LIVRES

Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I. Elementary theory ; Vol. II. Advanced theory
R. V. KADISON & J. R. RINGROSE
Graduate Studies in Mathematics, Vols. **15-16**, American Mathematical Society, 1997. 398 p. ISBN 0-8218-0820-6 ; 776 p. ISBN 0-8218-0819-2

Ces deux livres sont une réédition par l'A.M.S. des ouvrages originaux publiés par Academic Press en 1983 pour le volume I et en 1986 pour le deuxième volume.

Le champ d'applications de la théorie des Algèbres d'Opérateurs s'est considérablement élargi ces vingt dernières années, sous l'impulsion prépondérante de A. Connes (Géométrie non commutative), de V. Jones (Sous-facteurs et applications) et de D. Voiculescu (Probabilités libres). Ces progrès majeurs sont brièvement mentionnés dans la préface à la seconde édition du volume II, qui se trouve être la seule modification par rapport à l'édition originale, mis à part quelques corrections mineures dans ce même volume. Ce parti pris conservateur paraît raisonnable compte-tenu de la taille déjà importante de ces ouvrages (plus de mille pages en tout) et de leur style. Les auteurs exposent clairement leur objectif dans la préface du volume I : enseigner les bases de la théorie de façon à rendre accessible la littérature plus spécialisée et les applications, en exigeant seulement du lecteur des connaissances relativement élémentaires en analyse réelle et complexe et en théorie de la mesure. De nombreuses façons d'utiliser ces ouvrages sont possibles et suggérées : lecture personnelle, cours à différent niveaux. Les démonstrations sont claires et très complètes et, par souci pédagogique, les auteurs n'hésitent pas à revenir sur le même sujet ou à présenter deux preuves d'un même résultat.

Une autre particularité est la richesse des exercices proposés à la fin de chaque chapitre. Ils n'ont pas été extraits tels quels de la littérature : retravaillés, réorganisés, accompagnés d'indications, ils sont presque toujours très accessibles. En même temps qu'ils illustrent et enrichissent le texte, ces exercices constituent d'excellents outils pour acquérir une bonne pratique du sujet. Signalons que leurs solutions complètes ont été publiées par R. Kadison et J. Ringrose dans deux volumes parus chez Birkhäuser en 1991 et 1992. En revanche, aucune référence aux sources n'est indiquée, aussi bien pour les exercices que pour les énoncés du texte. Les auteurs ne commentent pas l'aspect historique du sujet, et la bibliographie est volontairement sommaire.

Comme l'indique le titre, le premier volume traite de la théorie élémentaire. Les trois premiers chapitres exposent les bases de l'analyse fonctionnelle classique. Ils sont suivis de deux chapitres d'introduction aux C^*-algèbres et algèbres de von Neumann, incluant la théorie spectrale des opérateurs non bornés. Le deuxième volume est d'un niveau plus avancé. Tous les outils et concepts indispensables à la formation d'un spécialiste en algèbres d'opérateurs au début des années 80 sont présentés : analyse des projecteurs à la Murray-von Neumann, théorie des états et poids normaux, étude des traces dans les algèbres finies, théorie de Tomita, produits tensoriels finis et infinis, produits croisés. Le lecteur appréciera notamment l'exposé très accessible de la théorie modulaire de Tomita, la présentation claire de la classification des produits tensoriels infinis d'algèbres de matrices conduisant à la construction, due à R.T. Powers, d'une infinité non dénombrable des facteurs de type III non isomorphes, ainsi que l'introduction à l'étude de la structure des facteurs de type III, à l'aide des groupes d'automorphismes modulaires.

Ces livres, écrits par deux éminents spécialistes de la théorie des Algèbres d'Opérateurs remplissent bien leur mission : conduire le lecteur, même débutant, à un niveau de connaissances et de pratique lui permettant de démarrer des recherches sérieuses dans le domaine. On peut toutefois regretter l'absence d'une introduction à la K-théorie des C^*-algèbres tant cette notion a profondément transformé l'approche du sujet depuis vingt-cinq ans.

C. Anantharaman-Delaroche, Université d'Orléans

The Gelfand Mathematical Seminars, 1996-1999
I. M. Gelfand, V. S. Retakh, éditeurs
Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2000. 154 p. ISBN 0-8176-4013-4

Ce volume, dédié à la mémoire de C. H. Sah, réunit sept exposés présentés au séminaire Gelfand. Difficile de trouver un chapeau commun à leurs thèmes variés — si ce n'est « géométrie et physique » —, et de dire pourquoi leur côtoiement semble malgé tout naturel. En tout cas, la plupart brillent par une certaine transparence conceptuelle, et la lecture en est fort stimulante.

Deux de ces exposés s'apparentent à des survols, rédigés avec un soin remarquable. Il s'agit d'une introduction de G. Cherlin aux structures homogènes sporadiques, et d'un texte de J. Dupont et C. H. Sah portant sur les variantes sphériques et hyperboliques du troisième problème de Hilbert.

Entre logique et géométrie, Cherlin expose la correspondance galoisienne qui lie structures relationnelles finies et groupes finis de permutations, introduit la notion d'homogénéité et les fonctions de complexité associées, et présente la classification de Lachlan de ces structures en l'illustrant de nombreux exemples.

Le brillant exposé de Dupont et Sah, très accessible, commence par rappeler l'histoire du problème de Hilbert sur la décomposition des polyèdres, résolu l'année d'après par son élève M. Dehn : il existe des tétraèdres de même base et même hauteur ne pouvant être découpés en polyèdres superposables. Dehn et Sydler ont montré que deux polyèdres peuvent être découpés ainsi si et seulement s'ils ont même volume et même invariant de Dehn. C'est de la question non résolue des analogues sphériques et hyperboliques de ce critère que traite l'article, en dimension ambiante trois. Dans le cas sphérique, la question est liée à un probème de Cheeger-Simons : montrer qu'en général le volume d'un simplexe géodésique d'angles dièdres commensurables à π n'est pas commensurable à π^2. Dans le cas hyperbolique, la question est liée à une conjecture de Milnor sur l'indépendance **Q**-linéaire de valeurs de dilogarithmes aux racines de l'unité (via la fonction de Lobachevsky). Dupont et Sah élucident la partie « formelle » (i.e. non diophantienne) de ces questions au moyen de leur « scissors congruence group », en décrivent les propriétés et le lien avec K_3. Le texte contient enfin une agréable présentation de la paramétrisation des simplexes par les matrices de Gram, et de l'action galoisienne sur icelles qui fait tantôt passer du cas sphérique au cas hyperbolique.

V. Kac et A. Radul étudient la structure de Poisson sur le centre de l'algèbre enveloppante des algèbres de Lie restreintes obtenues par réduction mod. p d'une algèbre de Lie sur **Z**. La motivation est l'analogie avec la théorie des représentations des groupes quantiques aux racines de l'unité, où la structure de Poisson joue un rôle important (d'après G. Lusztig, la réduction mod. p d'un tel groupe quantique donne essentiellement l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie restreinte classique). Comme les auteurs reportent les applications, non dévoilées, à publication ultérieure, on reste un peu sur sa faim.

L'exposé audacieux de M. Kontsevich et A. Rosenberg propose une définition et une étude des espaces algébriques non-commutatifs lisses. Ils commencent par exposer la notion non-commutative de lissité dûe à D. Quillen et J. Cuntz : propriété de relèvement pour les extensions nilpotentes, ou de manière équivalente, projectivité du bimodule des différentielles non-commutatives. Le prototype en est l'algèbre de polynômes non-commutatifs sur un corps commutatif k ; plus généralement, l'algèbre des chemins d'un graphe. À toute k-algèbre lisse A (de type fini), les auteurs associent une suite de k-schémas, appelés espaces de représentation, qui coreprésentent les foncteurs $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A, \mathrm{Mat}_{n\times n}(-))$. Leur guide heuristique est que de tels espaces de représentations doivent être attachés à tout « espace non-commutatif lisse » X et refléter toute structure introduite sur ces derniers. La construction des espaces non-commutatifs lisses est basée sur la topologie plate et le théorème de descente de Barr-Beck. Sans entrer dans les détails, l'idée consiste à voir X comme une catégorie abélienne (intuitivement, celle des faisceaux quasi-cohérents sur le « vrai espace sous-jacent ») munie de deux foncteurs adjoints $ß^*; ß_*$ vers les k-vectoriels ($ß^* k$ est « vécu » comme le faisceau structural). Les notions générales (faisceaux cohérents...) sont illustrées par la définition et l'étude « concrètes » de l'espace projectif non-commutatif.

Il y a aussi un exposé de V. Alekseyevskaya, V. Borovik, I. Gelfand et N. White généralisant aux matroïdes l'homologie des graphes de Kontsevich, et un texte de A. Kazarnovski-Krol sur les fonctions sphériques de type A_n. Le volume se termine par un texte de Rosenberg contenant « une preuve courte » du théorème d'existence, dû à P. Deligne, des foncteurs fibres pour les catégories tensorielles dont la dimension des objets est toujours un entier naturel ; je n'ai pas compris en quoi cette preuve diffère de celle de Deligne — si ce n'est, légèrement, par la présentation.

Yves André, CNRS Paris

Regulators in Analysis, Geometry and Number Theory
A. REZNIKOV, N. SCHAPPACHER, éditeurs
Progress in Mathematics, **171**. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2000. 324 p.
ISBN 0-8176-4115-7

Ce recueil d'articles est issu d'un congrès de même titre, tenu au centre E. Landau de Jérusalem en 1996. Il présente un état des lieux non systématique de la théorie des régulateurs et des classes caractéristiques secondaires en géométrie arithmétique. L'introduction écrite par les éditeurs brosse le panorama et aide le lecteur à mettre en perspective les différentes contributions.

Rappelons en quelques mots les points de départ du sujet. Les régulateurs classiques (déterminants de logarithmes d'unités) apparaissent dans la « formule analytique du nombre de classes » exprimant la dérivée à l'origine des fonctions zêta de Dedekind. Borel a proposé une formule semblable pour les valeurs aux entiers négatifs, à l'aide de régulateurs définis via la K-théorie (se ramenant dans ce cas à de la cohomologie des groupes arithmétiques). Les travaux de Bloch et de Beilinson mettent en place une vaste généralisation de la notion de régulateur (incluant celle de Borel) en toute dimension. Suivant une conjecture profonde de Beilinson, ces régulateurs sont sensés relier K-théorie et valeurs de fonctions L de motifs. Ils apparaissent toujours comme des déterminants ou volumes, et la cohomologie de Deligne-Beilinson sous-jacente à leur définition fait le pont avec les classes secondaires de Cheeger-Chern-Simons (qui correspondent aux classes de Chern en DB-cohomologie), et donc aussi avec la torsion analytique de Ray-Singer (qui calcule les classes CS des fibrés plats).

Les articles d'H. Esnault, K. Köhler, K. Künnemann et V. Maillot, et J. Lott se rattachent au thème des invariants secondaires et de la torsion analytique, y compris ses avatars arakéloviens.

Les articles de S. Bloch, H. Gangl, A. Goncharov (sur le trilogarithme), A. Levin et J. Wildeshaus se situent autour des problèmes de régulateurs pour les motifs de Tate mixte et leurs analogues elliptiques (problèmes d'ailleurs étroitement liés à la conjecture de Zagier sur les valeurs des fonctions zêta de Dedekind).

Enfin, le recueil contient deux contributions en marge du thème général : un article de D. Blasius et J. Rogawski sur la cohomologie et la géométrie des surfaces modulaires de Picard, et un essai de C. Deninger, largement spéculatif mais très précis et instructif, sur une éventuelle interprétation « dynamique » des variétés arithmétiques — du moins au niveau cohomologique.

Yves André, CNRS Paris

Polynomials with special regard to reducibility
ANDRZEJ SCHINZEL
Encyclopedia of Math. and Appl, **77**. Cambridge, 2000. 558 p. ISBN 0-521-66225-7

Ce livre présente un panorama très complet des résultats et des techniques « elémentaires » concernant la réductibilité des polynômes à une ou plusieurs variables à coefficients dans un corps k. Par « elémentaire », j'entends que l'auteur ne requiert de son lecteur que très peu de connaissances préalables (un peu de théorie algébrique des nombres), et notamment aucune connaissance de géométrie algébrique. Deux bons tiers de l'ouvrage traitent de corps très généraux, et dans le reste, k est un corps de nombres. Les paragraphes se terminent régulièrement par des notes « historiques » qui réfèrent à la très riche bibliographie.

Dès le début, avec le théorème de Lüroth, l'auteur revendique sa préférence pour les méthodes constructives ; mais l'ouvrage ne se réduit pas, tant s'en faut, à une description d'algorithmes. Il est impossible de donner ici une idée des 82 théorèmes soigneusement présentés par l'auteur (dont 37 dûs à lui-même, selon son recensement). Dans l'appendice final — qui utilise un peu de géométrie algébrique —, U. Zannier expose ses travaux récents avec E. Bombieri sur une conjecture de Schinzel.

Ce livre sans équivalent est une mine de résultats et de méthodes ingénieuses, rassemblés, et pour une part substantielle élaborés, par un maître incontesté du sujet. Dans ses parties les moins avancées, on pourra aussi y puiser de nombreux exercices inédits pour des cours d'algèbre ou d'arithmétique.

Yves André, CNRS Paris

Complex tori
CHRISTINA BIRKENHAKE, HERBERT LANGE
Progress in Math. **177**. Birkhäuser, Boston, Inc., Boston, MA, 1999. 251 p.
ISBN 0-8176-4103-3

Cet ouvrage fait suite à *Complex abelian varieties* des mêmes auteurs. Contrairement aux variétés abéliennes, qui sont parmi les objets les plus étudiés des mathématiques, fort peu est connu et écrit sur les tores complexes non algébriques. Ce livre s'efforce de combler cette lacune.

A part un théorème de F. Oort et Y. Zarhin selon lequel toute $\mathbf{Q}$-algèbre de dimension finie est algèbre d'endomorphismes d'un tore complexe, la plupart des principaux résultats du livre sont dûs aux auteurs, et concernent les tores complexes dits non-dégénérés. Signalons notamment leur étude approfondie des familles de tores avec endomorphismes prescrits, qui étend celle de G. Shimura pour les variétés abéliennes, et qui fournit une interprétation modulaire pour des « domaines de drapeaux » et leurs quotients par des groupes arithmétiques, quotients qui ne sont pas nécessairement du type variétés de Shimura.

Un court et clair chapitre est consacré aux jacobiennes intermédiaires (de Weil, de Griffiths et de Lazzeri) ; celles de Griffiths sont en effet des exemples naturels de tores complexes non nécessairement algébriques. Dommage que les auteurs n'évoquent aucune application (même conjecturale) de leur théorie à la théorie des cycles algébriques, via ces jacobiennes.

Yves André, CNRS Paris

Espaces de modules des courbes, groupes modulaires et théorie des champs
X. BUFF, J. FEHRENBACH, P. LOCHAK, L. SCHNEPS, P. VOGEL
Panoramas et Synthèses **7**, Soc. math. France, 1999. 143 p. ISBN 2-85629-073-6

Ce numéro 7 de la série Panoramas et Synthèses est le texte d'une rencontre des *États de la Recherche*. Il comporte trois chapitres, dont l'axe fédérateur est la structure de catégorie tensorielle tressée. Les sujets abordés sont extrêmement riches et ont été depuis une bonne dizaine d'années au cœur de recherches importantes, mettant en relation des domaines « jusque-là indépendants : l'arithmétique des corps de nombres et des courbes algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}$, la géométrie des espaces de modules $\mathcal{M}_{g,n}$ des surfaces de Riemann munies de points marqués, la théorie des nœuds, et les théories conformes étudiées en physique théorique ». Que ceux qui seraient impressionnés par cet étalage se rassurent : il s'agit ici de textes de cours, et l'essentiel est abordable avec peu de prérequis.

Le parti pris de présenter une approche élémentaire est particulièrement remarquable dans le premier chapitre *Éléments de géométrie des espaces de modules des courbes* (X. Buff, J. Fehrenbach, P. Lochak). Il serait d'ailleurs préférable de parler de plusieurs approches élémentaires : analytique, métrique, et par représentations du groupe fondamental. On donne donc trois définitions de l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{g,n}$ et de l'espace des modules $\mathcal{M}_{g,n}$, ainsi que les clefs pour comprendre l'équivalence entre ces définitions, la principale étant le théorème d'uniformisation. Dans le cas hyperbolique (caractéristique d'Euler-Poincaré strictement négative), le point de vue métrique définit l'espace des modules comme l'ensemble des métriques hyperboliques à difféomorphisme près ; le jeu est de comprendre la correspondance avec les surfaces de Riemann et les sous-groupes de $PSL(2,\mathbb{R})$. On trouve ensuite un exposé concis des classiques du sujet : coordonnées de Fenchel-Nielsen, cellulation de l'espace de Teichmüller, description de la partie à l'infini de l'espace de modules. Le cas de l'espace des modules en genre zéro et de sa compactification est traité avec une attention particulière justifiée par le lien avec le chapitre suivant.

Le groupe fondamental de l'espace des modules en genre zéro $\mathcal{M}(0,n)$ (groupe de Teichmüller, aussi appelé groupe modulaire ou mapping class group) est un quotient du groupe de tresse d'Artin. Si on définit ce groupe comme un groupe fondamental on doit choisir un point de base, et à un lacet entre deux points de base est associé un isomorphisme. La question centrale dans le second chapitre, *Groupoïdes fondamentaux des espaces de modules en genre* 0 *et catégories tensorielles tressées* (L. Schneps), est l'étude du groupoïde de Teichmüller : il s'agit de faire varier le point de base dans certaines régions au voisinage de l'infini. Précisément :

$$T(0,n) = \pi_1(\mathcal{M}(0,n),\mathcal{B}_n),$$

où $\mathcal{B}_n$, ensemble des points base à l'infini, est la réunion, pour tous les points de dégénérescence maximale de $\mathcal{M}(0,n)$, des régions réelles simplement connexes contenues dans leurs voisinages tubulaires.

La compréhension de la structure de ce groupoïde passe par la notion de catégorie tensorielle tressée. Cette notion est présentée avec un exemple fondamental qu'on peut appeler une catégorie tensorielle tressée libre, et qui est décrit par des arbres. Le lecteur peu habitué devra probablement faire preuve d'un peu de patience pour comprendre en quoi cette présentation est utile pour décrire la situation géométrique. Une fois établi le lien entre les catégories tensorielles tressées et les espaces de modules en genre zéro, on peut aborder la théorie de Grothendieck-Teichmüller et le fameux programme de Drinfel'd.

Théorème. — *Soit* $n \geqslant 4$. *Alors le groupe de Grothendieck-Teichmüller* $\widehat{GT}$ *est un groupe d'automorphismes du groupoïde de Teichmüller profini* $\widehat{T}(0,n)$.

Toute la saveur de ce théorème réside dans le fait que le groupe $\widehat{GT}$ contient le groupe de Galois absolu $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (Drinfel'd, Ihara). La suggestion de Grothendieck était d'utiliser l'action de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur les groupes fondamentaux algébriques des espaces de modules pour essayer de donner une nouvelle définition de ce groupe.

Question. — *Est-ce que* $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \simeq \widehat{GT}$ *?*

Le troisième chapitre, *Invariants de Witten-Reshetikhin-Turaev et théories quantiques des champs* (P. Vogel), est une introduction à la théorie topologique des champs quantiques. Cette notion a été inventée par Witten en 1988. Une telle théorie contient en particulier :

– un invariant numérique des variétés de dimension 3 orientées compactes sans bord,

– pour chaque surface Σ, un espace vectoriel de dimension finie $V(\Sigma)$ dont la dimension est donnée par la fameuse formule de Verlinde,

– ainsi qu'une représentation (projective) du groupe modulaire (mapping class group).

La construction d'une telle théorie nécessite une structure algébrique un peu plus riche que celle de catégorie tensorielle tressée. Il est montré ici comment à partir d'une catégorie enrubannée convenable, on peut obtenir une telle théorie. L'exposé, succint, comporte les idées clefs et les exemples de base et constitue un bon préalable à la lecture de la réréfence sur le sujet : *Quantum Invariants of Knots and* 3-*Manifolds* par Vladimir Turaev. Signalons également le numéro 5, *Quantum groups and Knot Invariants* (Christian Kassel, Marc Rosso, Vladimir Turaev) de cette même série *Panoramas et Synthèses*, ainsi que l'ouvrage de Christian Kassel, *Quantum groups* pour une étude plus complète des catégories enrubannées et le rapport avec les groupes quantiques.

C. Blanchet, Université de Bretagne-Sud

Large deviations
FRANK DEN HOLLANDER
Fields Institute Monograph, **14**, A.M.S., 2000. 143 p. ISBN 0-8218-1989-5

Ce livre d'environ 150 pages présente une introduction à la théorie des grandes déviations et un choix de quelques unes de ses applications les plus récentes. Son contenu a été enseigné au *Fields Institute for Research in Mathematical Sciences* de Toronto (Canada) pendant l'automne 1998. Il se compose de deux parties : la **Partie A** décrit les principaux éléments de la théorie elle-même ; la **Partie B**, beaucoup moins classique, offre dans une série de cinq thèmes empruntés à la mécanique statistique et aux milieux aléatoires des situations assez diverses pour illustrer la puissance des outils présentés dans la première partie.

Alors que plusieurs monographies, que l'auteur invite à lire, sont aujourd'hui disponibles sur cette branche mathématique qui emprunte tout à la fois aux probabilités, à l'analyse convexe, au calcul variationnel et à l'analyse fonctionnelle, cet ouvrage répond – et, faut-il le souligner ?, pour nos étudiants francophones, *en anglais* – au besoin d'un manuel accessible, privilégiant une présentation rapide des idées dans le contexte le plus simple et mêlant au fil du texte exercices, commentaires immédiats et pistes d'approfondissement. En effet, l'intérêt essentiel d'un tel ouvrage est bien de donner un accès rapide et économique aux techniques de base, quitte à abandonner à un approfondissement futur les extensions, certainement frappantes mais techniquement bien plus difficiles.

Partie A : théorie pour des suites I.I.D. ou faiblement dépendantes

La théorie des grandes déviations traite des écarts d'un système aléatoire à son comportement moyen. Imaginons un jeu de pile ou face avec une pièce parfaite, pour lequel on code la succession des résultats par une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de 0 de 1 suivant qu'on tire pile ou face : la proportion de Face après n lancers, $\frac{1}{n}\sum_{1\leq i\leq n}X_i$, est, selon la loi forte des grands nombres proche de $\frac{1}{2}$; mais peut-on en dire plus ? Précisément, le théorème séminal de CRÁMER établit que la probabilité que la proportion de Face soit à une distance δ strictement positive de sa moyenne décroît exponentiellement vite avec n.

De façon plus générale, une suite de mesures de probabilités $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un espace topologique mesuré $(S;\mathcal{S})$ satisfait un principe de grandes déviations à la vitesse $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et suivant une fonction de taux $\mathcal{I} : S \to [0;+\infty]$ d'ensembles de niveau $\{\mathcal{I} \leq \alpha\}$ compacts si : pour tout fermé F de S (resp. tout ouvert G de S), la limite supérieure (resp. inférieure) de $v_n^{-1}\log\mu_n(F)$ (resp. $v_n^{-1}\log\mu_n(G)$) est majorée (resp. minorée) par $-\underline{\mathcal{I}}(F)$ (resp. $-\underline{\mathcal{I}}(G)$), où $\underline{\mathcal{I}}(A)$ désigne la borne inférieure de $\mathcal{I}$ sur A. Autrement dit, pour les *bons* boréliens $E \in \mathcal{S}$, $\mu_n(E)$ est, à l'ordre exponentiel, de la forme $\exp(-v_n\underline{\mathcal{I}}(E))$. Le principe est dit *faible* si $\mathcal{I}$ est semi-continue inférieurement et la propriété ci-dessus est satisfaite pour les ouverts et les compacts de $(S;\mathcal{S})$.

Les cinq chapitres de la partie A forment cinq étapes de difficulté croissante. Dans les deux premiers, sont étudiées les grandes déviations de quantités statistiques reliées à une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, comme le jeu de Pile ou Face. Les grandeurs statistiques intéressantes sont ainsi : la moyenne $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{1\leq i\leq n} X_i$, la mesure empirique $L_n = \frac{1}{n}\sum_{1\leq i\leq n}\delta_{X_i}$ (dont la moyenne empirique est la moyenne) et le processus empirique. La suite des lois de chacune de ces quantités satisfait un principe de grandes déviations sous des hypothèse adéquates. L'auteur aborde graduellement chacune des preuves en se limitant au cadre où les quantités aléatoires ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs ; ce choix nécessite l'utilisation de techniques combinatoires parfois assez subtiles (un joli calcul fait appel à quelques connaissances en théorie des graphes) mais le modèle discret a cet avantage de *déplier* des calculs que l'analyse dissimule.

Le troisième chapitre balaye en quelques pages les outils et les principes généraux de la théorie : les définitions, le lemme de VARADHAN et une version de ce lemme adaptée à la mécanique statistique, le principe de contraction qui permet de transférer, via une flèche continue, un principe de grandes déviations de la source au but, le rôle de la convexité et, partant, la généralisation du théorème de CRÁMER.

Dans les deux derniers chapitres de cette partie sont étudiées deux situations où les suites de variables aléatoires ne sont plus indépendantes : les chaînes de Markov à espace d'états fini, à temps discret puis à temps continu (chapitre 4) ; le théorème d'ELLIS-GÄRTNER qui permet d'établir l'existence d'un principe des grandes déviations de façon similaire à la déduction de la convergence en loi grâce à la convergence des fonctions caractéristiques (chapitre 5). Cette dernière approche repose sur l'étude des moments exponentiels de la suite de probabilités et utilise intimement des résulats d'analyse convexe.

Partie B : applications

Les cinq chapitres de la deuxième partie présentent des applications, des plus classiques aux plus récentes, empruntées à la statistique et à différents problèmes des milieux aléatoires.

Ainsi l'outil des grandes déviations permet-il grâce aux travaux de CHERNOFF de préciser l'ordre exponentiel des erreurs de première et deuxième espèces dans le test optimal d'hypothèses de NEYMAN-PEARSON ainsi que celui d'une borne inférieure de l'erreur bayésienne (chapitre 6).

Le chapitre 7 est consacré à un sujet qui connaît depuis quelques années de nouveaux et riches développements : les marches aléatoires dans un milieu aléatoire. Le modèle d'origine physique est le suivant : un individu se déplace sur le réseau linéaire $\mathbb{Z}$, d'un site x à ses deux plus proches voisins $x+1$ et $x-1$ avec une probabilité respective ω_x et $1-\omega_x$; le milieu est aléatoire au sens où les probabilités d'avancer ou reculer (qui reflètent les propriétés locales de l'espace) sont distribuées aléatoirement selon une mesure de probabilités et la variable $\omega = (\omega_x)_{x\in\mathbb{Z}}$ contient toute l'information du milieu. Le comportement de cette marche diffère de celle que l'on connaît pour une marche simple, i.e. avec des probabilités de déplacement constantes : si X_n est la position du marcheur à l'insant n, sa vitesse moyenne $\frac{1}{n}X_n$ converge presque sûrement vers une vitesse, parfois nulle : le marcheur peut musarder ! Sous des hypothèses adéquates, on peut montrer [travaux de GREVEN - DEN HOLLANDER, DEMBO-PERES–ZEITOUNI, COMETS-GANTERT-ZEITOUNI] que pour presque tout ω, la loi de la vitesse moyenne, conditionnelle au milieu, satisfait un principe de grandes déviations suivant une fonction de taux *déterministe*. À côté d'autres résultats, on ne peut résister au plaisir de voir surgir des fractions continues qui, loin d'être un artefact, reflètent le comportement profond de la marche aléatoire.

Dans le chapitre 8, l'auteur expose l'étude du modèle d'Anderson de conduction thermique dans un réseau en présence de sources et de puits de chaleur (mais le modèle admet bien d'autres interprétations) : $\partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t) + \xi(x)u(x,t)$ où $(x,t)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{R}_+$, $u(\cdot,0)=1$ et $(\xi(x))_{x\in\mathbb{Z}^d}$ représente une suite aléatoire de sources ou de puits de chaleur. La représentation probabiliste de la solution de cette équation aux dérivées partielles permet, sous des hypothèses adéquates sur la répartition des sources ou puits, de décrire le comportement moyen (corrélations, moments de tout ordre, etc.) de la solution pour des temps grands ; *grosso modo*, le champ aléatoire u possède des pics élevés bien localisés et séparés dans le milieu dans de rares ilôts, lesquels constituent pourtant la contribution majeure des moments. Ce type de problème pose de délicates questions et nécessite la résolution de problèmes variationnels variés.

Le chapitre 9 introduit le lecteur dans un domaine de prédilection des chimistes : les chaînes de polymères. Le modèle mathématique associé se réfère aux propriétés physiques du polymère : sa très grande irrégularité dans l'espace et sa capacité d'auto-répulsion que les liaisons chimiques organisent. Le modèle très simplifié choisi est donc celui d'une marche aléatoire simple dans $\mathbb{Z}^d$, dont on pénalise sévèrement les auto-intersections. Parmi les nombreuses questions posées par cette modélisation, il est montré pour le modèle unidimensionnel que la longueur d'un chaîne de n monomères est, avec probabilité tendant vers 1 avec n, proportionnelle à n avec une vitesse analytique en le paramètre d'autorépulsion. La preuve de ce résultat exige d'étudier le modèle légèrement modifié où l'on impose à la chaîne des n premiers monomères de former un pont (i.e. celle-ci s'enroule entre ses extrémités). Ici aussi, principes de grandes déviations et problèmes variationnels abondent et offrent par leur subtilité technique un panorama très large des idées probabilistes dans ce domaine.

Le dernier chapitre expose un modèle d'évolution dynamique hamiltonienne de particules en interaction aléatoire. La loi, moyennée suivant l'aléa des interactions, (des distributions empiriques) des trajectoires des N particules converge vers celle des trajectoires d'un processus non linéaire, le processus de McKean-Vlasov. En fait, l'étude des grandes déviations associées à ce système donne accès à de nombreux résultats connexes, dont la fameuse propagation du chaos.

Du rapide survol du contenu très copieux de ce mini-cours, on peut à juste titre souligner le brio par lequel l'auteur amène son lecteur aux confins de la recherche la plus pointue, même si un tel voyage nécessite quelque effort. Le style ramassé et vivant atténue quelque peu la technicité de certaines preuves. À cet égard, l'insertion au fil du texte d'exercices, dont les solutions sont données en appendice, fournit au lecteur motivé l'occasion de vérifier sa compréhension du sujet mais aussi de prolonger la lecture du cours par des approfondissements bienvenus. Une bibliographie très complète, un index de termes et un glossaire de symboles closent cet ouvrage réussi et séduisant.

Marc Brunaud, Université Paris VII – Denis Diderot

Introduction to Mathematical Statistical Physics
Robert A. Minlos
University Lecture Series, **19**, A.M.S., 2000. 103 p. ISBN 0-8218-1337-4

Cet ouvrage d'une centaine de pages présente dans une série de quinze leçons une introduction aux fondements d'une théorie mathématique de la physique statistique. Cette branche de la physique intéresse les mathématiciens depuis près de quarante ans. Alors qu'en contraste des physiciens, les observations expérimentales, sinon les expériences physiques, y jouent un rôle négligeable, le but poursuivi consiste plutôt à construire, à partir des postulats de la physique, une théorie rigoureuse selon les règles communément admises. De fait, le mathématicien trouve là l'occasion d'utiliser des techniques très variées (combinatoire, probabilités, systèmes dynamiques, théorie des opérateurs, analyse complexe, etc.) et, aussi, la source de nombreux problèmes.

Comme l'annonce le titre de la série, ce volume s'adresse à des étudiants d'un niveau au moins égal à notre *Maîtrise* et constitue par son style volontairement concis une introduction à la lecture d'ouvrages plus développés, plus spécialisés et, dès lors, plus complets ([Rue69, Sim93, Sin82, Tho80]). Il est construit en trois parties : la première expose les modèles de base, les notions d'ensembles statistiques, d'espace des phases, de leurs distributions, i.e. les mesures de probabilités construites sur ces espaces, et, enfin, de limite thermodynamique ; dans la seconde, l'auteur établit l'existence d'une limite thermodynamique des distributions d'ensembles statistiques pour des valeurs régulières des paramètres du modèle et en étudie les propriétés (ergodicité, fonctions thermodynamiques, etc.) ; la troisième partie, de loin la plus délicate, introduit la notion de distribution de GIBBS limite au sens de DOBRUSHIN – LANFORD – RUELLE, en abrégé D-L-R, établit la non-unicité d'une telle distribution pour l'exemple fameux du modèle d'Ising ferromagnétique bidimensionnel à champ magnétique nul, ce qui constitue un premier exemple de *transition de phase*, et offre une introduction à la théorie de PIGOROV–SINAÏ en traitant la situation d'un modèle pouvant admettre trois états fondamentaux à l'équilibre.

Modèles et notions de base de la physique statistique à l'équilibre

La physique statistique étudie l'évolution d'un grand système de *particules* confinées dans un grand domaine $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ de l'espace physique. L'exemple typique est un *gaz classique*, i.e. une collection de N vecteurs position-vitesse $(Q,V) = (q_i,v_i)_{1\le i\le N} \in (\Lambda \times \mathbb{R}^3)^N \equiv \Omega_{\Lambda,N}$, où q_i (resp. v_i) est la position (resp. vitesse) de la i-ième particule.

Les équations de la mécanique classique et des lois de réflexion au bord du domaine Λ bien choisies permettent de montrer que la dynamique du système des N particules définit un semi-groupe préservant à la fois la forme volume de l'espace des phases $\Omega_{\Lambda,N}$ et l'énergie du système $E = H_{\Lambda,N}(Q,V)$, somme de l'énergie cinétique, de l'énergie interne et de l'énergie d'interaction. Comme l'énergie totale est un invariant de l'évolution du système, on peut restreindre l'espace des phases à la variété $\Omega_{\Lambda,N,E}$ des configurations d'énergie E, muni de sa mesure induite $\nu_{\Lambda,N,E}$, appelée *mesure microcanonique*.

La propriété essentielle des grands systèmes de particules consiste en leur comportement collectif : l'évolution d'une seule particule importe moins que le comportement moyen du système. Le postulat de la physique statistique à l'équilibre établit que, pour des grandes valeurs de N et Λ, toute observation du système – une fonction numérique F définie sur $\Omega_{\Lambda,N,E}$ est appelée *observable* – est proche de sa valeur moyenne calculée selon une mesure de probabilités P de l'espace des phases.

Le problème principal reste donc de définir cette distribution sur l'espace des phases : on distingue ainsi la distribution microcanonique $P^{\mathrm{microcan}}_{\Lambda,N,E}$, proportionnelle à la mesure microcanonique et la mesure de Gibbs canonique $P^{\mathrm{can}}_{\Lambda,N,\beta}$, mesure de probabilités absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\Omega_{\Lambda,N}$, de densité proportionnelle à $\exp(-\beta H_{\Lambda,N}(Q,V))$.

Le principe de l'équivalence des ensembles énonce le lien entre ces deux types de mesures : la mesure de Gibbs canonique $P^{\mathrm{can}}_{\Lambda_0,M,\beta}$ est, dans un sens approprié, la limite, lorsque $\Lambda \supset \Lambda_0$ tend vers $\mathbb{R}^3$, des mesures microcanoniques $P^{\mathrm{microcan}}_{\Lambda,N,E}$ restreintes aux configurations ayant M particules dans Λ_0, sous la condition que la densité de particules $N/|\Lambda|$ tend vers ρ et la densité d'énergie $E/|\Lambda|$ vers e (dans ce cas, $\beta = \beta(\rho,e)$).

Comme, dans le modèle étudié, l'énergie du système dépend de l'ensemble des particules et non du N-uplet (Q,V), i.e. de l'image de ce N-uplet, on peut définir une troisième famille de mesures : $P^{\mathrm{grandcan}}_{\Lambda,\beta,\mu}$, appelée *distribution grand-canonique*, définie sur la totalité des configurations possibles des particules, qui coïncide, conditionnellement à un nombre fixé N de particules, avec la mesure de Gibbs canonique $P^{\mathrm{can}}_{\Lambda,N,\beta}$; le paramètre μ, dual du nombre de points de la configuration, est appelé *potentiel chimique*.

Définir la limite thermodynamique de telles distributions consiste à établir l'existence d'une mesure de probablités $P_{\infty,?}$ sur l'espace de toutes les configurations dans $\mathbb{R}^3$ telle que, pour toute observable locale F, $\langle F, P_{\Lambda,?}\rangle$ $?$-converge vers $\langle F, P_{\infty,?}\rangle$ lorsque Λ croît vers $\mathbb{R}^3$ (l'$?$ signifie que, selon le choix des distributions, microcanonique (resp. canonique, grand canonique), on introduit les paramètres adéquats de $?$ – (N,E) (resp. (N,β), (β,μ)) –, les paramètres limites de $?$: (ρ,e) (resp. (ρ,β), (β,μ)) ainsi que le type de convergence : $N/|\Lambda| \to$

ρ et $E/|\Lambda| \to e$ (resp. $N/|\Lambda| \to \rho$, rien !)). Lorsque ces trois limites existent et sont uniques, les paramètre limites ρ, β et μ sont reliés entre eux et ces dernières relations montrent qu'en fait, les trois familles de distributions limites coïncident.

Existence de distributions de Gibbs limites ; conséquences

Dans cette deuxième partie (leçons 5 à 8), sont établies l'existence et l'unicité d'une distribution limite grand canonique $P^{\mathrm{grandcan}}_{\infty,\beta,\mu}$ pour des valeurs *régulières* $(\beta,\mu) \in 0$, i.e. soit à température élevée $0 < \beta < \beta_0$ soit à grand potentiel chimique $\mu > \mu_0$. L'outil principal de la preuve, de nature combinatoire et probabiliste, est la fonction de corrélation d'une distribution qui la définit de manière unique. La preuve consiste à établir un système d'équations, les équations de KIRKWOOD-SALSBURG, satisfait par les fonctions de corrélations et d'en étudier les solutions sur un espace de Banach adéquat (les fonctions des configurations à croissance au plus exponentielle). Le fait le plus remarquable reste que la même élégante méthode, mais avec des opérateurs modifiés, permet de prouver l'existence de la limite, le comportement asymptotique de sa fonction de corrélation, et la décroissance des corrélations de la distribution limite.

Cette dernière propriété possède une interprétation physique essentielle : la distribution limite satisfait la propriété de mélange telle que la probabilité d'observer une configuration contenant deux sous-configurations disjointes fixées de taille finie est asymptotiquement égale au produit des probabilités d'observer chacune de ces deux sous-configurations. En conséquence, il est possible de déduire une loi des grands nombres et un théorème de la limite centrale pour la distribution limite, pour des valeurs régulières des paramètres (β,μ). On peut aussi définir les principales fonctions thermodynamiques, *entropie spécifique, énergie libre de Helmholtz, pression*, soit de manière directe soit à l'aide des relations satisfaites par les paramètres (β,ρ,μ) de la distribution limite, et décrire les équations fonctionnelles qui les relient.

En conséquence, on définit l'ouvert D_{reg} des valeurs *régulières* des paramètres comme l'ensemble des (β,μ) tels que : (1) il existe une unique distribution de Gibbs limite $P^{\mathrm{grandcan}}_{\infty,\beta,\mu}$; (2) cette distribution $P^{\mathrm{grandcan}}_{\infty,\beta,\mu}$ possède la propriété de décroissance exponentielle des corrélations ; (3) les fonctions thermodynamiques ci-dessus sont réelles analytiques en leurs paramètres ; (4) le principe d'équivalence des ensembles est satisfait pour (β,μ). L'existence de valeurs singulières des paramètres établit la présence d'une *transition de phases*.

Formalisme D-L-R et transition de phases

La troisième et dernière partie introduit à la difficile théorie de la transition de phases. Dans ce but, la notion de distribution de Gibbs limite doit être modifiée : au lieu de considérer une distribution $P_{\Lambda,\mu,\beta}$ définie sur les configurations confinées dans un grand volume Λ de $\mathbb{R}^3$, suivant la définition D-L-R, on introduit la mesure de Gibbs $P_{\Lambda,\mu,\beta}(\cdot \mid c')$ définie sur les configurations de Λ conditionnées à un environnement $c' \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Lambda$, extérieur à Λ, fixé. Une distribution de Gibbs limite pure (on dit aussi un *état pur de Gibbs*) est, par définition, une mesure de probabilités sur toutes les configurations de $\mathbb{R}^3$ telle qu'il existe une suite de parties finies $(\Lambda_n)_{n\geq 1}$ et une suite d'environnements $(c'_n)_{n\geq 1}$ vérifiant :

$$\langle F, P_{\Lambda_n,\mu,\beta}(\cdot \mid c'_n)\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle F, P_{\infty,\mu,\beta}\rangle$$

pour toute observable locale F. L'ensemble des distributions de Gibbs limite est l'enveloppe convexe fermée des états de Gibbs purs.

L'exemple le plus basique qu'on connaisse (leçon 10) de système exhibant une transition de phases est le modèle d'Ising 2-D ferromagnétique : l'espace des phases est formé de configurations de spins $\sigma = (\sigma_x)_{x\in\Lambda} \in \{\pm 1\}^{\Lambda}$, $(\Lambda \subset \mathbb{Z}^2)$ et l'énergie de la configuration σ dans l'environnement $\sigma' = (\sigma'_{x'})_{x'\in\mathbb{Z}^2\setminus\Lambda}$ est :

$$H_\Lambda(\sigma \mid \sigma') = -\sum_{\substack{x,y\in\Lambda\\ |x-y|=1}} \sigma(x)\sigma(y) - \sum_{\substack{x\in\Lambda, y'\in\Lambda' \\ |x-y'|=1}} \sigma(x)\sigma'(y') + h\sum_{x\in\Lambda}\sigma(x)$$

où h désigne le champ magnétique.

Le remarquable argument combinatoire de PEIERLS, lequel repose sur la construction des contours associés à une configuration σ des spins, permet de prouver que, lorsque $h = 0$ et σ' est constant, égal à ± 1, les mesures de Gibbs associées $P^{+}_{\Lambda,\beta} = P_{\Lambda,\beta}(\cdot \mid +1)$ et $P^{-}_{\Lambda,\beta} = P_{\Lambda,\beta}(\cdot \mid -1)$ convergent (pour β assez grand) vers des états de Gibbs purs $P^{+}_{\infty,\beta}$ et $P^{-}_{\infty,\beta}$ distincts. Cette transition de phases se manifeste ainsi par la discontinuité de la magnétisation totale au voisinage du champ magnétique nul.

Dans les chapitres suivants, l'auteur présente une généralisation du modèle d'Ising, où le système de spins peut prendre désormais trois valeurs distinctes. Le même procédé consistant à introduire les configurations de contours séparant deux valeurs distinctes de spins conduit à prévoir l'existence d'un point triple de coexistence de trois phases distinctes et d'interfaces, lignes sur lesquelles coexistent deux phases distinctes. La preuve de ce résultat est développée en trois leçons ; elle nécessite l'approfondissement des notions de distributions de contours ainsi que l'adaptation des méthodes déjà utilisées à ce type de distributions. Cependant, dans un souci très pédagogique, la preuve complète sur la forme du diagramme des phases est laissée à la lecture future d'articles référencés.

L'ultime chapitre mentionne les différentes directions de généralisation des concepts présentés dans ce mini-cours et explore quelques questions connexes (formes de Wulff, interfaces, etc.) qui constituent les problèmes essentiels abordés par les chercheurs du domaine. Une courte et efficace bibliographie aidera le lecteur débutant à se diriger dans une littérature gigantesque.

Trouver une monographie de taille raisonnable introduisant dans un cadre mathématique rigoureux les principales notions de la physique statistique est désormais chose aisée : l'ouvrage de R. MINLOS répond sans lourdeur inutile ni excès paralysant de formalisme ou de complétude à ce besoin et facilite ainsi la lecture d'articles originaux ou de livres plus développés. Mais, puisque ce livre réussit à s'adresser à un public de débutants, on regrette un peu les coquilles d'impression ou quelques imprécisions de notation, dont on ignore si elles peuvent parfois plonger le lecteur novice dans des abysses de questionnement ou l'obliger à un salutaire exercice de lucidité. Le plaisir de lecture et le style efficace et concis l'emportent néanmoins.

Marc Brunaud, Université Paris VII – Denis Diderot

Références

[Rue69] David Ruelle. *Statistical Mechanics (rigorous results)*. Benjamin, 1969.

[Sim93] Barry Simon. *The statistical mechanics of lattice gases*, volume Vol. 1. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993.

[Sin82] Yacov Sinaï. *Theory of phase transitions : rigorous results*. Pergamon, London, 1982. English translation.

[Tho80] Colin Thompson. *Mathematical statistical mechanics*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1980.

Elliptic curves. Function theory, geometry, arithmetic

HENRY MCKEAN, VICTOR MOLL
Cambridge University Press, 1997. 280 p. ISBN 0-521-58228-8

C'est à un sacré chemin parmi quelques siècles de mathématiques que nous convient les deux auteurs de ce livre consacré aux courbes elliptiques. Comme le laisse présager son sous-titre, ce livre entremêle analyse complexe, théorie des corps, fonctions spéciales, géométrie projective, théorie des nombres... Ainsi, en 250 pages est brossé un vaste tableau de ce sujet dont il faut bien avouer qu'il est rarement traité de la sorte. (Comparer par exemple avec les ouvrages classiques de Silverman ou Husemoller, manifestement orientés vers la théorie des nombres). J'ai personnellement trouvé cela enthousiasmant même si l'exercice a ses défauts, souvent décriés dans le pays natal de N. Bourbaki. En effet, les définitions sont souvent approximatives, les énoncés rarement mis en valeur de la façon traditionnelle, les démonstrations esquissées ou reportées dans des exercices à l'énoncé lapidaire : « Check that. » Il n'empêche, j'ai trouvé ce livre d'une grande richesse.

Décrivons succinctement ce qu'on peut y trouver, chapitre par chapitre. Le point de départ du premier chapitre est la projection stéréographique qui motive la définition de surface topologique. De proche en proche, le lecteur est amené à la définition des surfaces de Riemann, des courbes algébriques planes. Au passage, sera démontré le théorème de Lüroth et esquissé la preuve du théorème d'uniformisation via l'interprétation hydrodynamique de l'équation de Laplace.

Les intégrales et fonctions elliptiques sont motivées par de nombreux exemples (de la représentation conforme d'un rectangle à la période du pendule simple sans oublier la rectification de l'ellipse). De nombreuses formules sont données, dont l'application au calcul de la moyenne arithmético-géométrique et la relation de Legendre. On y trouve aussi les applications au porisme de Poncelet ainsi qu'à certaines solutions de l'équation de Korteweg–de Vries. Arrivent ensuite les fonctions thêta avec leur lot de formules explicites et l'entrée de l'arithmétique dans le livre (sommes de carrés, réciprocité quadratique via les sommes de Gauß).

Les fonctions et formes modulaires sont introduites ensuite, mais c'est peut-être le chapitre du livre le moins agréable à lire. L'accent est mis sur la détermination plus ou moins explicite des équations modulaires ou de leurs variantes (notamment en degrés $\leqslant 5$). Cela intervient au chapitre suivant, *Ikosaeder*, qui fait le lien entre la résolution des équations de degré 5 et les fonctions modulaires qui fournissent dans ce cas un substitut à l'impossible résolution par radicaux.

Les deux derniers chapitres sont vraiment de nature arithmétique. Le premier traite de la multiplication complexe. Il introduit la théorie algébrique des nombres (essentiellement dans le cas des anneaux d'entiers des corps quadratiques imaginaires) : idéaux premiers, nombre de classes et le fait qu'il est fini, le théorème de Minkowski étant avantageusement remplacé dans ce cas par la considération du domaine fondamental de l'action $\mathrm{PSL}.2;\mathbf{Z}/$ sur le demi-plan de Poincaré. Enfin, le théorème de Mordell (selon lequel le groupe des points rationnels d'une courbe elliptique sur le corps $\mathbf{Q}$ est un groupe abélien de type fini) est démontré, mais sous l'hypothèse simplificatrice que les points de 2-torsion sont rationnels. Ceci simplifie en effet la partie « galoisienne » de la démonstration en permettant un critère simple pour qu'un point rationnel soit divisible par 2. Cette démonstration est celle de Weil et se généralise aux variétés abéliennes sur un corps de nombres.

Antoine Chambert-Loir

The nonlinear Schrödinger equation. Self-focusing and wave collapse

CATHERINE & PIERRE-LOUIS SULEM
Applied Math. Sciences **139**, Springer-Verlag, New York, 1999. 350 p. ISBN 0-387-98611-1

Le livre de C. Sulem et P.-L. Sulem est un vrai livre de mathématiques appliquées qui se

SMF – Gazette 86, Octobre 2000

lit avec plaisir. Le sujet peut sembler être très ciblé et d'envergure minimale à première vue, mais il n'en est rien. Tout d'abord les auteurs ne se restreignent pas à l'équation de Schrödinger non linéaire proprement dite mais traitent de façon détaillée des modèles connexes. Un nombre important de techniques mathématiques et de situations physiques différentes sont balayées. Ensuite, les preuves des résultats mathématiques ne sont pas toujours données (particulièrement en début d'ouvrage) ce qui permet d'aller loin dans la théorie, d'aborder des aspects variés de celle-ci et facilite la lecture de ce livre. Une bibliographie sérieuse et très complète termine l'ouvrage. Un autre point qui donne du champ à cet ouvrage est le fait que même quand les mathématiques deviennent impuissantes à résoudre le problème, les auteurs ne s'arrêtent pas : tous les coups deviennent permis, même les techniques de physiciens et les expérimentations numériques si bien qu'un embryon de réponse est donné.

Le livre est découpé en 5 parties.

La première partie est une grosse introduction dans laquelle il est montré que l'équation de Schrödinger est un modèle universel pour décrire les phénomènes physiques dans lesquels dispersion et non-linéarité sont en compétition. L'exemple précis développé est la propagation d'un laser dans un milieu dont l'indice dépend de l'intensité du champ électrique. Puis sont développés quelques aspects concernant la structure de l'équation de Schrödinger et la dynamique qui va en ressortir. On commence à parler d'invariance, de loi de conservation et de soliton.

Ces notions sont étudiées avec force détails dans la deuxième partie consacrée à la théorie rigoureuse. Les trois chapitres de cette partie font un inventaire qui n'est pas loin d'être exhaustif sur les problèmes suivants : problèmes de Cauchy locaux et globaux en temps, existence d'ondes solitaires et leur stabilité, explosion en temps fini. Les relations entre ces différents aspects sont clairement mis en évidence et les résultats optimaux (actuellement) sont décrits, tout cela en une soixantaine de pages. La bibliographie est très soignée.

La partie 3 rebondit sur les phénomènes d'explosion en temps fini. Il s'agit de décrire la solution au voisinage du temps d'explosion, tâche ardue ! Très peu de résultats mathématiques sont disponibles. Cette partie commence donc par un chapitre nommé *Numerical Observations.* Une description phénoménologique et quantitative sur l'explosion en temps fini suit. Cette partie se termine par un chapitre décrivant ce qu'il peut se produire lorsque l'on perturbe une équation de Schrödinger dont des solutions explosent en temps fini à partir de simulations numériques.

Les deux dernières parties sont consacrées à l'étude de cas où l'équation de Schrödinger est couplée à l'évolution d'un champ moyen où à des ondes basse fréquence c'est à dire des ondes acoustiques. Les « variantes » de l'équation de Schrödinger décrivant cela sont des systèmes : les systèmes de Davey et Stewartson dans le premier cas et le système de Zakharov dans le second. Le premier cas intervient essentiellement dans le cadre des ondes hydrodynamiques de surface, le second dans le cadre de la physique des plasmas. L'obtention de ces modèles est rappelée dans ces deux situations physiques. Dans le cas des plasmas, je dirais même que c'est sans doute la seule référence actuellement disponible dans laquelle cette obtention est écrite de façon lisible par un mathématicien. Les résultats décrits dans les parties 2 et 3 pour Schrödinger sont alors étendus dans la mesure du possible à ces classes de systèmes.

En conclusion, je pense que ce livre est appelé à devenir un classique et en tout cas va rester longtemps un ouvrage de référence sur le sujet dans lequel tout le monde peut trouver son intérêt : mathématiciens, physiciens ou ingénieurs.

Thierry Colin, Université Bordeaux 1

Fermat's Last Theorem for Amateurs

PAULO RIBENBOIM

Springer-Verlag, New York 1999. 407 p. ISBN 0-387-98508-5

Que faire lorsqu'une révolution scientifique vient bouleverser un paysage serein dans lequel les adeptes du théorème de Fermat (FLT en abrégé) avaient trouvé une niche protégée ?

SMF – Gazette – 86, Octobre 2000

C'est à ce problème que P. Ribenboim se trouve confronté en écrivant ce livre. Cela le conduit à devoir rappeler souvent à « ses » lecteurs amateurs que le théorème est maintenant démontré, ce qu'il fait avec une courtoisie et une discrétion remarquables. Jusqu'à présent les représentants de la « science normale » (pour utiliser le vocabulaire de Thomas Kuhn [K]) pouvaient conseiller la lecture des classiques aux amateurs car dans ce domaine les travaux de Kummer, expliqués par Edwards [E] par exemple, n'étaient pas inabordables. Aujourd'hui, malheureusement, il n'en va pas de même des travaux de Wiles et un mathématicien qui les a bien dominés ne peut être qualifié d'amateur qu'au sens premier du terme !

À quel public ce livre s'adresse-t-il donc et quel en est le projet ?

Si le terme d'« amateurs » est celui qui est le plus souvent associé aux lecteurs, la Préface semble retoucher cette description en mentionnant aussi les enseignants (*teachers*) et les mathématiciens curieux du développement du sujet, mais à l'exclusion des professeurs (*professors*) qui semblent constituer une classe à part de gens moins curieux du sujet que de l'exactitude des preuves, ce qui est une amusante opinion.

L'auteur nous propose une charte des droits du Lecteur et affirme d'entrée de jeu que parmi ceux-ci se trouve le droit inaliénable de produire une preuve personnelle de FLT.

Mais ce droit est ensuite encadré par deux articles destinés à en limiter la portée :

> Article 1 : *Aucune preuve de FLT ne doit jamais reproduire une preuve antérieure.*
>
> Article 2 : *Soumettre de fausses preuves de FLT à des professeurs qui gagnent difficilement leur croûte en enseignant comment faire pour les éviter est une offense criminelle.*

L'article 2 pourrait paraître vide de sens si l'on pensait qu'il n'existe pas de professeurs répondant à la description donnée, mais il ne faut pas oublier qu'il y a beaucoup plus de sortes de professeurs dans le monde que dans l'imagination des lecteurs de la Gazette.

Si l'article 1 paraît peu impressionnant, l'article 2 est beaucoup plus contraignant puisqu'il interdit de reproduire la preuve de Wiles et que, si l'on désire produire une preuve inexacte, celle-ci doit être originale. Or on sait que le nombre de preuves inexactes qui ont été proposées dans l'histoire dépasse l'entendement ! Heureusement l'Appendice A donne un certain nombre de références pour celles-ci et constitue une sorte d'ébauche du grand répertoire des preuves inexactes qui serait nécessaire pour donner un sens précis à l'article 2.

Malgré le droit inaliénable qui lui a été généreusement accordé, le pauvre lecteur se trouve donc en situation difficile s'il veut être créatif. Que peut lui apporter ce livre ?

La Préface nous avertit que son but n'est pas de présenter *la* preuve de FLT, mais de donner des exemples de preuves partielles obtenues à l'aide d'arguments strictement élémentaires. Et l'auteur ajoute que « laisser ces pierres précieuses sombrer dans l'oubli serait une erreur impardonnable ». Ce que l'on peut fort bien concevoir, et ceci pour des raisons esthétiques renforcées par le charme nostalgique des paradigmes obsolètes.

En dehors de ce salut élégant à la défunte science établie (antérieure à Wiles), le livre nous indique aussi des chemins à éviter puisque l'auteur affirme que, « aussi loin qu'il puisse voir, les méthodes présentées ici ne conduisent pas à une preuve de FLT » (on aurait aimé savoir pourquoi, mais on ne nous le dira pas dans ce livre). Ce que l'on trouvera en revanche, page 366 dans l'Epilogue, est l'opinion qu'il est « légitime d'essayer de trouver une autre preuve, plus simple que celle de Wiles, pour FLT ».

L'auteur attache donc une importance toute particulière aux preuves élémentaires de résultats partiels et, de ce point de vue, le livre remplit admirablement son objectif (ou presque) car l'auteur possède une érudition considérable et ses démonstrations sont impeccables (à de trop nombreuses erreurs typographiques près, par exemple p. 277 et 278).

Si j'émets une légère réserve concernant les preuves, c'est parce que le souci de l'auteur de ne pas déborder le cadre d'un exposé élémentaire et minimal me laisse souvent sur ma faim.

Par exemple on peut regretter que dans la première partie du chapitre 1 (cas de l'exposant 2 qui remonte à la nuit des temps) l'auteur ne laisse cours à son imagination et ne mentionne pas le lien avec les paramétrisations rationnelles du cercle (ou du groupe orthogonal du plan euclidien). Les lecteurs qui sont des enseignants y trouveraient sans doute matière à développements.

Un autre exemple (parmi beaucoup d'autres) concerne la non existence de solutions polynomiales non constantes et primitives à l'équation de Fermat pour $n \geqslant 3$. Ce sujet n'est qu'effleuré p. 269 et 270 alors qu'il constitue un cas particulier d'un théorème de Mason et Stothers (cité p. 364) que l'on peut démontrer très élémentairement par une méthode qui remonte au moins à Korkine (1880). Par ailleurs le résultat de Korkine (anticipé par Liouville) montre que la courbe de Fermat n'est pas rationnelle pour $n \geqslant 3$, ce qui peut encore intéresser les enseignants qui aiment paramétrer les cubiques.

Comme l'auteur semble souffrir lui-même des limitations qu'il s'impose, il se donne un peu d'oxygène à l'aide de 10 interludes qui constituent une des originalités du livre.

Les interludes sont présentés comme des développements de sujets importants de la théorie des nombres élémentaire destinés à rendre le livre « self-contained ».

Ils sont souvent intéressants car le point de vue est original. Mais parfois (comme dans l'étude des polynômes à coefficients p-adiques) on passe de l'originalité à l'excentricité. En effet les propriétés démontrées ne sont que les propriétés classiques des polynômes à coefficients dans un anneau principal, plus quelques propositions trivialement fausses (propriété (1D) page 146, plusieurs assertions pages 150 et 151). Il est clair que l'auteur n'a rien gagné ici en se plaçant dans ce cadre trop étroit.

De plus les regroupements de sujets paraissent parfois bien artificiels : y a-t-il le moindre rapport entre le résultat quelque peu trivial de Christilles (p. 237) et les courbes de Frey (p. 247) présentées sous le même chapeau ?

Par ailleurs il y a parfois beaucoup d'imprécision dans le propos. Nulle part l'auteur ne prend le soin de définir une courbe elliptique, ce qui ne l'empêche pas d'en parler souvent. On peut regretter que ces imprécisions tournent parfois à l'inexactitude. Ainsi (p. 246) on trouve *deux* (et non pas une seule) courbes elliptiques associées à une solution de l'équation de Fermat d'exposant $2p^h$ et (p. 247) l'assertion sur la finalité de cette construction est absolument erronée. Dans la même page (un peu plus loin) il n'est pas dit non plus que la courbe de Frey est l'une des deux courbes précédentes (choisie pour être semi-stable) lorsque $n = 2p^h$.

Le livre s'achève par un Epilogue adressé aux « lecteurs qui sont encore courageux » et qui présente de manière succincte des résultats *non élémentaires* : théorème de Kummer (pour le cas général), théorème de Wieferich (pour le premier cas), théorème d'Adleman, Heath-Brown et Fouvry (pour le premier cas), théorème de Faltings (pour le cas général), conjecture $.abc/$ et, finalement, le théorème de Wiles (pour le cas général !). On peut encore regretter quelques omissions et imprécisions dans ce chapitre.

Le paragraphe sur le théorème de Faltings aurait pu être l'occasion de présenter une idée très élémentaire beaucoup plus ancienne (antérieure à 1971, voir [H1]) qui est beaucoup plus générale que celle de Christilles et qui conduit aux applications de Granville et Heath-Brown.

Quant aux imprécisions on en trouve encore p. 370 (définition des « nouvelles formes ») et p. 373 où l'absence de définition des courbes elliptiques fait sentir ses inconvénients : peut-on parler *du* point à l'infini s'il y en a plusieurs ?

Il est difficile de conclure au sujet d'un livre dont le projet est aussi ambigu. Présente-t-il les outils qui conduiront à la preuve « différente, plus simple, de FLT » ? On peut en douter. S'agit-il d'archéologie artistique destinée à sauver de l'oubli « d'admirables exemples d'ingéniosité » ? On peut encore en douter. S'agit-il de présenter la preuve de Wiles ? certainement pas !

Il reste que ce livre est éminemment vivant et sympathique et que l'auteur fait preuve d'une érudition remarquable et d'une clarté très agréable.

Remarque. — Je ne pense pas que cet ouvrage puisse être considéré comme un livre d'histoire des mathématiques : l'auteur a ses préférences et ne les cache pas, c'est d'ailleurs ce qui fait le charme de ce livre très personnel. On a déjà noté qu'il ne parle pas de Liouville et de Korkine p. 270, ajoutons qu'il aurait été agréable d'enrichir le chapitre X d'une allusion aux travaux de Conway et Jones [H2] et renvoyons au numéro de la Gazette de juillet 2000 (p. 31 et 32) pour les pages 246 et 247.

Yves Hellegouarch, Université de Caen

Références

[K] J.S. KUHN, *La structure des révolutions scientifiques*, Flammarion, 1983

[E] H.M. EDWARDS, *Fermat's Last Theorem. A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1977

[H1] Y. HELLEGOUARCH, « Sur l'équation diophantienne $x_1^{p^h} + x_2^{p^h} = q^a x_3^{p^h}$ », *Comptes rendus Ac. Sc. Paris*, t. 273, p. 194–1196, 1971

[H2] Y. HELLEGOUARCH et F. RECHER, « Défaut d'additivité des chiffres de Teichmüller, *Comptes rendus Ac. Sc. Paris*, t. 318, p. 401–406, 1994

Duality and Supersymmetric theories
DAVID OLIVE, PETER WEST, éditeurs
Newton Inst. series, Cambridge University Press, Cambridge, 1999. 473 p. ISBN 0-521-64158-6

Les deux éditeurs de cette série de cours de Physique théorique sont spécialistes de systèmes hamiltoniens intégrables et de théorie des cordes pour le premier et de supersymétrie et de théorie quantique des champs pour le second. Ils ont rédigé une introduction historique retraçant le parcours scientifique d'une communauté à forte culture mathématique de la physique théorique des hautes énergies qui l'a conduite des modèles de cordes duales (en 1967 le fait que l'on parlait de cordes n'était pas encore établi et les découvertes de Kac et de Moody encore virtuelles) aux modèles de supercordes en passant par quelques évolutions radicales : en 1973-74 l'acceptation de dimensions supplémentaires de l'espace-temps et surtout un changement d'échelle de 19 ordres de grandeur, en 1977-78 la construction de la théorie de Yang-Mills maximale en dimension 10 et d'une théorie de supergravité maximale en dimension 11 (un temps et dix directions spatiales) qui réalisent les plus grandes supersymétries possibles dans une théorie ayant un nombre fini de champs, en 1984 la restriction à 5 du nombre de modèles de supercordes (avant compactification des dimensions supplémentaires) sans anomalie de jauge et dont la quantification est possible et surtout en 1994-5 la conjecture d'une théorie « M » contenant la supergravité à 11 dimensions comme limite classique si on inclut ses solitons qui ne sont plus des cordes (ou vortex) mais des objets de dimension spatiale 2 ou 5. Une bonne partie de cette communauté s'est impliquée dans l'étude des théories supersymétriques et en particulier dans leur version de jauge les supergravités. Jusqu'en 1984 les succès du modèle dit standard des quarks, des leptons et des interactions faibles et électromagnétiques ont occupé le devant de la scène. Les problèmes des interactions forte et gravitationnelle à savoir le couplage fort à basse énergie et les divergences quantiques ont causé le regain d'intérêt que chacun connaît depuis. Bien sûr les retombées mathématiques plus immédiates ont aussi transformé la sociologie, les technologies et la communication dans ce domaine.

En France il n'existe pas de formation universitaire spécifique et les semestres thématiques et autres Instituts d'été sont très importants pour une éducation réciproque. Ce livre propose 10 cours initialement destinés par des physiciens à d'autres physiciens débutant en recherche.

Le premier thème : Solitons (BPS) et supersymétrie est couvert par N. Manton (espace des modules de solutions multimonopoles des équations self-duales de Yang-Mills/Higgs/Bogomolny/Prasad/Sommerfield) puis de façon plus approfondie par D. Olive (Dualité quantique entre formulations électrique et magnétique, aspects non-perturbatifs rôle de la supersymétrie, brisure de la symétrie continue de dualité en un groupe discret par la quantification) ; J. Gauntlett (approximation de l'espace des modules dans le cas non-abélien général, dualité de Seiberg-Witten pour le cas de la supersymétrie « $\mathrm{N} = 2$ » et réseau de dyons avec charges électriques et magnétiques associé). Enfin T. Eguchi présente les résultats de dualité « $\mathrm{N} = 2$ » qui ont suivi la percée de Seiberg et Witten en 1994 : il s'agit de l'analyse en couplage fort de la théorie de Yang-Mills supersymétrique en supposant l'analyticité maximale en la constante de couplage. L'espace des modules a une structure de Kähler qui permet des déformations quantiques intéressantes (cas non invariant conforme). En fait on trouve des solutions exactes pour des théories quantiques des champs en dimension 4 ! Ce chapitre se termine par une discussion des théories (4d) invariantes conformes pour lesquelles on peut conjecturer une dualité exacte.

Une référence pour certains aspects mathématiques est le livre de Atiyah et Hitchin : *The geometry and dynamics of magnetic monopoles*, on peut avoir besoin aussi d'un ouvrage de base de supersymétrie (ou utiliser le début du cours de P. West, *cf.* ci-dessous).

Le cours de B. Zumino donne quelques bases sur la relation entre supersymétrie et structures kählerienne ou hyperkählerienne qui sont fondamentales pour beaucoup de problèmes mathématiques actuels. Son autre cours avec M. Gaillard fait aussi référence pour la compréhension des symétries noncompactes dans des théories unitaires, celles-ci ont été d'abord comprises en supergravité mais sont maintenant d'usage courant jusqu'en physique des solides.

Le deuxième thème est la supergravité. Le cours de P. West (120 pages) part des superalgègres dites de Poincaré qui contiennent comme sous-algèbre de Lie les symétries de l'espace de Minkowski pour construire les représentations utiles et en particulier les « petites représentations » ainsi appelées car elles apparaissent lorsque la représentation de la superalgèbre de Clifford qui les induisent est dégénérée et donc de dimension plus petite ; c'est le cas pour les particules de masse nulle et pour certaines représentations massives avec charges centrales bien choisies (condition BPS-version fermionique). Les théories avec invariance par supersymétrie locale contiennent la gravitation et son invariance par difféomorphismes ordinaires, ce sont les supergravités elles sont construites par déformation de théories libres à supersymétrie rigide (méthode dite de Noether et comme remarquerait Arnold due à Gupta-Fronsdal-Deser-Ferrara-Freedman-van Nieuwenhuizen…). Les actions de ces théories ne sont en fait invariantes par supersymétrie que modulo les équations du mouvement dans les cas maximaux (Yang-Mills 4d $\mathrm{N} = 4$ et Supergravité 4d $\mathrm{N} = 8$). Ces équations admettent des symétries de dualité exceptionnelles, par exemple dans le deuxième cas (*i.e.* M-GRA=SUGRA $\mathrm{N} = 8$) un groupe $\mathrm{E}_7.7/$ encore surprenant. Le cours se termine par une discussion des p-branes (généralisation des cordes — 1-branes — au cas de p dimensions spatiales) et leurs versions supersymétriques. Le point clef de la discussion est qu'en dimension 11 à savoir la dimension maximale de la M-GRA les solitons sont des 2-branes singulières et des 5-branes régulières, les cordes sont en fait des descendantes des 2-branes lorsqu'une des dimensions spatiales s'enroule sur elle-même et une des dimensions de la 2-brane enroulée également est ainsi cachée aux yeux de l'observateur de basse énergie qui croit vivre à 10 dimensions. Et enfin une première discussion des dualités des théories de supercordes et de la M-théorie qui les unifie entre elles et avec la M-GRA, peut servir de motivation au cours de A. Sen qui suit. Le cours de G. Gibbons traite des solitons dans les théories des champs contenant la gravitation (condition BPS et trous noirs extrêmes, groupes de dualité, instantons (-1-branes) et autres p-branes gravitationnelles). Ce cours est bref et renvoie à une littérature florissante.

Le dernier thème est celui des cordes et de leurs solutions non-perturbatives les D-branes de Polchinski. Ces dernières font l'objet du cours de C. Bachas (D-branes comme bords de cordes ouvertes, leurs charges, tensions et interactions, les actions effectives avec le terme de Dirac-Born-Infeld pour le volume généralisé et le terme de Wess-Zumino pour le couplage à leurs champs de jauge dits de Ramond-Ramond…, les relations de quantification de charge et autres effets topologiques et finalement une discussion des dualités T). Les dualités T méritent un commentaire car elles montrent bien la nature approchée et semi-classique de l'espace-temps : typiquement les théories des cordes sont invariantes par échange d'une coordonnée cyclique et de sa conjuguée cyclique également sur un cercle de rayon inverse dans les bonnes unités. Ceci est le prototype de la symétrie miroir et est perturbatif dans la constante de couplage des cordes mais non perturbatif du point de vue de la théorie conforme bidimensionnelle associée.

On terminera par les monumentales 120 pages de A. Sen qui couvrent la théorie perturbative des cordes en 11 pages avec de nombreuses références, les dualités non perturbatives et leur vérifications au niveau des actions effectives de basse énergie (ce sont des actions de supergravité à 10 dimensions), relations entre dualités perturbatives et non-perturbatives et groupe de U-dualité associé. Puis il généralise les dualités de Seiberg Witten et de Seiberg dans le cas où le nombre de charges de supersymétrie est plus petit, il discute également la théorie F (encore mal comprise car elle n'a pas de modèle F-GRA qui serait une sorte de supergravité avec deux temps et sans « dilatations »). Il conclut l'étude des dualités par une analyse de la théorie M, *i.e.* la version quantique et encore mal définie de la supergravité M-GRA avec ses solitons. Puis il traite d'un des succès récents des D-branes : le calcul microscopique dans des cas limites de l'entropie des trous noirs quantiques (grâce aux supercordes). Le cours et cette revue se terminent par un chapitre sur un candidat pour la théorie M : la théorie des matrices $N \times N$ pour N grand comme discrétisation des 2-branes fondamentales.

Avec 475 pages et beaucoup plus de références le lecteur pourra donc se plonger dans le Far West de la Physique moderne, on peut penser qu'il aura intérêt et plaisir à consulter ses collègues physiciens pour le guider et le protéger. Il y a un côté ruée vers l'or particulièrement saillant actuellement et les difficultés de language et de communication déjà évoquées. Je partage cette exaltation.

Bernard Julia, Laboratoire de physique théorique, ÉNS, Paris

Several Complex Variables

MICHAEL SCHNEIDER, YUM-TONG SIU, éditeurs

MSRI Publications **37**, Cambridge Univ. Press, 1999, 564 p., ISBN 0-521-77086-6

Ce recueil d'articles est dédié à Michael Schneider. Il présente un panorama des mathématiques en plusieurs variables complexes. Il explicite certaines interactions avec la théorie des équations aux dérivées partielles, la géométrie différentielle, la géométrie algébrique et un peu avec la théorie des nombres (dans l'article de Paul Vojta « Nevanlinna Theory and Diophantine Approximation »). La plupart des articles sont généraux et donnent l'historique, l'état actuel et quelques perspectives d'un domaine.

Sans parler de tous, je vais présenter les articles en les regroupant par thèmes.

1) *La géométrie analytique complexe*. — L'article de Frédéric Campana et Thomas Peternell « Recent developments in classification theory of compact kähler Manifolds » donne d'abord la problématique de la théorie de Mori (en particulier le rôle des courbes rationnelles) pour la géométrie projective. Les auteurs développent ensuite des outils de substitution (famille non-scindées de courbes rationnelles) dans le cadre de la géométrie kählérienne générale.

L'article contient aussi une synthèse des résultats de Campana sur les groupes fondamentaux de variétés kählériennes. Des questions voisines sont abordées dans « Rigidity theorems in Kähler geometry and the fondamental groups of varieties » (Domingo Toledo), par la géométrie différentielle et plus précisément par la théorie harmonique.

Comme il est apparu dans l'article de Campana et Peternell, les espaces de cycles donnent un outils pour la classification des variétés. L'article « How to use cycle space in complex geometry » (Daniel Barlet) présente une bonne introduction aux problèmes concernant les espaces de cycles, et en particulier aux questions de transfert de propriétés : quelles propriétés de l'espace X se transmettent à l'espace des cycles sur X ?

À propos maintenant des courbes entières, l'article de Yum-Tong Siu « Recent techniques in hyperbolicity problems », présente les idées et les calculs de l'auteur pour la résolution des conjectures sur l'hyperbolicité dans l'espace $\mathbb{P}^2$.

L'article de Christian Okonek et Andrei Teleman « Recent development in Seiberg-Witten theory and complex Geometry » expose l'évolution de cette théorie. Malheureusement, ni les motivations ni les difficultés ne sont explicitées.

2) *Résolution des singularités*. — La longue introduction avec exemples, remarques et figures de l'article « Resolution of singularities » (Edward Bierstone et Pierre D. Milman) donne un bon aperçu de la nature des problèmes dans ce domaine. La suite est l'explication de leur algorithme de choix des lieux d'éclatement pour rendre lisse un ensemble analytique.

3) *Action de groupe*. — L'article de Peter Heinzner et Alan Huckleberry « Analytic Hilbert quotient » donne des méthodes de construction du quotient d'un espace de Kähler par l'action d'un groupe réductif. Les outils présentés ici viennent de la géométrie symplectique et de l'analyse complexe.

4) *Régularité du* $\bar\partial$ — Les trois articles « Global regularity of the $\bar\partial$Neumann Problem : a survey of the L^2-Sobolev theory » (Harold P. Boas et Emil J. Straube), « Remarks on global irregularity in the $\bar\partial$Neumann Problem » (Michael Christ) et « Subelliptic estimates and finite type » (John P. D'Angelo et Joseph J. Kohn) donnent une vue intéressante et complète des liens pour le système de $\bar\partial$Neumann d'équations aux dérivées partielles entre la régularité (régularité des solutions en fonction de la régularité des données et des conditions au bord), les estimations a priori des dérivées d'ordre supérieur des solutions, et les propriétés de convexité du bord.

Globalement, l'intérêt principal de cet ouvrage est qu'il regroupe de grandes problématiques actuelles, et y ajoute des remarques, des références historiques et des problèmes ouverts. En recoupant plusieurs articles, apparaîssent quelques tendances comme le rôle des techniques de déformation, la géométrie symplectique, l'importance de la recherche des courbes.

Christophe Mourougane, Université Paris 6

On the Local Structure of Morita and Rickard Equivalences between Brauer Blocks
LLUIS PUIG
Progress in Math. **178**, Birkhäuser, Basel, 1999. 261 p. ISBN 3-7643-6156-5

Le sujet de ce livre est la théorie des blocs, qui est l'une des parties principales de la théorie des représentations modulaires des groupes finis. Il y a quatre notions différentes d'équivalences entre blocs et, afin de donner une idée du sujet, il semble souhaitable d'expliquer d'abord ce qu'est une équivalence de Morita, une équivalence de Rickard, une équivalence stable et une équivalence de Puig. Les résultats principaux du livre montrent de combien chaque équivalence est éloignée du quatrième type, qui est l'équivalence la plus forte.

Bien que le lien entre représentations en caractéristique zéro et représentations en caractéristique p soit crucial, nous n'allons considérer, pour simplifier, que des représentations sur un corps K fixé, supposé algébriquement clos. Soit G un groupe fini et KG l'algèbre du groupe. Dans la théorie classique, K est de caractéristique zéro, KG est semi-simple, donc se décompose comme produit d'algèbres de matrices, et par conséquent la catégorie **mod**.KG/ de tous les KG-modules (de dimension finie sur K) est isomorphe à un produit de catégories de modules sur des algèbres de matrices. Chacune d'entre elles est facile à comprendre car il n'y a qu'un seul module simple S (à isomorphisme près) et tout module est isomorphe à une somme directe de copies de S. En fait la catégorie des modules sur une algèbre de matrices est équivalente à la catégorie des K-espaces vectoriels.

Supposons désormais que la caractéristique de K est un nombre premier p. Soit $KG \cong \prod_{j=1}^{m} B_j$ la décomposition la plus fine possible de KG comme produit (qui est unique à isomorphisme près). Chaque algèbre B_j s'appelle une *algèbre de bloc*, ou simplement un *bloc*. On cherche à comprendre la structure de la catégorie $\mathbf{mod}.\mathrm{B}/$ des B-modules, où B est un bloc. Il y a en général une infinité de B-modules indécomposables non isomorphes et $\mathbf{mod}.\mathrm{B}/$ peut être très compliquée. Néanmoins, et c'est là une idée cruciale de la théorie des blocs, on constate que lorsque le groupe G varie (par exemple dans une certaine classe de groupe finis), il y a de nombreux exemples de familles infinies de blocs qui se ressemblent : ils ont par exemple des catégories de modules équivalentes, ou bien ils ont des comportements identiques concernant les valeurs de caractères. En fait, plusieurs notions d'équivalences entre blocs se présentent.

Deux algèbres A et A' sont *Morita équivalentes* si leurs catégories de modules $\mathbf{mod}.\mathrm{A}/$ et $\mathbf{mod}.\mathrm{A}'/$ sont équivalentes. Elles sont *Rickard équivalentes* si leurs catégories dérivées sont équivalentes, où la catégorie dérivée est une certaine catégorie de complexes de modules. Finalement elles sont *stablement équivalentes* si leurs catégories stables sont équivalentes, où la catégorie stable est définie comme le quotient de la catégorie des modules obtenu en annulant tous les modules projectifs. Chaque équivalence implique la suivante. On a des exemples importants d'algèbres de blocs pour lesquelles il y a une équivalence qui ressemble à une équivalence de Morita sauf que des signes apparaissent (un module est envoyé sur une différence de modules) et il s'est avéré qu'il s'agissait d'équivalences de Rickard : la différence de modules doit être interprétée comme la somme alternée des modules apparaissant dans un complexe. Cela explique brièvement pourquoi les équivalences de Rickard se sont imposées en théorie des blocs (cf. [B1], [B2], [Ri], [KZ]). D'ailleurs, l'un des problèmes ouverts les plus intéressants dans le sujet est une conjecture de Broué, qui prédit l'existence d'une certaine équivalence de Rickard pour les blocs à groupe de défaut abélien (cf. [B1], [B2]).

Alors que les trois définitions précédentes valent pour des algèbres quelconques, la notion suivante d'équivalence, qui est la plus forte, n'a un sens que pour les blocs, car elle fait intervenir la structure de groupe. Il nous faut tout d'abord introduire les algèbres de source. Un premier invariant qui mesure la complexité d'un bloc de KG est son *groupe de défaut*, introduit par Richard Brauer dans les années cinquante, et qui est un p-sous-groupe de G (unique à conjugaison près). L'invariant suivant est *l'algèbre de source* du bloc, qui est unique à isomorphisme près, et qui est une algèbre de dimension finie dans laquelle le groupe de défaut P est plongé (si bien qu'en particulier P agit sur l'algèbre de source par conjugaison). Cet invariant a été introduit par Lluis Puig il y a vingt ans (cf. [P1] ainsi que le livre [Th]). L'algèbre de source est une sous-algèbre de l'algèbre du groupe KG (avec un autre élément unité), mais l'idée principale est que G a disparu et que seule de l'information p-locale (c'est-à-dire concernant les p-sous-groupes) subsiste dans l'algèbre de source. Un bloc est Morita équivalent à son algèbre de source et de plus tous les invariants p-locaux du bloc qu'on est capable de définir peuvent être détectés dans son algèbre de source. Ainsi l'algèbre de source reflète fidèlement la structure du bloc.

Deux blocs sont appelés *Puig équivalents* s'ils ont même groupe de défaut et des algèbres de source isomorphes. La question de la classification des blocs à équivalence de Puig près (c'est-à-dire la classification des algèbres de source possibles pour un groupe de défaut donné) est une question difficile qui est loin d'être résolue. Beaucoup de propriétés des algèbres de source sont connues mais elle ne suffisent pas à les caractériser (cf. [Th] pour une introduction). Une conjecture de Puig affirme que, pour un groupe de défaut P donné, il n'y a qu'un nombre fini d'algèbres de source possibles, donc un nombre fini de classes d'équivalences de Puig pour les blocs de groupe de défaut P. Pour les blocs avec un groupe de défaut cyclique, la conjecture de Puig a été récemment démontrée par M. Linckelmann [L1], à l'aide de théorèmes de structure obtenus par E.C. Dade il y a plus de 30 ans. La structure des algèbres de source a aussi été décrite lorsque le groupe de défaut est un groupe de Klein [L2], lorsque le bloc est nilpotent [P2] (cf. aussi [Th]), lorsque le groupe est p-résoluble, et pour certains blocs de groupes de Chevalley [P3]. Des formes plus faibles de la conjecture de Puig ont aussi été démontrées, par exemple pour les blocs des groupes p-résolubles seulement, ou pour les groupes symétriques seulement [P4].

Pour les algèbres de bloc, nous avons ainsi quatre types d'équivalences, chacune impliquant la suivante : l'équivalence de Puig, l'équivalence de Morita, l'équivalence de Rickard et l'équivalence stable. Il y a des exemples importants de paires de blocs pour lesquelles on sait que seule la seconde, ou la troisième, ou la quatrième équivalence est vérifiée. On est donc amené à se demander de combien chacun de ces cas est éloigné du tout premier, qui est le plus exigeant.

Le livre de L. Puig répond à cette question en montrant comment mesurer la distance qui sépare une équivalence de Morita (ou une équivalence de Rickard, ou une équivalence de Morita stable) et une équivalence de Puig. Un peu plus précisément, l'algèbre de source de l'un des blocs est obtenue à partir de l'algèbre de source d'un bloc équivalent et d'invariants provenant de l'équivalence elle-même (une équivalence de Morita est obtenue en tensorisant par un bimodule, une équivalence de Rickard en tensorisant par un complexe de bimodules et une équivalence de Morita stable, par définition, en tensorisant par un bimodule). Dans le cas d'une équivalence de Rickard, il est nécessaire de considérer des DG-modules au lieu de KG-modules, où D est une algèbre dans laquelle est encodée à la fois la graduation des complexes et la différentielle entre les termes successifs de la graduation.

Les énoncés précis des résultats sont trop techniques pour être donnés explicitement et bien sûr ils dépendent du type d'équivalence qui entre en jeu. L'idée principale est de plonger l'une des algèbres de source dans une algèbre construite à partir de l'autre algèbre de source. La construction comprend entre autres une notion générale d'induction d'algèbres, qui fonctionne pour un homomorphisme arbitraire de groupes $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ plutôt que pour une inclusion $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$. Dans le cas d'une équivalence de Morita (stable), la construction utilise aussi le produit tensoriel avec l'algèbre d'endomorphismes d'un certain module N (une source du bimodule qui induit l'équivalence). En fait, le module N s'avère être un module d'endo-permutation dans un cas spécial d'équivalence, appelée équivalence *basique*, qui est apparemment le cas le plus commun. Dans le cas d'une équivalence de Rickard, tout ceci fonctionne aussi mais une autre construction remplace celle du module N.

Comme conséquence des résultats, l'auteur montre que deux blocs sont Puig équivalents si et seulement s'ils sont Morita équivalents à l'aide d'un bimodule qui est facteur direct d'un module de permutation (appelé module de source triviale), et aussi qu'un bloc qui est (stablement) Morita équivalent à un bloc nilpotent doit être à nouveau nilpotent.

Le style du livre est celui d'un long article de recherche. Ce n'est pas un traité qui expose le sujet ou qui fournit un compte rendu de travaux récents dans le domaine. C'est un livre basé sur les articles précédents de l'auteur, si bien que la lecture demande une bonne connaissance du travail de Puig ainsi que quelques idées sur les travaux d'autres auteurs, au moins pour la motivation. Des idées générales, des résultats préliminaires et des motivations concernant le sujet du livre, en particulier sur les méthodes, sont assez bien expliquées dans l'introduction, où on peut aussi trouver le lien avec certains travaux récents d'autres mathématiciens.

Jacques Thévenaz, Université de Lausanne

Références

[B1] M. BROUÉ, « Equivalences between block algebras : an introduction », in *Finite dimensional algebras and related topics*, Kluwer Academic, Dordrecht, Netherlands, 1994, p. 1–26.

[B2] M. BROUÉ, « Rickard equivalences and block theory », in *Groups '93 Galway - St. Andrews*, London Math. Soc. Lecture Notes Series **211**, Cambridge Univ. Press, 1995, p. 58–79.

[KZ] S. KÖNIG et A. ZIMMERMANN, *Derived equivalences for group rings*, Lecture Notes in Math. **1685**, Springer Verlag, Berlin, 1998.

[L1] M. LINCKELMANN, « The isomorphism problem for cyclic blocks and their source algebras », *Invent. Math.* **125** (1996), p. 265–283.

[L2] M. LINCKELMANN, « The source algebras of blocks with a Klein four defect group », *J. Algebra* **167** (1994), p. 821–854.

[P1] L. PUIG, « Pointed groups and construction of characters », *Math. Z.* **176** (1981), p. 209–216.

[P2] L. PUIG, « Nilpotent blocks and their source algebras », *Invent. Math.* **93** (1988), p. 77–116.

[P3] L. PUIG, « Algèbres de source de certains blocs des groupes de Chevalley », *Astérisque* **181-182** (1990), p. 221–236.

[P4] L. PUIG, « On Joanna Scopes' criterion of equivalence for blocks of symmetric groups », *Algebra Colloq.* **1** (1994), p. 25–55.

[Ri] J. RICKARD, « Splendid equivalences : Derived equivalences and permutation modules », *Proc. London Math. Soc.* **72** (1996), p. 331–358.

[Th] J. THÉVENAZ, *G-algebras and modular representation theory*, Oxford Math. Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1995.