Les travaux de Curtis McMullen

A. DOUADY & J.-P. OTAL
(*Université Paris-sud – ENS Lyon*)

Curtis McMullen est né en mai 1958. Il a apporté des contributions importantes à des branches diverses de la théorie des systèmes dynamiques, comme l'étude algorithmique des équations polynomiales [DMcM], l'étude de la répartition des points d'un réseau d'un groupe de Lie [EMcM], la géométrie hyperbolique, la dynamique holomorphe et la renormalisation des applications de l'intervalle. Ici, on ne fera qu'évoquer ses travaux dans ces trois dernières branches. On peut les diviser selon les deux parties qui apparaissent déjà dans la démonstration du théorème d'hyperbolisation des variétés de dimension 3 de Thurston. Dans §1, on expliquera en quoi McMullen a donné une autre démonstration de ce théorème pour les variétés qui ne fibrent pas sur le cercle : il s'agit là essentiellement de théorie de Teichmüller classique. Dans §2, on verra comment sa compréhension personnelle du théorème d'hyperbolisation dans le cas des variétés fibrées lui a permis d'introduire un point de vue nouveau sur la renormalisation des fonctions unimodales de l'intervalle qui a conduit en particulier au théorème de convergence exponentielle pour l'opérateur de renormalisation. A la géométrie hyperbolique, se rattache aussi le théorème « Cusps are dense », qu'on évoquera dans §3.

Curtis McMullen

Dans tous ses travaux on voit McMullen, confronté à des problèmes d'analyse difficiles, dégager des concepts, qui souvent paraissent très naturels après coup, mais qui permettent de placer le problème dans une situation où il reçoit une démonstration directe. Dans §1, nous verrons ainsi apparaître la notion de *revêtement moyennable*, ainsi qu'une topologie sur l'ensemble des formes quadratiques holomorphes sur toutes les surfaces de Riemann, qui en fait un espace compact. Au §2, ce sera la notion d'*inflexibilité* (variante quantitative de celle de rigidité), celle de *points profonds* et d'*ensemble sans profondeur* (shallow), avec sa variante relative à une mesure qui rappelle les points de densité de Lebesgue, la construction de *tours de renormalisation* (avec une topologie sur l'ensemble de ces tours), la notion de *twist uniforme*.

Les exposés de McMullen présentent souvent une réorganisation passionante d'un sujet (voir par exemple les monographies [McM1], [McM2], l'exposé [McM3], ou le récent [McM4]).

I. Hyperbolisation des variétés non fibrées et opérateur Θ

En 1977, Thurston a annoncé son théorème d'hyperbolisation des variétés de dimension 3. Ce théorème affirme que si une variété compacte N de dimension 3 (éventuellement à bord) est *irréductible* (i.e. toute 2-sphère plongée dans N borde une 3-boule) *atoroïdale* (i.e. le groupe fondamental $\pi_1(N)$ ne contient pas de sous-groupes isomorphes à $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$) et *suffisamment grande* (N contient une surface proprement plongée S de caractéristique d'Euler strictement négative dont le groupe fondamental s'injecte dans $\pi_1(N)$), alors N est *hyperbolique*, c'est-à-dire que l'intérieur de N est homéomorphe au quotient de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ par un groupe Kleinien convexe cocompact. La troisième hypothèse est fondamentale pour la démonstration. En effet en découpant N le long de S, on obtient une variété compacte à bord M dont la topologie est « plus simple » que celle de N : on peut alors essayer de démontrer le théorème d'hyperbolisation par récurrence sur un entier qui mesure cette complexité topologique. Comme fréquemment en topologie de dimension 3, il apparaît alors une dichotomie selon que N est fibrée sur le cercle ou pas. Le cas fibré servira de fil directeur dans le paragraphe II et nous n'en parlerons pas ici ; mais on peut signaler que dès le début, sa démonstration fut mieux admise [Su1], [Thu2]. Considérons le cas non-fibré. Par construction, N est homéomorphe au quotient M/τ de M par une involution $\tau : \partial M \to \partial M$ qui renverse l'orientation. Par récurrence, on suppose que M est hyperbolique. La théorie d'Ahlfors-Bers permet alors de paramétrer toutes les structures hyperboliques (convexes cocompactes) sur M par $\mathcal{T}(\partial M)$, *l'espace de Teichmüller de* ∂M. Thurston a montré, sous l'hypothèse que N n'est pas fibrée, comment la construction d'une métrique hyperbolique sur N se ramenait à trouver un point fixe pour une certaine application $F : \mathcal{T}(\partial M) \to \mathcal{T}(\partial M)$; l'application F est la composée $\tau^* \circ \sigma$, où $\tau^* : \mathcal{T}(\partial M) \to \mathcal{T}(\overline{\partial M})$ est l'action induite par le difféomorphisme τ (on note $\mathcal{T}(\overline{\partial M})$ l'espace de Teichmüller de $\overline{\partial M}$, la surface ∂M munie de l'orientation opposée à celle de ∂M) et σ

est *l'application d'épluchage* (skinning map), dont la définition est assez technique. L'existence de ce point fixe représente vraiment le cœur du théorème d'hyperbolisation ; Thurston en offrit la démonstration sous la forme d'un puzzle dont les pièces sont contenues dans une série d'articles pas toujours publiés ([Thu2], [Thu3], [Thu4], voir aussi [Mo]). Aussi, la parution des articles [McM5] et [McM6] qui redémontraient l'existence du point fixe fut un soulagement pour de nombreux topologues qui avaient utilisé le théorème d'hyperbolisation.

Dans sa démonstation, Thurston montrait que l'orbite $F^n(s)$ d'un point quelconque $s \in \mathcal{T}(\partial M)$ est bornée. L'existence d'un point fixe pour F découle alors du fait que F diminue strictement la distance de Teichmüller : en effet c'est une fonction holomorphe et la distance de Teichmüller coïncide avec la distance de Kobayashi.

Peu après les premiers exposés de Thurston, John Hamal Hubbard proposa, pour établir l'existence d'une point fixe pour F, de montrer autrement que F contractait uniformément la distance de Teichmüller en raisonnant d'un point de vue infinitésimal. Remarquons d'abord que, comme τ^* est une isométrie, les propriétés de contraction de $F = \tau^* \circ \sigma$ proviennent de σ. Maintenant, l'espace cotangent à l'espace de Teichmüller au point X s'identifie à l'espace des différentielles quadratiques holomorphes intégrables sur X ; la distance de Teichmüller est finslérienne avec pour conorme la norme L^1 sur les différentielles. Hubbard observa alors que dans cette identification, la codérivée de σ s'exprime comme une combinaison barycentrique d'opérateurs Θ de Poincaré (voir plus loin) et fit ainsi le lien entre l'existence d'un point fixe pour F et une conjecture de Irving Kra en Théorie de Teichmüller. Il fallut 10 ans à cette idée pour aboutir : dans [McM5] McMullen démontre une version généralisée de la conjecture de Kra et dans [McM6], il montre comment en déduire l'existence d'un point fixe pour F, simplifiant d'une manière considérable la preuve originelle.

Opérateurs Θ

Soit Z une surface de Riemann de caractéristique d'Euler strictement négative. Notons $\mathcal{Q}(Z)$ l'espace des différentielles quadratiques holomorphes intégrables sur Z que l'on munit de la norme L^1. Soit $\pi : Y \to X$ un revêtement de surfaces de Riemann (par exemple le revêtement universel $\mathbb{D}^2 \to X$). A $\varphi \in \mathcal{Q}(Y)$, on associe un élément $\Theta_{Y/X}\varphi$ de $\mathcal{Q}(X)$ de la manière suivante. Si $U \subset X$ est un ouvert connexe au-dessus duquel Y est un revêtement trivial, pour chaque composante connexe V_i de $\pi^{-1}(U)$ on a une section $s_i : U \to V_i$. Alors $\psi_U = \sum s_i^* \varphi$. On vérifie facilement que ψ est une forme quadratique holomorphe intégrable sur X et que $||\psi||_{L^1} \leqslant ||\varphi||_{L^1}$.

L'opérateur $\Theta_{Y/X} : \varphi \to \psi$ de $\mathcal{Q}(Y)$ dans $\mathcal{Q}(X)$ ainsi défini est appelé *l'opérateur de Poincaré associé au revêtement* $Y \to X$. On a :

$||\Theta_{Y/X}|| \leqslant 1$. Cet opérateur s'interprête comme la codérivée au point X de l'application $\pi^* : \mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(Y)$ induite par π qui relève la structure de surface de Riemann. C'est dans ce contexte que Kra avait formulé la conjecture suivante :

Conjecture de Kra. — *Soit X une surface de Riemann hyperbolique de volume fini. Alors l'opérateur Θ associé au revêtement universel est contractant : on a $||\Theta_{\mathbb{D}/X}|| < 1$.*

Voici la motivation initiale pour cette conjecture : l'application de relèvement $\pi^* : \mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(Y)$ contracte la distance de Teichmüller. Autrement dit, soit f un homéomorphisme quasi-conforme entre deux surfaces de Riemann X et X' qui est *extrémal* au sens de Teichmüller (i.e. sa constante de distortion est égale à $d(X, X')$). Alors f se relève en une application quasi-conforme $\tilde{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ qui se prolonge en un certain homéomorphisme quasi-symétrique du bord $\partial\mathbb{D}$. La véracité de la conjecture de Kra a pour conséquence que $\tilde{f}$ n'est jamais *extrémal*, c'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme quasi-conforme de $\mathbb{D}$ avec le même prolongement au bord que $\tilde{f}$ mais avec une constante de distortion strictement inférieure à celle de f.

McMullen s'est attaqué à cette conjecture en la situant dans un cadre beaucoup plus général que celui du revêtement universel. Il a dégagé la notion de *moyennabilité* pour un revêtement d'espaces connexes $\pi : Y \to X$, une notion de type combinatoire que nous allons expliquer maintenant. L'application de revêtement π définit une inclusion de $\pi_1(Y)$ dans le groupe $\pi_1(X)$ (que nous supposerons de type fini) ; soit $\mathcal{G}$ est un système fini de générateurs de $\pi_1(X)$. On considère alors un graphe dont les sommets correspondent aux classes de $\pi_1(X)/\pi_1(Y)$ et où on joint deux classes $x\pi_1(Y)$ et $y\pi_1(Y)$ par une arête lorsqu'il existe $g \in \mathcal{G}$ tel que $gx\pi_1(Y) = y\pi_1(Y)$. On dit alors que le revêtement π est *moyennable* ou *non-moyennable* selon que ce graphe est moyennable ou pas (pour un graphe, la non-moyennabilité équivaut à l'existence d'une inégalité isopérimétrique linéaire). On peut voir que cette propriété ne dépend *que* du revêtement et non du système de générateurs $\mathcal{G}$ choisi.

Théorème 1 [McM5]. — *Soit X une surface de Riemann hyperbolique de type fini et $\pi : Y \to X$ un revêtement. Alors $||\Theta_{Y/X}|| < 1$ si et seulement si le revêtement est non-moyennable.*

Le revêtement universel d'une surface de type topologique fini est non moyennable et donc la conjecture de Kra est un cas particulier du théorème ci-dessus. Plus généralement, tout revêtement « géométrique » est non-moyennable (on dit qu'un revêtement est *géométrique* lorsque $\pi_1(Y)$ est un sous-groupe propre de $\pi_1(X)$ et est égal au groupe fondamental d'une sous-surface de X).

Signalons aussi que le Théorème 1 se généralise à l'opérateur Θ agissant sur les formes automorphes de poids quelconque et aussi lorsque X est quotient d'un domaine de $\mathbb{C}^n$ [McM5, Théorème 12.1].

Les revêtements non moyennables sont particulièrement importants du fait que les opérateurs Θ qui apparaissent dans la formule pour la codérivée de σ sont tous associés à des revêtements géométriques. La démonstration du Théorème 1 donnée dans [McM5] est particulièrement élégante et autonome et on ne peut qu'en conseiller la lecture. Toutefois, pour l'application au théorème d'hyperbolisation, un contrôle plus précis de la norme de $\Theta_{Y/X}$ est nécessaire : le type topologique du revêtement $Y \to X$ étant fixé, on sera amené à considérer $||\Theta_{Y/X}||$ comme une fonction du point X dans son espace de Teichmüller $\mathcal{T}(X)$. Pour aborder ce problème, McMullen introduit un nouvel outil en munissant l'ensemble des différentielles quadratiques holomorphes sur toutes les surfaces de Riemann de complexité topologique bornée, d'une topologie qui en fait un espace (projectivement) compact.

Limites géométriques de différentielles quadratiques

Soit X une surface de Riemann avec une métrique complète de courbure constante $\kappa \in [-1, 0]$ dans la classe conforme et $x \in X$ un point où le rayon d'injectivité de X est supérieur à 1. Il est classique que l'espace des couples (X, x) ci-dessus muni de la « topologie géométrique » (la topologie de Hausdorf-Gromov sur les espaces métriques pointés) est compact. On y voit par exemple le phénomène classique de convergence des surfaces de courbure -1 vers une surface de genre inférieur lorsqu'un nombre fini de courbes simples sont « pincées » ; mais on peut voir une suite de surfaces compactes converger vers un cylindre plat, ou encore vers un plan euclidien. En fait, si on considère le sous-ensemble $\mathcal{X}_{g,n}$ où X est un plan euclidien ou un cylindre euclidien, ou est conformément équivalente au complémentaire de n' points dans une surface compacte de genre g', $n' \leqslant n$ et $g' \leqslant g$, alors $\mathcal{X}_{g,n}$ est compact. Soit maintenant $\mathcal{Q}_{g,n}$ l'ensemble des triplets $(\varphi, X, x,)$ avec $(X, x) \in \mathcal{X}_{g,n}$ et où φ est une différentielle quadratique non nulle sur X : notons $P\mathcal{Q}_{g,n}$ l'espace projectif sur $\mathcal{Q}_{g,n}$, quotient de $\mathcal{Q}_{g,n}$ où l'on a identifié les différentielles proportionnelles (φ, X, x) et $(c\varphi, X, x)$. On munit alors $P\mathcal{Q}_{g,n}$ de la topologie géométrique pour laquelle une suite (φ_i, X_i, x_i) converge vers (φ, X, x) si (X_i, x_i) converge vers (X, x) dans $\mathcal{X}_{g,n}$ et si dans chaque carte holomorphe U de X, l'expression locale de φ_i dans les cartes voisines U_i pour X_i converge vers celle de φ dans U. McMullen montre alors :

Théorème 2. — *L'espace $P\mathcal{Q}_{g,n}$ est compact.*

Autrement dit, étant donnée une suite (φ_i, X_i, x_i) dans $\mathcal{Q}_{g,n}$ quitte à extraire une sous-suite, il existe une suite de nombres complexes c_i telle que $(c_i\varphi_i, X_i, x_i)$ converge. La propriété importante est que la différentielle quadratique holomorphe limite φ n'est pas nulle. La démonstration de ce théorème procède comme suit : une fois admise la compacité de $\mathcal{X}_{g,n}$, on exhibe une suite particulière (ψ_i, X_i, x_i) convergente, en utilisant des propriétés de continuité de l'opérateur Θ. On considère alors le quotient $f_i = \varphi_i/\psi_i$: c'est une fonction méromorphe sur X_i ; puisque le genre et le nombre de pointes des surfaces X_i est borné, le degré de f_i est borné. La convergence des fonctions f_i, après éventuellement multiplication par une constante découle alors du théorème de Montel.

Il est remarquable comment cette topologie très naturelle sur $\mathcal{Q}_{g,n}$ se révèle être un outil efficace. La version quantitative évoquée ci-dessus du Théorème 1 concerne la fonction $||\Theta_{Y/X}||$ vue comme fonction de X dans son espace de Teichmüller. Par définition de Θ, $||\Theta_{Y/X}||$ ne dépend que de la position de X dans l'espace modulaire et c'est aussi une fonction continue de X. Donc si, pour une suite X_n, $||\Theta_{Y_n/X_n}||$ tend vers 1, la suite X_n tend vers l'infini dans l'espace modulaire. On sait alors que le rayon d'injectivité de X_n tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$ une constante inférieure à la constante de Margulis ; la partie ε-mince $X_n^{]0,\varepsilon]}$ est l'ensemble des points où le rayon d'injectivité est inférieur à ε ; la partie ε-épaisse est le complémentaire de $X_n^{]0,\varepsilon]}$ et on la note $X_n^{[\varepsilon,\infty[}$. McMullen définit alors pour un revêtement $\pi : Y_n \to X_n$ *la partie ε-moyennable* Y'_n comme la réunion de la préimage $\pi^{-1}X_n^{]0,\varepsilon]}$ et des relevés des composantes de $X_n^{[\varepsilon,\infty[}$ qui se relèvent. Il montre alors une version « quantitative » du Théorème 1.

Théorème 3. — *Soit $\varphi_n \in \mathcal{Q}(Y_n)$, avec $||\varphi_n|| = 1$ une suite telle que $||\Theta_{Y_n/X_n}\varphi_n|| \to 1$. Alors la masse de φ_n se concentre sur la partie moyennable : $\int_{Y'_n} |\varphi_n| \to 1$.*

Cette version précise de la contraction de Θ est le point de départ de la démonstration de l'existence d'un point fixe dans [McM6].

II. Variétés hyperboliques fibrées sur le cercle et renormalisation

Soit N une variété fibrée sur le cercle avec pour fibre une surface S de caractéristique d'Euler stictement négative : il existe alors un difféomorphisme ψ de S tel que N soit difféomorphe au quotient N_ψ du produit $S \times [0,1]$ par la relation qui identifie les points $(x,1)$ et $(\psi(x),0)$. Pour les variétés fibrées sur le cercle, le théorème d'hyperbolisation se ramène à l'énoncé suivant : N_ψ est hyperbolique si et seulement si ψ est pseudo-Anosov ([FLP]). Pour montrer que N_ψ est hyperbolique, il suffit de trouver une représentation de $\pi_1(N_\psi)$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, le groupe des isométries de $\mathbb{H}^3$, qui soit fidèle et (d'image) discrète. Soit $\mathcal{DF}(S)$ l'espace des classes de conjugaison de représentations fidèles et discrètes de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$; notons ψ_* l'action induite par ψ sur $\mathcal{DF}(S)$. On voit alors facilement que hyperboliser N_ψ revient à trouver un point fixe de ψ^* dans $\mathcal{DF}(S)$ (lorsque ψ est pseudo-Anosov). On sait par le théorème de rigidité de Mostow que le point fixe ρ_ψ de ψ^* (donné par Thurston) est unique. La contribution de McMullen à ce sujet se situe surtout dans l'étude de l'action de ψ^* sur $\mathcal{DF}(S)$. En utilisant sa notion d'*inflexibilité*, il obtient une description précise de la dynamique de ψ^* sur $\mathcal{DF}(S)$. Cette application présente des propriétés d'hyperbolicité : le point fixe ρ_ψ a une variété stable, que McMullen caractérise, et pour tout point de la variété stable l'orbite tend vers ρ_ψ exponentiellement vite [McM2, Théorème 3.17].

Applications unimodales de l'intervalle et dynamique holomorphe

Un thème récurrent en systèmes dynamiques est celui de la rigidité : comprendre comment la description topologique ou combinatoire d'un système le caractérise aussi dans une classe plus riche. C'est le cas de l'étude de la régularité de la conjugaison des difféomorphismes du cercle à des rotations : un difféomorphisme C^∞ f conjugué topologiquement à la rotation R_α d'angle α où α vérifie une condition Diophantienne, est conjugué C^∞ à R_α (Hermann, Yoccoz). C'est le cas du théorème de rigidité de Mostow : pour $n \geqslant 3$, la donnée d'un sous-groupe Γ co-compact de $SO(n,1)$ comme groupe abstrait, détermine le plongement de Γ dans $SO(n,1)$. Pour les applications de l'intervalle dans lui-même, des physiciens avaient observé un phénomène de rigidité que nous allons maintenant décrire. Soit $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Une fonction de classe C^2 $f : I \to I$ est *unimodale* si $f(a) = f(b) = a$ et si f a un seul point critique c qui de plus est de Morse. Soit $J \subset I$ un intervalle contenant c, maximal parmi les intervalles J' pour lesquels $\exists m \geqslant 2$ avec $f^m(J') = J'$ et $f^m|J'$ est unimodale : on dit alors que f *est renormalisable* et que J est *un intervalle de renormalisation pour f de période m* ; on définit l'opérateur de renormalisation par $\mathcal{R}(f) = f^m|J$. La maximalité entraîne que les intervalles $J, f(J), .., f^{m-1}(J)$ sont disjoints ; l'ordre de ces intervalles sur I définit une permutation σ_1 de $(0,1,...,m-1)$ (σ_1 décrit l'ordre d'apparition du début de l'orbite de c). Si $f^m|J$ est renormalisable, il lui correspond une nouvelle permutation σ_1. On dit que f *est ∞-renormalisable* si cette construction peut être répétée infiniment : à une fonction ∞-renormalisable f, on associe donc une suite infinie de permutations $\sigma(f) = (\sigma_1, \sigma_2, ...)$, appelée *le type combinatoire de f*. On dit que f est de *type périodique* (resp. *type borné*) lorsque la suite $\sigma(f)$ est périodique (resp. lorsque les permutations σ_i agissent sur des ensembles de cardinal majoré).

Notons $C(f)$ l'adhérence de l'orbite positive $\{f^n(c)\}_{n\in\mathbb{N}}$ du point c : c'est un ensemble de Cantor invariant et minimal pour l'action de f. La suite $\sigma(f)$ décrit complètement l'ordre sur l'orbite positive de c ; donc, si

f et g sont deux applications ∞-renormalisables avec le même type combinatoire, il existe un homéomorphisme (monotone) $h : C(f) \to C(g)$ qui conjugue $f|C(f)$ et $g|C(g)$ (en fait $\sigma(f)$ est essentiellement le seul invariant de conjugaison de f). On sait caractériser les types topologiques d'applications ∞-renormalisables. Il existe aussi une condition de nature homologique sur une famille à paramètres de fonctions unimodales qui assure que cette famille contient un représentant de chaque type topologique. Cette condition est satisfaite par les polynômes de degré 2 : ainsi tout type topologique d'application unimodale infiniment renormalisable est réalisé par un polynôme de degré 2.

Des physiciens, Feigenbaum, et indépendamment Coullet-Tresser avaient étudié la famille des applications unimodales de type combinatoire $((1,2),(1,2),(1,2),...)$. Ils ont observé que la géométrie de l'ensemble $C(f)$ était « indépendante » de la fonction f dans cette famille. Ces observations ont conduit aux conjectures suivantes :

1) au point critique, la conjugaison h entre deux fonctions de cette famille est $C^{1+\alpha}$, pour tout $\alpha < 1$;

2) la suite de renormalisations $\mathcal{R}^n(f)$ converge (dans un certain espace fonctionnel) vers une fonction F, indépendante de f. Cette fonction F est un point fixe de $\mathcal{R}$ et elle vérifie pour un réel α « universel » : $F = \alpha F^2 \alpha^{-1}$ (équation de Cvitanovic-Feigenbaum).

Ces conjectures ont été résolues dans le cadre du dédoublement de période par Epstein, Lanford, Rand et Sullivan. On peut d'autre part formuler ces conjectures dans le cadre plus général des fonctions unimodales ∞-renormalisables. La conjecture 1) s'énonce de la même manière. Pour 2), on suppose que le type topologique σ est périodique de période q et il s'agit alors de montrer que la suite des itérés $\mathcal{R}^{qn}(f)$ converge. En 1983, Hubbard a suggéré d'étudier la renormalisation en utilisant la théorie des applications à allure quadratique. Ce fut l'un des outils de Sullivan [Su2].

Sullivan montre qu'effectivement, si l'on part d'une application unimodale $\mathbb{R}$-analytique, infiniment renormalisable avec type combinatoire borné, alors après un certain nombre de renormalisations, on obtient des applications à allure quadratique, avec des anneaux de module minoré (« bornes complexes »). Il en déduit 2) pour un type combinatoire périodique quelconque.

McMullen donne à cette condition de « bornes complexes » toute sa puissance. Quand on a un objet infiniment renormalisable, après un grand nombre de renormalisations, on se trouve dans une situation où on a un grand nombre de renormalisations au dessus et une infinité en dessous [McM2]. McMullen étudie d'emblée les tours bi-infinies, et démontre un théorème de rigidité. Il montre également une condition de « twist uniforme ». Grâce à cela, il obtient (sous l'hypothèse que le type combinatoire de $\sigma(f)$ est borné) non seulement l'existence d'une limite dans la question 2), mais aussi le fait que la convergence vers cette limite est exponentielle. Il fait une étude plus poussée et montre que le point critique est ce qu'il appelle un *point profond* (si on marque l'ensemble de Julia en noir, tout devient noir quand on zoome sur le point critique). Cela lui permet de montrer que la conjugante est $C^{1+\alpha}$ au point critique [McM2].

Une vision de Sullivan qui sous-tend toute cette étude est que l'opération de renormalisation présente un caractère hyperbolique. Les classes de conjugaison quasi-conforme seraient les variétés stables, et les tours de McMullen correspondent à des variétés instables.

Réinvestissement en dynamique holomorphe

McMullen réinvestit les notions qu'il a dégagées à cette occasion (tours, points profonds, twist uniforme, etc.) dans d'autres situations, assez variées, de dynamique holomorphe. Un exemple typique est celui des applications de la forme $f_\theta(z) = e^{2i\pi\theta}z + z^2$. Ici, on a une situation qui est infiniment renormalisable, dès que θ est irrationnel et les renormalisations successives correspondent aux étapes du développement de θ en fraction continue. De plus, $f_\theta(z)$ a un type combinatoire borné lorsque θ est « de type constant » (i.e. Diophantien d'exposant 2), et est de type périodique lorsque θ est une unité quadratique (typiquement le nombre d'or $(\sqrt{5}-1)/2$). Pour θ de type constant, Herman a montré par une opération de chirurgie et en utilisant des calculs de Swiatek, qu'il y a un disque de Siegel dont le bord est un quasi-cercle passant par le point critique, et Carsten L. Petersen a montré que l'ensemble de Julia est localement connexe. En utilisant la notion de « paire holomorphe » introduite par de Faria et de Melo ainsi que les bornes complexes établies par Petersen, McMullen obtient des résultats importants. Dans [McM7] il montre que, pour θ de type constant, la dimension de l'ensemble de Julia est strictement plus petite que 2. Il montre aussi que, si on remplace le polynôme par une application à allure quadratique qui lui est quasi-conformément conjuguée, alors la dimension du bord du disque de Siegel ne change pas. Dans le cas où θ est quadratique, il montre que le bord du disque de Siegel est auto-semblable, un fait observé numériquement et conjecturé en 1983.

III. Densité des cusps

Il existe diverses compactifications de l'espace de Teichmüller. L'une vient de l'identification (établie par Teichmüller) entre l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(X)$ et la boule unité ouverte de l'espace des différentielles quadratiques holomorphes $\mathcal{Q}(X)$ sur X ; on peut alors compactifier $\mathcal{T}(X)$ par la boule fermée de $\mathcal{Q}(X)$. Certains points du bord de la boule jouent une rôle particulier : ce sont les *différentielles de Strebel* qui ont la propriété que leur feuilletage réel est à feuilles compactes. Un tel point du bord est appelé « cusp » ; la signification géométrique en termes de dégénérescences de métriques hyperboliques est que la longueur d'un nombre fini de courbes simples tend vers 0. Douady et Hubbard ont montré que les cusps étaient denses dans $\partial\mathcal{T}(X)$ avec cette définition [DH]. On a aussi la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller par les (classes d'équivalence de) feuilletages mesurés. Là aussi on a une notion de cusps dans le bord : ce sont les feuilletages dont toutes les feuilles sont compactes. En fait, on a autant de notions de « cusps » que de compactifications...

Une autre compactification importante est celle de Bers ; elle appartient au domaine des groupes Kleiniens. Soit X une surface de Riemann, quotient du demi-plan $\mathbb{H}^2$ par un groupe Fuchsien Γ. Si $\sigma \in \mathcal{T}(X)$, le théorème d'Ahlfors-Bers fournit une représentation $\rho : \Gamma \to PSL(2,\mathbb{C})$ telle que $\rho(\Gamma)$ laisse invariants deux ouverts simplement connexes disjoints de $\mathbb{C}$, Ω^+ et Ω^- et telle que $\Omega^+/\rho(\Gamma)$ soit conformément équivalente à X et $\Omega^-/\rho(\Gamma)$ à σ. On a donc une application conforme f_σ : $\mathbb{H}^2 \to \Omega^-$ qui conjugue les actions respectives des groupes Γ et $\rho(\Gamma)$. La dérivée schwarzienne $S(f)$ d'une application conforme f est de manière naturelle une différentielle quadratique. L'application $\sigma \to S(f_\sigma)$ est un plongement de $\mathcal{T}(X)$ dans $\mathcal{Q}(X)$, appelé *le plongement de Bers*. Son image est bornée et l'adhérence de $\mathcal{T}(X)$ dans $\mathcal{Q}(X)$ est une compactification de $\mathcal{T}(X)$. On peut voir qu'elle ne dépend pas du point X ; c'est la compactification de Bers. Les points du bord s'interprêtent comme des représentations de Γ dans $PSL(2,\mathbb{C})$, plus ou moins dégénérées. On dit qu'un point du bord est un *cusp*, s'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\rho(\gamma)$ soit une transformation parabolique. Un point est un *cusp maximal* lorsqu'il existe un ensemble maximal d'éléments non conjugués γ_i tels que $\rho(\gamma_i)$ soit parabolique (pour une surface compacte de genre g, le cardinal de cet ensemble est $3g-3$). McMullen montre alors dans [McM8]

Théorème 4. Cusps are dense. — *Les cusps maximaux sont denses dans le bord de l'espace de Teichmüller.*

Ce résultat est beaucoup plus délicat que celui de [DH]. Les cusps maximaux sont les points les mieux compris dans le bord de l'espace de Teichmüller. A l'opposé, il existe des groupes, qualifiés de « dégénérés » dont les propriétés géométriques ont été mises en évidence par Thurston : un tel groupe $\rho(\Gamma)$ laisse invariant un domaine Ω (et le quotient $\Omega/\rho(\Gamma)$ est conformément équivalent à X) dont le complémentaire est un fermé d'intérieur vide. Ces groupes restent encore très mystérieux, mais on espère pouvoir les classer par des invariants de type « combinatoire ». D'une manière générale, Thurston associe à un point dans le bord du plongement de Bers, un couple formé d'une lamination géodésique sur

X et d'une structure complexe sur $X - \lambda$. Pour une certaine topologie sur cet espace, il conjecture que cet espace est homéomorphe au bord du plongement de Bers. Sans entrer dans les détails, une collection maximale de courbes simples sur X détermine de manière unique un point (λ, σ) et les points ainsi obtenus sont denses. Le théorème « Cusps are dense » s'inscrit dans ce cadre général et va dans le sens de la conjecture de Thurston.

Références

[DH] A. Douady, J. Hubbard, *On the density of Strebel forms*, Invent. Math., **30**, p. 175–179, 1975

[DMcM] P. Doyle, C. McMullen, *Solving the quintic by iteration*, Acta Math., **163**, p. 151–180, 1989

[EMcM] A. Eskin, C. McMullen, *Mixing, counting and equidistributions in Lie groups*, Duke Math. J., **1**, p. 181–209, 1993

[FLP] A. Fathi, F. Laudenbach & V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les Surfaces*, Astérisque, **66-67**, 1979

[McM1] C. McMullen, *Complex Dynamics and Renormalization*, Ann. of Math. Stud., **135**, Princeton University Press Princeton, 1994

[McM2] C. McMullen, *Renormalization and 3-manifolds Which Fiber over the Circle*, Ann. of Math. Stud., **142**, Princeton University Press Princeton, 1994

[McM3] C. McMullen, *Rational maps and Kleinian groups*, Proceedings of the Interbational Congress of Mathematicians, Kyoto 1990 Springer Verlag, p. 889-900, 1990

[McM4] C. McMullen, *From surface diffeomorphisms to Fermat's last theorem*, prépublication, 1999

[McM5] C. McMullen, *Amenability, Poincaré series and quasiconformal maps*, Invent. Math., **97**, p. 95-127, 1989

[McM6] C. McMullen, *Iteration on Teichmüller space*, Invent. Math., **99**, p. 425-454, 1990

[McM7] C. McMullen, *Self-similarity of Siegel disks and the Hausdorff dimension of Julia sets*, Acta Math., **180** , p. 247-292, 1998

[McM8] C. McMullen, *Cusps are dense*, Ann. of Math., **133**, p. 425-454, 1991

[Mo] J. Morgan, *On Thurston's Uniformization Theorem for Three-Dimensional Manifolds*, The Smith Conjecture, H. Bass, J. Morgan editeurs, Academic Press, New-York, p. 37-125, 1984

[Su1] D. Sullivan, *Travaux de Thurston sur les groupes quasi-fuchsiens et les variétés hyperboliques de dimension 3 fibrées sur* S^1, Séminaire Bourbaki 554, Lecture Notes 842, Springer Verlag, 1981

[Su2] D. Sullivan, *Bounds quadratic differentials and renormalization conjectures, Mathematics into the Twenty-first Century : 1988 Centennial Symposium*, F. Browder editor, Amer. Math. Soc., p. 417-466, 1992

[Thu1] W. Thurston, *Hyperbolic structures on 3-manifolds I : Deformations of acylindrical manifolds*, Annals of Math., p. 203-246, 1986

[Thu2] W. Thurston, *Hyperbolic structures on 3-manifolds II : Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle*, preprint, 1986

[Thu3] W. Thurston, *Hyperbolic structures on 3-manifolds I : Overall logic*, notes d'un séminaire à Bowdoin, 1980

[Thu4] W. Thurston, *Geometry and Topology of Three-Manifolds*, notes de cours Princeton, 1979