropie par rapport au volume du système.

Limite planaire des théories de jauge

La deuxième application concerne la relation intime entre théories des cordes et théories de jauge, un rêve qui restait vague mais revenait de temps en temps depuis les années 1960. Cette intuition provient surtout de la limite à grand N d'une théorie de Yang-Mills SU(N), décrite par les diagrammes planaires de 't Hooft qui engendrent un développement topologique similaire aux surfaces de Riemann des théories de cordes.

La découverte clé a été faite par Maldacena, fin 1997, qui a conjecturé que les théories de Yang-Mills SU(N) superconformes à $D = 4$ sont équivalentes à la théorie des supercordes de type IIB, définie sur une variété qui est un produit de l'espace anti - de Sitter en dimension cinq (AdS_5) par un espace compact interne (S^5 dans le cas de super Yang-Mills avec une supersymétrie étendue $\mathcal{N} = 4$). AdS est l'espace à courbure négative qui possède un groupe d'isométries maximal. Suivant cette correspondance, la théorie de Yang-Mills vit sur le bord de l'AdS_5 qui est un espace plat de dimension quatre. D'autre part, la nouvelle dualité identifie la limite planaire de Yang-Mills avec la limite de couplage nul de la corde, et en particulier la région de couplage fort de la limite planaire de Yang-Mills avec une théorie de supergravité. Ce résultat spectaculaire laisse entrevoir la possibilité que le spectre des hadrons puisse être dérivé par un calcul de physique classique dans une théorie de gravitation astucieusement choisie !

Dimensions de grande taille et physique des particules

La troisième application concerne la réalisation des théories des cordes en physique des particules. Pendant une longue période, les théories de cordes étaient attachées à la gravitation ordinaire qui devient importante à l'échelle de Planck, $M_{\mathrm{Planck}} \simeq 10^{19}$ GeV, ou à des distances de l'ordre de $l_{\mathrm{Planck}} \simeq 10^{-33}$ cm. Cette image est naturelle dans la théorie hétérotique qui fixe l'échelle de la corde très proche de M_{Planck}, à environ 10^{18} GeV, c'est-à-dire 16 ordres de grandeur plus haut que les énergies caractéristiques des autres interactions accessibles aux accélérateurs des particules. Au contraire, dans les autres théories de cordes, ou plus généralement dans le cadre de la théorie M, l'échelle de la corde n'est pas fixée par M_{Planck}, mais correspond à un paramètre arbitraire, comme l'a remarqué Witten en 1996.

Une proposition radicale, motivée au départ par la possibilité d'une solution alternative au problème de la « hiérarchie de jauge » (fusion des échelles de brisure de symétrie par les corrections quantiques, alors que dans la Nature ces échelles sont très différentes), fut faite par Arkani-Hamed, Dimopoulos et Dvali, et appliquée aux théories de cordes par Antoniadis, Arkani-Hamed, Dimopoulos et Dvali. L'idée est de baisser l'échelle fondamentale de la gravité quantique jusqu'à sa limite phénoménologique du TeV (la possibilité de baisser l'échelle de la corde jusqu'au TeV avait été évoquée auparavant par Lykken). La faiblesse apparente des interactions gravitationnelles est alors due, dans ce scénario, à l'existence de dimensions supplémentaires compactes mais de taille « extrêmement grande », variant entre le millimètre et le fermi (10^{-15} m). Ces grandes dimensions compactes seraient compatibles avec les observations actuelles si les particules du modèle standard et leurs interactions étaient confinées sur une collection de D-branes transverses aux espaces de dimensions compactes. Ces grandes dimensions pourraient alors se manifester seulement par des forces gravitationnelles et impliquer des modifications importantes de celles-ci à l'échelle submillimétrique, qui pourraient être explorées expérimentalement.

Ce scénario aurait des conséquences spectaculaires pour les futurs collisionneurs de particules, comme : (a) la production des gravitons dans les grandes dimensions transverses qui rendraient la gravitation environ 10^{16} fois plus forte que sa puissance traditionnelle ; (b) l'identification de notre univers avec une collection de p-branes avec $p \geq 3$, en théorie des cordes définie à 10 dimensions, laisse la possibilité d'avoir $p - 3$ dimensions compactes « parallèles » aux p-branes, en plus des $9 - p$ dimensions compactes « transverses ». Contrairement à ces dernières qui interagissent seulement par des forces gravitationnelles, les dimensions « parallèles » sont traversées par la lumière et les autres interactions de jauge, ce qui implique que leur taille ne peut pas être plus grande qu'environ 10^{-15} mm. L'existence de ces dimensions a été proposée dans des modèles explicites de cordes par Antoniadis en 1990. Cette idée avait déjà été discutée dans des articles de 1987-88 sur la brisure de la supersymétrie par Antoniadis, Bachas, Llewellen et Tomaras, ainsi que par Ferrara, Kounnas, Porrati et Zwirner. Toutes ces propositions semblaient incohérentes pourtant, à cause de problèmes de couplage fort qui mettaient en doute le traitement semi-classique utilisé. En fait, l'idée des « grandes » dimensions supplémentaires, transverses comme parallèles, ne sera mise sur une base plus ferme qu'avec l'apparition de modèles basés sur des branes, où le problème du couplage fort n'apparaît plus. Les dimensions parallèles se manifesteraient par la production des excitations de « Kaluza-Klein » du photon et des médiateurs des autres interactions à l'énergie du TeV.

Il faut noter, cependant, que le problème de la « détermination dynamique », par les interactions elles-mêmes des différentes échelles d'énergie de brisure de symétrie, n'a pas encore trouvé de solution dans le cadre des théories de supercordes. Il est intimement lié au problème de la constante cosmologique et de la stabilité du vide quantique – problèmes centraux de la physique théorique et auxquels une théorie fondamentale devrait apporter une réponse.

Conclusion

Les théories de supercordes, à cause de l'absence de divergences ultraviolettes, et de l'existence dans leurs spectres d'une particule de spin 2 et masse nulle (graviton), sont actuellement les seuls candidats pour une théorie quantique de la gravitation. Nous avons vu qu'en fait toutes les théories de supercordes existent seulement à 10dimensions (avant compactification), et peuvent être reliées entre elles par diverses transformations appelées dualités. L'existence de solitons dans ces théories suggère de plus l'existence d'une théorie à 11 dimensions appelée théorie M. Celle-ci aurait pour limite de basse énergie (ou secteur de masse nulle) la supergravité à 11 dimensions. Elle est reliée aux théories de supercordes par diverses limites et compactifications. On manque à l'heure actuelle d'une définition précise de cette théorie, qui pourrait être une théorie quantique de supermembranes à 11 dimensions.

Les chemins qui ramènent alors à notre monde à 4 dimensions sont assez difficiles et non dépourvus d'ambiguïté. Dans l'approche la plus conservatrice basée sur la compactification de la corde hétérotique sur de petits espaces compacts, les particules du modèle standard ou des théories grand-unifiées (quarks, leptons et bosons de jauge) sont les particules de masse nulle à 4 dimensions. Outre ces particules, ces théories décrivent aussi une infinité de particules massives correspondant à la fois aux niveaux d'excitation des cordes et de Kaluza-Klein. Parmi toutes les compactifications possibles, il en existent qui conduisent à des modèles réalistes à 4 dimensions, avec en particulier trois familles de quarks et de leptons, ce nombre étant alors lié à la compactification.

Nous entrevoyons aujourd'hui d'autres interprétations possibles de notre monde, telles que celle d'une 3-brane sur laquelle « s'accrochent » des cordes ouvertes (idée appellée « brane-world »). Ceci conduit aussi à des modifications des forces gravitationnelles à courte distance. Dans ces interprétations, l'existence de dimensions supplémentaires pourrait être testée dans des expériences sur accélérateurs.

La théorie M pourrait aussi conduire à revoir notre conception de l'espace-temps dans le cadre par exemple des géométries non-commutatives (les coordonnées de l'espace-temps ne commutent alors plus entre elles). La théorie M promet encore beaucoup de travail pour le siècle naissant, aussi bien pour les physiciens que pour les mathématiciens.

Remerciements

Nous remercions vivement Costas Bachas, Chris Hull et John Schwarz pour leurs commentaires éclairant cet article.

Cet article a été soutenu en partie par les programmes TMR ERBFMRX-CT96-0090 et RTN HPRN-CT-2000-0013, HPRN-CT-2000-00122 et HPRN-CT-2000-00148 de la Commission Européenne, et par le Semestre de recherche « Supergravité, Supercordes et Théorie M » (18 sept. 2000 - 9 fév. 2001) du Centre Émile Borel de l'Institut Henri Poincaré (UMS 839-CNRS/UPMC).

Pour en savoir plus

— Ouvrages de base

- M.B. Green, J.H. Schwarz et E. Witten
  Superstring Theory, Vols 1 & 2 (Cambridge University Press, 1987)
- A.M. Polyakov
  Gauge Fields and Strings (Harwood-Academic, Chur, 1987)
- J. Polchinski
  String Theory, Vols 1 & 2 (Cambridge University Press, 1998)
- S. Weinberg
  The Quantum Theory of Fields, Vol. 3 : Supersymmetry
  (Cambridge University Press, 2000)

— Ouvrages de « Reprints »

- *Superstrings - The first 15 years of superstring theory, Vols 1 & 2*
  compilés par J.H. Schwarz (World Scientific, 1986)
- *Supersymmetry, Vols 1 & 2*
  compilés par S. Ferrara (North Holland/World Scientific, 1987)
- *Supergravity in Diverse Dimensions, Vols 1 & 2*
  compilés par Abdus Salam et E. Sezgin
  (North Holland/World Scientific, 1989)
- *Superstring construction*
  compilés par B. Schellekens (North Holland, 1989)

— Ouvrages de « vulgarisation »

- B. Greene
  The Elegant Universe : Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory (W.W. Norton & Company, 1999)
  L'Univers Élegant (Éditions Robert Laffont, Paris, 2000).