

Lichnérowicz et la relativité générale

Yvonne CHOQUET-BRUHAT

Je n'étais encore qu'une lycéenne quand j'entendais mon père faire l'éloge d'un jeune mathématicien, André Lichnérowicz, qui alliait à ses dons mathématiques un sens profond de la physique et de remarquables qualités pédagogiques. Fils unique de brillants parents, un père littéraire secrétaire général de l'alliance française et une mère sévrienne mathématicienne, André Lichnérowicz était un homme d'une vaste culture, intéressé tout au long de sa vie par les problèmes les plus variés, scientifiques ou philosophiques et par leur impact sur le monde où nous vivons. Son esprit était brillant, clair, rapide et d'une activité inlassable. Grand intellectuel, Lichnérowicz était aussi très humain. Il avait un vif désir de communiquer ses idées et une sûre fidélité à ses amis. Lichnérowicz se considérait comme responsable de tous ceux qui avaient été ses élèves — et il en a eu beaucoup. Il leur portait un soutien indéfectible, particulièrement quand ils avaient des difficultés professionnelles ou privées. Lichnérowicz savait choisir pour chacun un sujet de thèse approprié à ses goûts et ses capacités, sujet qui lui permettrait de façon presque certaine, encouragé et aidé autant que nécessaire, d'obtenir le diplôme recherché. Cette diversité de choix offerte par Lichnérowicz à ses élèves venait de la variété de ses propres intérêts. Je ne parlerai que des travaux de Lichnérowicz en relativité générale, d'autres plus compétents rapportent sur d'autres domaines.

La première et fondamentale, contribution de Lichnérowicz à la relativité générale a été d'y apporter dès 1939, dans sa thèse soutenue sous la direction de Georges Darmois, le point de vue de la géométrie différentielle globale : tout modèle relativiste est une variété différentiable munie d'une métrique de signature hyperbolique vérifiant sur cette variété les équations d'Einstein, avec ou sans sources. Il a explicité dans le cadre général approprié les conditions de raccordement données par G. Darmois dans des coordonnées particulières : ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une métrique soit une solution classique globale des équations d'Einstein avec second membre éventuellement discontinu. La méthodologie de Lichnérowicz a été utilisée dans la construction de nombreux modèles et a pu être étendue sans réelle difficulté aux solutions faibles dont la conception s'est développée plus tard.

Le point de vue global adopté par Lichnérowicz lui a permis dès 1939 de démontrer dans toute sa généralité un résultat fondamental obtenu dans des cas particuliers par Einstein et Pauli et lui a valu l'admiration de ceux-ci : Lichnérowicz a établi, grâce à sa maîtrise du calcul tensoriel deux identités fondamentales qui lui ont permis de montrer qu'il n'existe pas de soliton gravitationnel, c'est-à-dire de solution stationnaire non triviale (i.e, à courbure non nulle) des équations d'Einstein du vide sur une variété du type $S \times R$ où S est spatiale et soit asymptotiquement euclidienne soit compacte. Lichnérowicz a étendu ce résultat, avec son élève Y. Thiry, à la théorie unitaire pentadimensionnelle (groupe de jauge $U(1)$) dans le cas — comme il l'a souligné lui-même où le fibré en cercles est trivial. Quelques trente ans plus tard E. Witten a

construit un contre-exemple dans le cas où ce fibré n'est pas trivial. Il a fallu attendre cette dernière décade pour montrer qu'il existe des solitons quand le groupe de jauge n'est pas abélien.

Les équations d'Einstein sont invariantes par difféomorphismes, comme pour les théories de jauge leur intégration se décompose en un problème d'évolution et un problème des contraintes, contrainte dite hamiltonienne et contrainte de moment, équations qui doivent être satisfaites par les données initiales. En 1944 Lichnérowicz a utilisé la relation entre les courbures scalaires de deux métriques conformes pour transformer la contrainte de moment en un système linéaire indépendant du facteur de conformité quand la variété initiale est une sous variété maximale de l'espace-temps et la contrainte hamiltonienne en une équation elliptique semi-linéaire pour le facteur de conformité : cette équation, appelée depuis équation de Lichnérowicz, joue toujours un rôle essentiel dans la résolution du problème des contraintes.

Par la suite jusque vers les années 70 et plus épisodiquement plus tard, Lichnérowicz s'est attaqué à la plupart des problèmes fondamentaux liés à la relativité générale. Il en a donné un traitement systématique, sans être rebuté par des calculs parfois très lourds. Il a publié des rédactions lucides et détaillées, incluant des contributions de ses élèves, qui ont souvent servi de base aux travaux ultérieurs. Lichnérowicz s'est intéressé tout au long de sa carrière à la représentation des sources matérielles en relativité. Il a été le premier à obtenir en 1940, en collaboration avec R. Marrot, une formulation mathématique cohérente de la théorie cinétique relativiste. Il a dès les années 50 trouvé les bonnes extensions de divers théorèmes généraux de la mécanique des fluides classique. Dans les années 70, à l'occasion de cours au Collège de France et aux États Unis, il a repris des travaux sur l'hydrodynamique et la magnétohydrodynamique relativiste, y incluant des considérations thermodynamiques dues à Taub et Pichon. Son étude originale des ondes de choc en magnétohydrodynamique représente un travail considérable. Comme beaucoup d'autres travaux de Lichnérowicz il aboutit après des calculs très complexes où d'autres se seraient perdus, à des conclusions claires, physiquement significatives.

Je citerai maintenant les travaux de Lichnérowicz sur la radiation gravitationnelle, les champs spinoriels, la quantification des champs sur un espace temps courbe, prélude à ses travaux ultérieurs sur la quantification liée à la théorie des déformations.

Dans un mémoire de plus de cent pages paru en 1960 Lichnérowicz donne une étude théorique complète d'abord de la radiation électromagnétique sur un espace temps courbe, puis de ce qu'il convient d'appeler radiation gravitationnelle, liée au tenseur de courbure, enfin du couplage de ces deux quantités. Cet article comme beaucoup d'autres du même auteur est resté une référence de base utilisée dans les développements ultérieurs sur le sujet.

Dans son article sur la radiation gravitationnelle Lichnérowicz se préoccupait déjà de quantification. Dans un autre important article publié en 1964 dans les annales de l'I.H.E.S. il introduit des propagateurs tensoriels qui généralisent à un espace temps courbe le propagateur de Jordan Pauli. Il les utilise à la construction du commutateur quantique sur un espace temps courbe d'abord du champ électromagnétique puis de la variation du champ gravitationnel. Ce travail est un grand classique et contient de nombreux résultats intermédiaires

qui ont été utilisés à maintes reprises. Il introduit en particulier les équations dites d'ordre supérieur. Ces équations et le tenseur de Bel, étudié par Luis Bel dans sa thèse, sont fondamentaux pour les estimations a priori utilisées ces dernières années dans la recherche de solutions globales dans le temps. Les beaux travaux de Lichnérowicz sur la quantification des champs bosoniques sur un espace temps courbe l'ont naturellement conduit au problème de la quantification des champs spinoriels sur de tels espaces temps. Dans deux longs articles parus en 1964 et 1965 Lichnérowicz met sur pied de façon complète la théorie des spineurs sur une variété pseudo riemannienne. Il donne la définition intrinsèque des opérateurs d'usage courant en physique, conjugaison de charge et adjonction de Dirac. Les formules qu'il a établies ont été essentielles pour l'aboutissement des théories de supergravité. Les importantes contributions de Lichnérowicz à la géométrie riemannienne liées à la théorie des spineurs ont été signalées dans l'article de M. Berger. Le dernier article de Lichnérowicz, paru quelques semaines avant sa mort traitait de l'opérateur de Dirac sur une variété Kählerienne.

Lichnérowicz a fondé en 1957, avec l'américain J. A. Wheeler et le russe V. Fock, la société *Relativité générale et gravitation*. C'était à l'origine une sorte de club comportant un relativement petit nombre de membres qui se réunissait en un congrès tous les deux, puis tous les trois ans. Il régnait entre les relativistes une atmosphère conviviale et chaleureuse, comme toujours dans l'entourage de Lichnérowicz. Depuis ces lointains débuts les domaines physiques et mathématiques en interaction avec la relativité générale se sont multipliés et le nombre des relativistes a considérablement augmenté. Cependant les points de vue de géométrie différentielle globale introduits par Lichnérowicz sont adoptés par tous et son nom toujours cité avec admiration.