

LIVRES

Thèmes de Géométrie. Groupes en situation géométrique

MICHEL ALESSANDRI

Collection Capes-Agreg, Dunod, 1999. 264 p. ISBN 2-10-004556-3. 175 F

Le public

Ce livre publié dans une collection destinée aux agrégatifs ne s'adresse pas seulement à eux. En effet, il est organisé autour de la présentation de jolis résultats, plus ou moins classiques, accessibles avec un solide niveau licence. Il va au-delà, à la fois par les thèmes exposés (avec par exemple une introduction à la théorie géométrique des groupes de type fini) et par les références, qui sont elles souvent bien au-dessus du niveau de l'Agrégation.

Le contenu

Le premier chapitre expose le langage des actions de groupes, avec un long développement sur les actions continues des groupes topologiques et sur les représentations linéaires. Il contient aussi une foule de petits exemples : une membrane de tambour discrète, les classes de similitudes de matrices, l'espace des configurations au jeu du solitaire, *etc.*

Le deuxième chapitre est entièrement consacré au produit semi-direct. C'est peu de dire qu'il est complet. Outre toutes les propriétés classiques, l'auteur détaille les exemples naturels que sont les groupes linéaires, affines et orthogonaux ; et dans le cas des groupes finis, les groupes diédraux et les groupes symétriques de petit cardinal. Le lien avec la géométrie des solides platoniciens est aussi traité.

Le troisième et dernier chapitre est sans doute le plus important. Il est divisé en quatre « thèmes » :

Thème 1. Le groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$. — En plus de la présentation de l'action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré et du calcul de son domaine fondamental favori (et donc de la classification des réseaux du plan), l'ouvrage présente à travers trois exemples la théorie de la « croissance » dans les groupes de type fini. C'est l'occasion d'introduire le lemme du « ping-pong » de Klein, et donc des exemples de sous-groupes libres de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$, ainsi que la « métrique des mots ». Ces notions, qui sont actuellement très étudiées, sont ainsi mises à la disposition des étudiants dès le second cycle.

Thème 2. Les sous-groupes de torsion des groupes linéaires. — Les résultats sont classiques, mais ne trouvent pas souvent place dans les programmes de licence-maîtrise. Il s'agit de présenter les théorèmes de Jordan, Schur et Burnside sur les sous-groupes de torsion de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$. Les démonstrations reposent entre autres sur les polynômes cyclotomiques et l'indicatrice d'Euler.

Thème 3. Géométrie vectorielle euclidienne. — Ce thème est le plus classique dans le cadre de la préparation au concours. Il s'agit de l'étude (encore une fois très complète) des groupes orthogonaux et unitaires. On y trouve par exemple la maximalité de $\mathrm{SO}(n)$ parmi les sous-groupes stricts de $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$.

Thème 4. Introduction à la géométrie hyperbolique en dimension deux. — L'accent est mis sur la métrique des différents modèles du plan hyperbolique et leur groupe

d'isométries. Mais le birapport, le lien avec la structure complexe, le bord à l'infini ou l'aire des triangles ne sont pas oubliés.

La présentation

L'auteur a choisi pour les thèmes de présenter les résultats sous forme d'exercices corrigés. Les résultats qu'il expose sont magnifiquement adaptés pour l'oral, et capables de s'intégrer dans de nombreux plans. Les corrigés eux-mêmes sont l'occasion de multiples développements. Un petit regret : j'aurais personnellement apprécié une démonstration du lemme de Selberg (cité en complément), dont une référence accessible manque, et qui a justement les qualités citées ci-dessus.

Alors que le jury cherche chaque année à renforcer la place de la géométrie dans les leçons des candidats, l'ouvrage de M. Alessandri remplit le rôle utile de rebâtir pour eux les ponts originels entre d'une part l'analyse, l'arithmétique ou l'algèbre linéaire et d'autre part la géométrie. Par ailleurs, ce livre est une bonne illustration, près de 130 ans après, de la pertinence du fameux « programme d'Erlangen » de Felix Klein.

— Serge Dupont, Université Paris 7

Al-Khayyam mathématicien

ROSHDI RASHED et BIJAN VAHABZADEH

Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1999. 440 p. ISBN

2-85367-210-7. 180 F

C'est en 1851, à Paris, que furent publiées une première traduction, en français, ainsi que l'*editio princeps* de l'*Algèbre* d'al-Khayyam (1048-1131), toutes deux dues à l'éminent historien allemand des mathématiques arabes Franz Woepcke¹. Les lecteurs européens pouvaient ainsi enfin commencer à prendre la mesure des contributions mathématiques de ce savant de langue arabe, dont l'apport à cette discipline était un temps tombé dans l'oubli. Il leur était loisible en l'occurrence de découvrir la première approche systématique de la résolution des équations cubiques, qu'al-Khayyam put mettre en œuvre grâce à un recours réglé à l'intersection de coniques. La recherche sur l'œuvre du savant s'est poursuivie tout au long du 20^e siècle, tandis que deux des trois autres textes mathématiques qui lui étaient attribués resurgissaient du néant. Tout d'abord, ce furent les *Commentaires sur les difficultés de certains postulats de l'ouvrage d'Euclide* qui reparurent. Il devint alors progressivement clair qu'en intervenant dans la tradition arabe d'examen critique du célèbre cinquième postulat d'Euclide, al-Khayyam avait effectué un pas marquant dans l'histoire de la théorie des parallèles. De plus, toujours en poursuivant la réflexion de ses prédécesseurs de langue arabe sur la définition du rapport chez Euclide, al-Khayyam se révélait avoir pris un tournant décisif en introduisant une nouvelle conception du nombre qui lui permettait d'attacher à tout rapport un nombre. Enfin dans les années soixantes, le *Traité sur la division d'un quart de cercle* était retrouvé à Téhéran et montrait l'algébriste déjà au travail sur les équations cubiques avant la rédaction de son grand traité.

Ce sont ces trois textes dont le livre de R. Rashed et de B. Vahabzadeh donnent une édition critique et une traduction française, accompagnées d'introductions et de commentaires mathématiques. S'inscrivant dans le projet de mettre à la disposition des chercheurs le plus grand nombre possible d'éditions et de traductions de textes

¹ Cet ouvrage a été réédité récemment avec l'ensemble des contributions de cet historien dans le volume 1 (pp. 49-256 + 5 planches) de : Franz Woepcke, *Études sur les mathématiques arabo-islamiques*, 2 volumes, Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften an der Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main, 1986. L'éditeur, Fuat Sezgin, rappelle en préface (pp. ix-xi) quelques éléments de la biographie de F. Woepcke, trop tôt disparu.

médiévaux arabes, projet auquel le nom de Roshdi Rashed est attaché, l'ouvrage offre un point de vue d'ensemble sur *al-Khayyam mathématicien*, dans l'attente que soit retrouvé son dernier écrit mathématique, consacré selon le témoignage de l'auteur lui-même à démontrer « numériquement » des algorithmes d'extraction de racines carrées et cubique et à décrire des méthodes pour l'extraction de racines d'ordre supérieur.

L'ouvrage se présente en deux parties. Comme l'explique la préface de R. Rashed, la première partie, consacrée à l'*Algèbre* et au *Traité sur la division d'un quart de cercle*, partie qu'il a plus spécifiquement prise en charge, fait fond sur un ouvrage paru voici près de vingt ans : R. Rashed et Ahmed Djebbar, *L'œuvre algébrique d'al-Khayyam*². L'édition critique du texte de l'*Algèbre* publiée dans le présent ouvrage constitue un remaniement de l'édition de 1982, permis par la découverte depuis lors d'un nouveau manuscrit, mais il demeure difficile pour moi d'évaluer l'impact de cet autre témoin sur notre appréhension du texte. La traduction est retouchée, ainsi, par exemple, un passage jugé obscur en 1982 est réinterprété (p. 13 de l'ouvrage de 1982, p. 120 et 385 de la présente publication). Les commentaires mathématiques de l'édition de 1982 sont enfin reformulés, élargés par endroits, détaillés en d'autres. L'introduction de R. Rashed à ces textes souligne quelques idées clés de l'*Algèbre* d'al-Khayyam, et tout particulièrement l'introduction du concept d'unité de mesure, dans les trois dimensions, qui lui permet de donner une interprétation géométrique aux nombres qui entrent dans les équations. Par ailleurs, R. Rashed s'appuie sur l'*Algèbre* de Khayyam pour relire la *Géométrie* de Descartes (1637) et évaluer, depuis la perspective d'un programme comparable, ce qui constitue précisément la modernité du philosophe.

B. Vahabzadeh reprend le même format de présentation pour traiter, en seconde partie du livre, les *Commentaires sur les difficultés de certains postulats de l'ouvrage d'Euclide*. Après une introduction où il dégage les points clés du texte d'al-Khayyam, il l'analyse en détail dans son commentaire mathématique. Une évaluation critique des éditions et des traductions antérieures conduit à l'édition du texte qu'il propose en regard d'une nouvelle traduction. Lui aussi souligne, entre autres, le travail conceptuel par lequel, dans la dernière partie de ses *Commentaires*, al-Khayyam se démarque de l'unité, par essence indivisible, des auteurs de la Grèce classique. Pour introduire son déplacement de la notion de nombre évoqué plus haut, al-Khayyam doit en effet mettre en œuvre une unité divisible.

L'œuvre mathématique connue d'al-Khayyam est donc désormais disponible en un unique volume, et dès lors nombre de perspectives s'ouvrent pour travailler sur les contributions de ce savant, prises dans leur ensemble. J'en indiquerai une, en conclusion, à titre d'invitation à s'engager dans cette voie. Elle vise à mieux comprendre les liens qui ont pu unir, dans la pensée d'al-Khayyam, son *Algèbre* et ses *Commentaires sur les difficultés de certains postulats de l'ouvrage d'Euclide*. Comment les traitements du nombre, du rapport, dans l'un et l'autre textes ont-ils pu interagir ? Quels liens unissent réellement les unités de mesure qui permettent en algèbre une lecture géométrique du nombre et en géométrie une lecture numérique de la grandeur³ ? Autant de questions qui se posent désormais et dont le traitement doit nous permettre de mieux apprécier l'apport des savants arabes du Moyen-Âge aux mathématiques.

— Karine Chemla, REHSEIS/CNRS

² Université d'Alep, Institute for History of Arabic Sciences, 1981.

³ Si le problème est évoqué par B. Vahabzadeh (p. 279 et p. 298), il me semble qu'il mérite d'être creusé plus avant.