

il reprend les résultats classiques en particulier de Gelfand-Graev-Piatestki-Shapiro et la notion de modèle de Whittaker. Il en profite pour définir la fonction L associée à une représentation automorphe cuspidale irréductible de $GL(n, \mathbb{A})$ et même celle associée à une paire de représentations automorphes cuspidales irréductibles l'une d'un $GL(n, \mathbb{A})$ et l'autre d'un $GL(m, \mathbb{A})$; il suit en cela les travaux de Jacquet-Piatestki-Shapiro-Shalika. Il y a même un paragraphe consacré au triple produit c'est-à-dire à la fonction L attachée à un triplet de représentations automorphes cuspidales irréductibles de $GL(2, \mathbb{A})$.

La dualité et la fonctorialité de Langlands sont évoquées; l'explication est complète, dans la limite des connaissances actuelles, pour $GL(2)$ et on trouve en particulier certains aspects utiles pour les travaux de Wiles. La définition du L -groupe est faite dans

un cadre assez général.

Ce livre de presque 600 pages a visiblement été écrit dans le but d'être utile aux débutants et je pense que cet objectif est atteint. Mon seul regret est que le titre annonce une étude des formes automorphes alors que le livre se limite aux formes automorphes cuspidales pour $GL(n)$.

The degenerate oblique derivative problem for elliptic and parabolic equations

P.R. Popivanov, D.K. Palagachev

Mathematical research 93, Akademie Verlag, 1997

Ce livre expose très clairement les principaux résultats des 30 dernières années sur le problème de la dérivée oblique d'un opérateur linéaire, puis aborde le problème quasilinéaire et le problème d'évolution associé, avec notamment les contributions des auteurs.

COMPTES-RENDUS

Global Aspects of Classical Integrable Systems

R. H. Cushman and L. M. Bates

Birkhäuser, 1997

L'importance des méthodes de géométrie symplectique en mécanique est bien connue, mais peu d'ouvrages mettent ces méthodes en pratique avec autant de succès que le livre qu'ont écrit Cushman et Bates.

L'espace des phases d'un système mécanique est le fibré cotangent de la variété de configuration. Celle-ci est une variété de dimension n , où n est le nombre de degrés de liberté du système, qui décrit les positions du système. Or tout fibré cotangent est canoniquement une variété symplectique, c'est-à-dire une variété munie d'une 2-forme fermée, ω , de rang maximal. Dire que ω est de rang maximal, c'est dire que ω définit en chaque point un isomorphisme, ω^\sharp , de l'espace cotangent sur l'espace tangent en ce point. (J'utilise la notation "musicale" introduite par Marcel Berger en géométrie riemannienne : le symbole "dièse" rappelle que l'application en question, qui transforme formes en vecteurs,

fait "monter les indices", suivant la convention habituelle d'écriture en calcul tensoriel. Cushman et Bates désignent au contraire cette même application par ω^b , suivant en cela la convention originale de R. Abraham dans la première édition de *Foundations of Mechanics*, car pour eux la dualisation "fait monter").

Si les q^i sont des coordonnées locales sur la variété de configuration, N , et les p_i les moments associés, la 2-forme symplectique canonique sur T^*N s'écrit $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$. Au hamiltonien H du système, qui est une fonction sur T^*N , est alors associé le champ de vecteurs hamiltonien, $X_H = \omega^\sharp(dh)$ qui définit le système dynamique

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{aligned}$$

Les trajectoires du système considéré sont les projections sur l'espace de configuration des courbes intégrales du champ de vecteur hamiltonien associé (par la structure symplectique ci-dessus) au hamiltonien du système.

Le système est dit intégrable s'il possède n intégrales premières, où n est la dimension de la variété de configuration, qui sont fonctionnellement indépendantes et en involution. Cela signifie que les différentielles de ces fonctions sont linéairement indépendantes sur un ouvert dense, et que leurs crochets de Poisson deux à deux sont nuls.

L'idée principale est que, pour étudier le mouvement considéré, on va remplacer, en utilisant les symétries du système, l'espace des phases par une variété symplectique (lisse ou non) de dimension inférieure. Ainsi, on peut considérer les orbites à énergie fixée d'un système conservatif, ce qui fournit un espace de dimension 2 de moins. Plus généralement, on peut effectuer une telle réduction en fixant la valeur de l'une quelconque des intégrales premières. Ce qui rend la méthode plus puissante est d'effectuer la réduction par rapport à tout un groupe de symétries qui respectent la structure symplectique. Plus précisément on s'intéresse aux cas, nombreux, où il existe un groupe de Lie G agissant sur l'espace des phases M , et une application, $J : M \rightarrow g^*$, où g^* est le dual de l'algèbre de Lie g de G , telle que la symétrie infinitésimale définie par $X \in g$ soit le champ de vecteurs hamiltonien associé à la fonction à valeurs réelles $x \mapsto J(x)(X)$. Une telle application est dite *application moment* pour l'action du groupe G . On effectue alors la réduction par ce groupe de symétrie, qui consiste à considérer un quotient de l'image réciproque d'un point de g^* par l'application moment qui, lorsqu'il est une variété lisse, est encore une variété symplectique, de dimension plus petite que l'espace des phases initial. Si de plus H est un hamiltonien invariant par G , alors, pour tout $X \in g$, la fonction $x \mapsto J(x)(X)$ est une intégrale première de X_H . L'image réciproque d'un point de g^* correspond aux orbites du champ hamiltonien X_H où toutes les intégrales premières sont fixées simultanément.

Les systèmes complètement intégrables ont été le sujet d'innombrables publications, d'études faisant appel à toutes les techniques. *Global aspects of classical*

integrable systems remplit exactement la mission énoncée dans son titre. Les grandes théories n'y sont pas exposées comme une fin en soi mais en de copieux appendices, après avoir été utilisées dans toute leur diversité pour une étude minutieuse, explicite de cinq mouvements classiques : oscillateur harmonique, pendule sphérique, géodésiques de S^3 , toupies - cas d'Euler et cas de Lagrange.

Ce livre peut être utilisé de bien des façons. C'est un manuel de géométrie symplectique très complet. Il traite en détails l'algèbre linéaire des espaces vectoriels symplectiques, puis les variétés symplectiques et de Poisson, et expose la méthode des crochets de Dirac qui permet d'écrire les équations de Hamilton sur une variété de contrainte. Après des généralités sur les actions de groupes, Cushman et Bates étudient les actions hamiltoniennes de groupes et la réduction symplectique dans le cas régulier (cas d'un quotient lisse et cas d'un quotient orbifold), puis dans le cas singulier où l'on considère des valeurs non régulières de l'application moment; le quotient est alors un espace sur lequel on peut encore définir le crochet de Poisson de deux fonctions lisses en un sens approprié, et qui s'écrit comme une réunion de variétés symplectiques. Ils examinent les propriétés des connexions d'Ehresmann, puis étudient les coordonnées actions-angles tant du point de vue local que du point de vue global; ils donnent un exposé très clair, inspiré des travaux de Duistermaat, de la construction du fibré des réseaux des périodes pour un fibré en tores lagrangiens. Le livre se termine par un résumé substantiel de la théorie de Morse.

Chacune de ces méthodes, exposée sous forme générale dans les appendices, est explicitement mise en œuvre dans chacun des chapitres du livre, par exemple la réduction symplectique dans I.5 pour l'oscillateur harmonique ou dans IV.3 pour la symétrie de la toupie de Lagrange donnée par l'action à droite de S^1 ; la méthode de réduction symplectique singulière dans V.4 pour la toupie de Lagrange avec l'action à gauche de S^1 ; la méthode des crochets de Dirac, pour le flot géodésique sur S^3 dans II.1, dans IV.1, pour le pendule sphérique magnétique (pendule sphérique avec un champ magnétique radial créé par un monopole placé au centre de la sphère) dans V.3.2; la théorie de Morse, pour la construction de Poincaré relative à la toupie dans le cas d'Euler dans II.7.2, pour le pendule sphérique, pour l'étude du pendule sphérique dans IV.3, pour l'étude de la toupie de Lagrange dans V.6.2 et V.7.2, etc.

La complexité de la topologie des espaces d'orbites et des fibrations est étonnante. Ici elle est décrite en détails. Le phénomène de monodromie est expliqué et illustré, si bien que dans ce livre on rencontre de manière très concrète nombre de fibrés non triviaux : par exemple, dans le paragraphe IV.5, un fibré en tores de dimension 2 au-dessus d'une courbe homéomorphe à un cercle, ou, dans le paragraphe V.7.1, un fibré en sphères dont certaines fibres dégèrent en un point, et bien d'autres exemples.

Le paragraphe III.1 constitue une étude exhaustive du groupe des rotations $SO(3)$. On trouve en exercice les propriétés essentielles des fonctions elliptiques. La fibration de Hopf est étudiée en détails au paragraphe I.4. La régularisation du champ de vecteurs de Képler est traitée en détails dans II.3.4. Et l'on trouve dans

III.8 l'explication du phénomène de la raquette de tennis qui, lancée en l'air avec un mouvement de rotation, retombe avec la face opposée visible.

Dans ce livre, toutes les assertions sont démontrées avec un soin extrême. Il y a, certes, des fautes de frappe et la bibliographie en particulier aurait gagné à être relue encore, mais je n'ai rien relevé de vraiment gênant. Encore un livre sur l'oscillateur harmonique? Oui, mais un livre qui apporte du nouveau sur les méthodes d'étude et sur la topologie des solutions, un livre qui traite cinq systèmes intégrables et mène leur étude jusqu'à son terme.

Yvette Kosmann-Schwarzbach,
Ecole Polytechnique.

Lectures on vector bundles

Joseph Le Potier

Cambridge studies in advanced mathematics n. 54, Cambridge University Press, 1997.

Ce livre est divisé en deux parties. La première (reprise d'un cours de l'auteur (DEA) à Paris 7) donne la définition et les premières propriétés de la "variété de modules" de fibrés vectoriels au dessus d'une courbe lisse complète fixée. La seconde (reprise d'un cours de l'auteur à une école d'été) étudie le même problème au dessus du plan projectif. Les deux parties sont à la fois fondamentalement liées et fortement contrastées.

Le sujet des fibrés vectoriels sur les courbes est très développé aujourd'hui, voire célèbre (par l'intermédiaire de la "formule de Verlinde"); rappelons simplement qu'il remonte au mémoire de Weil, "Généralisation des fonctions abéliennes" (O.C. I, pp. 185-226) (commenté par Grothendieck, Sem. Bourbaki, exposé 141, 1956) et que l'apparition vers 1965 de l'idée de "stabilité" (Mumford, Narasimhan-Seshadri) l'a définitivement débloqué.

Le Potier présente une démonstration complète du résultat suivant :

Soit X une courbe complète lisse de genre $g \geq 2$ sur \mathbb{C} . Pour des entiers $r \geq 1$ et d fixés, il existe une variété $M(r, d)$ paramétrant les classes d'équivalence de fibrés vectoriels "semi-stables" de rang r et de degré d sur X (l'équivalence est l'isomorphisme des suites de quotients de Jordan-Hölder associées aux fibrés). Cette variété est projective, normale, connexe et non vide de dimension $r^2(g - 1) + 1$; les points définis par les classes d'isomorphisme de fibrés stables sont lisses. Si r et d sont premiers entre eux, il existe un fibré de Poincaré sur $M(r, d) \times X$.

Après les préliminaires nécessaires (définition (topologique) du degré, étude de la notion de stabilité, introduction à "Geometric invariant theory"), la démonstration se fait en deux étapes. Dans la première, en supposant d assez grand (ce qui est inoffensif), on paramètre les modules localement libres concernés E , rigidifiés par un isomorphisme de l'espace vectoriel des sections de E sur un espace vectoriel fixe V (de rang $d + r(1 - g)$). L'espace de paramètres est donc un schéma de Hilbert que Le Potier construit en reprenant l'exposé de Grothendieck (Sem.

Bourbaki, exposé 221, 1960). Cette construction reste délicate. La seconde étape est le passage au quotient par $GL(V)$. Ici intervient une innovation technique bienvenue, par rapport à la présentation traditionnelle (en germe dans le livre de Mumford, développée dans le cours de Seshadri (rédigé par Drezet) "Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques", Astérisque 96, 1982). Explicitons : si d est assez grand, la construction de Grothendieck conduit à plonger le schéma de Hilbert comme sous-schéma fermé de la grassmannienne des espaces vectoriels quotients, de rang $d + r(n + 1 - g)$, du produit tensoriel $V \otimes H^0(L)$ où L est une polarisation de degré n de X . L'idée exploitée (que Le Potier attribue à C. Simpson) est qu'un fibré semi-stable correspond à un point semi-stable de cette grassmannienne, naturellement polarisé, sous l'action de $SL(V)$. Une fois cette étape franchie, les arguments aboutissant à la démonstration sont d'une grande simplicité conceptuelle.

Si l'on désire généraliser ces résultats au cas où la base est une surface, deux difficultés techniques apparaissent : 1) la variété de modules des fibrés n'est pas compacte, 2) la notion de stabilité dépend du choix d'une polarisation de la surface. Le début de la seconde partie s'attache à exorciser ces difficultés. Selon Maruyama, on peut surmonter la première en admettant des faisceaux cohérents sans torsion. On peut d'autre part circonscrire les divergences entre les diverses notions de stabilité par deux résultats techniques, dus respectivement à Bogomolov et Flenner, dont Le Potier donne un exposé détaillé.

La question centrale : nombre et dimension des composantes irréductibles de la famille de faisceaux semi-stables d'invariants numériques fixés, n'est pas complètement résolue lorsque la base est une surface quelconque; dans le cas du plan projectif (où la question 2) ne se pose plus), la solution complète est due en grande partie à Drezet et Le Potier lui-même; c'est elle qui est exposée ici. Les invariants numériques sont le rang r et les classes de Chern (c_1, c_2) : Le Potier leur substitue souvent la "pente" $\mu = c_1/r$ et le "discriminant", $\Delta = (2rc_2 - (r-1)c_1^2)/2r^2$ (le théorème de Bogomolov dit que Δ est positif en un faisceau semi-stable). Ces invariants étant fixés, Le Potier montre que la variété des modules correspondante est vide ou irréductible de dimension $2rc_2 - (r-1)c_1^2 + 1 - r^2$. Reste à formuler la condition d'existence. Pour cela, Le Potier décrit l'ensemble des fibrés stables "exceptionnels" i.e. rigides (ils sont caractérisés par la condition $\delta < 1/2$). Il montre que, par leur pente, ces fibrés sont en correspondance bijective avec un ensemble de rationnels qu'il décrit par un procédé de dissection de \mathbb{Q} (qu'on peut comparer, en plus étrange, à la dissection dite "de Farey"), lequel donne en même temps une construction de proche en proche desdits fibrés (que Le Potier n'explique pas, se contentant de renvoyer à un article de Drezet). Cette description faite, Le Potier remarque que si F est un fibré stable de pente μ , non exceptionnel, et si E est un fibré exceptionnel de pente β , telle que $|\mu - \beta| < 3$, la caractéristique d'Euler du fibré $\text{Hom}(E, F)$ ou celle de $\text{Hom}(F, E)$ est négative, d'où une série d'inégalités sur les invariants de F ; le résultat crucial est alors que ces inégalités suffisent à assurer l'existence de F . Bien que l'exposé de cette "géographie" reste d'une grande simplicité, il

ne me semble pas interdit de penser que le dernier mot n'a pas été dit sur cette construction énigmatique.

Il me reste à exprimer mon admiration devant la manière dont ce matériau complexe a été traité. La technique est extrêmement souple, les détails pleins d'intérêt, la rédaction claire et concise. Je souhaite à ce livre de nombreux lecteurs.

Laurent Gruson,
Université de Versailles

G-Algebras and Modular Representation Theory.

Thévenaz, Jacques

Mathematical monographs, Oxford University Press, 1995

Le livre de J. Thévenaz est le premier traité de théorie locale des blocs, branche très active de la théorie des représentations modulaires des groupes finis. Existaient jusqu'alors deux ouvrages plus spécialisés : la monographie de Külshammer "Lectures on block theory" qui expose la théorie de Puig des blocs nilpotents en caractéristique p et ceci est repris par Thévenaz et l'ouvrage d'Alperin "Local representation theory", qui développe la théorie plus classique (Green, Alperin, Broué) jusqu'au théorème de Dade sur les blocs à défaut cyclique, en caractéristique p , aspect non abordé par Thévenaz.

La théorie et les méthodes développées dans le livre suivent pour l'essentiel les idées de L. Puig, mais les méthodes plus classiques sont souvent traitées en parallèle, fournissant ainsi des repères au lecteur familier avec ces dernières.

Expliquons rapidement les objets que se propose d'étudier la théorie locale des blocs, selon Puig. Étant donné un groupe fini G et une extension finie non ramifiée \mathcal{O} de l'anneau des entiers p -adiques, on définit un bloc de G sur \mathcal{O} comme un facteur direct indécomposable B de l'algèbre de groupe $\mathcal{O}G$ de G sur \mathcal{O} , vue comme $(G \times G)$ -module. Un tel facteur B est une sous-algèbre de $\mathcal{O}G$, d'unité un idempotent primitif du centre de $\mathcal{O}G$. Il existe alors un p -sous-groupe minimal P de G unique à conjugaison près et un module indécomposable pour $\mathcal{O}(G \times P)$ tel que B est facteur direct de l'induit de $G \times P$ à $G \times G$ de N . Le sous-groupe P est un groupe de défaut du bloc. Sa complexité mesure assez bien celle du bloc B (ainsi, le cas où P est cyclique est spécialement simple). La P -algèbre S des $\mathcal{O}G$ -endomorphismes de N est une algèbre de source de B : c'est une version enrichie par l'action de P de l'algèbre basique de B . Par exemple, les nombres de décomposition généralisés (liés aux valeurs des caractères irréductibles de B sur des éléments de G d'ordre divisible par p) peuvent se lire dans S .

La catégorie locale d'un bloc (analogue, pour un bloc, de la catégorie de Frobenius des p -sous-groupes de G avec morphismes composés d'injections et de conjugaisons) donne une idée de la difficulté à déterminer l'algèbre de source.

Un des principaux résultats de la théorie des blocs est la détermination de l'algèbre de source des blocs nilpotents. Ce sont les blocs dont la catégorie locale est équivalente à la catégorie de Frobenius de P . Alors, un théorème de Puig affirme que l'algèbre de source d'un tel bloc est isomorphe à $\mathcal{O}P$. Ce théorème est un des

points culminants du livre (chapitre 7), qui développe aussi les conséquences du théorème sur les caractères (Broué-Puig).

Donnons maintenant un aperçu des autres chapitres du livre. Le premier chapitre fournit une très agréable discussion de la théorie des algèbres de rang fini sur un anneau de valuation discrète complet : radical, relèvements d'idempotents, extensions de groupes, théorèmes de Krull-Schmidt et de Wedderburn-Malcev, théorie de Morita, algèbres symétriques... En outre, l'approche prise suit Puig : elle consiste à travailler systématiquement avec des classes de conjugaison d'idempotents primitifs (les points) et avec des classes de conjugaison de morphismes.

Les deuxième et troisième chapitres développent ensuite la situation où l'algèbre est munie de l'action d'un groupe fini. Les objets (plus ou moins) classiques y sont introduits. Notons que le point de vue pris généralise des concepts habituellement associés aux blocs ou à des algèbres d'endomorphismes de G -modules (morphisme de Brauer, sources et vertex, correspondance de Green), les groupes pointés et modules de multiplicité par exemple étant néanmoins propres à la théorie de Puig.

Le quatrième chapitre regroupe divers résultats liés à l'action d'un p -groupe, scissions d'extensions centrales d'un p -groupe et théorème d'indécomposabilité de Green en particulier.

Le cinquième chapitre étudie différentes classes de modules et développe des méthodes générales de représentations d'algèbres : diagrammes, dualité d'Auslander-Reiten, suites exactes presque scindées. Le paramétrage des modules indécomposables à l'aide des sources, défauts et modules de multiplicité est exposé en général puis explicité pour les modules de p -permutation. Enfin, quelques propriétés des modules d'endopermutation et du groupe de Dade sont présentées.

Le sixième chapitre du livre est central ; il décrit divers résultats de structure des algèbres de source de blocs : blocs à groupe de défaut distingué, structure de l'algèbre de source comme $(P \times P)$ -module et des résultats plus classiques comme le théorème de Knörr sur les vortex, le second théorème de Brauer, le théorème de Robinson sur le nombre de blocs de groupe de défaut donné.

Avant de développer la théorie des blocs nilpotents, le septième chapitre décrit la catégorie locale d'un bloc et le contrôle de fusion.

Enfin, le huitième et dernier chapitre présente une généralisation de la théorie de Puig aux foncteurs de Green.

Le livre de Thévenaz est une référence pour la théorie locale des blocs, même s'il ne prétend pas traiter tous les aspects de la théorie et si l'on peut regretter l'absence d'exemple. Clarté et précision rendent ce superbe ouvrage accessible à un large public.

Raphaël Rouquier,
Université de Paris 7

Modular Forms and Fermat's last theorem**Cornell, G.; Silverman, J. H.; Stevens, G. éditeurs**

Springer, 1997

Ce livre de presque 600 pages est la reproduction des exposés donnés à une conférence ayant eu lieu à Boston en Août 95 ayant pour but de comprendre les travaux de Wiles et Taylor-Wiles aboutissant à la preuve du dernier théorème de Fermat. Ces exposés représentent un véritable travail de recherche et ne laissent pas de place à l'imprécision.

Après une introduction très claire, due à G. Stevens, résumant les grandes lignes de la preuve du théorème de Fermat, le livre s'organise de la façon suivante.

Les premiers chapitres sont consacrés aux préliminaires. D'abord les préliminaires sur les courbes elliptiques sur \mathbb{Q} (exposé de Silvermann, où le cas des corps de nombres est aussi considéré); le premier point ici est de pouvoir définir les représentations galoisiennes ℓ -adiques (en fait définies sur \mathbb{Z}_ℓ) attachées à une telle courbe; si E est une courbe elliptique et si ℓ est un nombre premier, on note $\rho_{E,\ell}$ la représentation ℓ -adique associée. Les problèmes de la réduction modulo ℓ sont traités à fond; cela permet de définir l'action du Frobenius en les places où il y a bonne réduction et d'expliquer aussi dans les cas de mauvaises réductions ce que signifie l'hypothèse semi-stable en p ; en regardant les singularités cela exclut les cusp (en réduction modulo p), du point de vue du conducteur cela exclut la divisibilité de ce conducteur par p^2 . Aux places p où il y a bonne réduction, on définit aussi le nombre $a_p(E) \in \mathbb{Z}$ étroitement lié aux nombres de points en réduction; en voyant $a_p(E)$ comme un endomorphisme de la courbe elliptique en réduction, il s'interprète comme la somme de l'action du Frobenius et de son dual. La donnée des $a_p(E)$ où p parcourt l'ensemble des nombres premiers sauf un nombre fini (voire même sauf un ensemble de densité nulle) détermine la courbe à isogénie près (théorème d'isogénie de Faltings, rappelé par Silvermann mais non démontré). Silvermann définit ensuite les fonctions L attachées aux courbes elliptiques ainsi que d'autres objets de base : le groupe de Tate-Shafarevitch, la hauteur ...

Après les courbes elliptiques, les courbes modulaires essentiellement $X_0(N)$ et $X_1(N)$. Cela est fait par Rohrlich et permet de définir les correspondances de Hecke; elles sont associées aux entiers p ne divisant pas N . Elles agissent sur les Jacobiennes des courbes modulaires et se calculent en fonction du Frobenius. Ce sont les fameuses relations d'Eichler-Shimura. A tout caractère, χ , de l'algèbre de Hecke on peut associer un quotient de la Jacobienne, $J_1(N)$, disons de $X_1(N)$:

$$J_1(N)/\text{Ker } \chi J_1(N).$$

Dans les bons cas, c'est une variété abélienne à laquelle on peut aussi associer un système ℓ -adique de représentations galoisiennes, une fonction L ... (en terme savant, on a un motif). Les caractères qui nous intéressent sont ceux qui apparaissent pour l'action de l'algèbre de Hecke sur l'espace des formes modulaires; c'est la théorie des nouvelles formes. Une nouvelle forme est une forme modulaire vecteur propre pour l'action de l'algèbre de Hecke,

convenablement normalisée. Les coefficients de Fourier d'une telle forme f , $\{a_p(f)\}$, déterminent le caractère de l'algèbre de Hecke; on sait que ces nombres $a_p(f)$ sont algébriques sur \mathbb{Q} . Par la procédure ci-dessus, à une telle forme f , on associe une variété abélienne qui est une courbe elliptique exactement quand les coefficients de Fourier de f sont rationnels. Supposons, pour simplifier que f vérifie cette propriété et notons E_f la courbe elliptique ainsi définie. Les relations d'Eichler-Shimura disent exactement que pour tout p ne divisant pas N :

$$a_p(f) = a_p(E_f).$$

On peut alors aussi associer à f , pour tout ℓ nombre premier, une représentation galoisienne $\rho_{f,\ell}$.

A ce stade, on peut au moins poser la conjecture dite de Tanyama-Weil :

pour toute courbe elliptique E existe-t-il une nouvelle forme f (dont le niveau est égal au conducteur de E) à coefficients de Fourier rationnels et telle que

$$a_p(f) = a_p(E)$$

c'est-à-dire telle que E_f soit isogène à E . Une condition équivalente s'exprime par : existe-t-il f tel que pour tout nombre premier ℓ

$$\rho_{E,\ell} \simeq \rho_{f,\ell}.$$

Dans la dernière formulation, on a même le droit d'échanger l'ordre des quantificateurs, c'est-à-dire que l'on fixe d'abord ℓ et on cherche f une nouvelle forme telle que $\rho_{f,\ell} \simeq \rho_{E,\ell}$. Ceci est un point important pour la preuve du théorème de Fermat. Une nouvelle forme a aussi un poids (donné par exemple par le K -type à l'infini) et un caractère et on peut formuler la conjecture en imposant ces données de f en fonction de E .

Des conjectures de Serre, reprennent cette question de Tanyama-Weil en réduction. C'est-à-dire fixons E , une courbe elliptique et un nombre premier, ici ℓ . La représentation ℓ -adique $\rho_{E,\ell}$ peut se réduire modulo ℓ et elle est alors notée $\bar{\rho}_{E,\ell}$. Serre précise alors en fonction de $\bar{\rho}_{E,\ell}$ un conducteur, un poids et un caractère et formule la conjecture : E et ℓ étant comme ci-dessus, il existe f une nouvelle forme avec ces données telle que (à un détail près) :

$$\bar{\rho}_{E,\ell} \simeq \bar{\rho}_{f,\ell}.$$

Ceci est expliqué dans l'exposé de Edixhoven, le détail près clairement expliqué par Edixhoven, vient du fait qu'a priori on cherche non pas f mais une forme modulaire en caractéristique ℓ et que l'application de réduction n'est pas toujours surjective. Dans l'exposé d'Edixhoven, on trouve aussi l'état de cette conjecture et en particulier la partie prouvée par Ribet.

A ce stade le lecteur peut déjà comprendre la stratégie pour prouver le théorème de Fermat : Frey avait eu l'idée d'associer à une solution (a, b, c) de l'équation de Fermat (avec a, b, c premiers entre eux) :

$$a^p + b^p = c^p$$

(ici p est un nombre premier) la courbe elliptique $E_{a,b,c}$ définie par l'équation :

$$y^2 = (x - a)(x - b)x.$$

Le conducteur de cette courbe est sans facteur carré. En outre, si a est congru à -1 modulo 4 et b est pair (on peut toujours se ramener à ce cas), alors Frey et Serre ont remarqué que les représentations $\rho_{E_{a,b,c},\ell}$ ont d'excellentes propriétés de non ramification. Le théorème de Wiles et Taylor-Wiles s'applique (cf. ci-dessous) et donne la modularité de E ; en particulier $\bar{\rho}_{E_{a,b,c},\ell}$ est modulaire et les propriétés de non ramification permettent d'utiliser les résultats de Ribet qui donnent l'existence d'une forme modulaire sur $X_0(2)$ de poids 2. On sait qu'il n'existe pas de telles formes d'où la contradiction.

Le théorème de Wiles complété par Taylor-Wiles peut s'exprimer ainsi : toute courbe elliptique semi-stable est modulaire.

Le coeur de ce théorème s'exprime de façon beaucoup plus technique : soit ρ_ℓ une représentation galoisienne ℓ -adique (pour simplifier définie sur \mathbb{Z}_ℓ) de déterminant fixé comme étant le caractère cyclotomique correspondant à ℓ . La réduction $\bar{\rho}_\ell$ est bien définie; supposons qu'elle soit modulaire plus un certain nombre de propriétés d'irréductibilité. Alors ρ_ℓ est modulaire.

Il faut alors vérifier que cet énoncé donne bien l'énoncé précédent. C'est loin d'être évident : la première difficulté est de vérifier l'hypothèse de modularité en réduction. Un peu miraculeusement on la connaît si $\ell = 3$ avec les hypothèses d'irréductibilité évoquées ci-dessus vérifiées. Il est expliqué dans l'exposé de Gelbart l'essentiel des arguments permettant à Langlands et Tunnel de montrer que toute représentation galoisienne à valeurs dans $GL(2, \mathbb{C})$ dont l'image dans $PGL(2, \mathbb{C})$ est un groupe fini provient d'une forme modulaire. Cela utilise une grosse partie de la théorie des formes automorphes pour $GL(2)$. Le miracle qui ne se produit que pour $\ell = 3$, expliqué à la fin de l'exposé de Edixhoven, est que $GL(2, F_3)$ a une représentation complexe de dimension 2 qui se réduit modulo 3 (elle en fait à valeurs dans $GL(2, \mathbb{Z}\sqrt{-2})$) et dont la réduction est essentiellement l'identité. Il faut encore travailler pour ajuster poids et conducteur.

Quant aux hypothèses d'irréductibilité, elles ne sont pas toujours vérifiées pour $\ell = 3$. L'exposé de Rubin explique comment l'on s'en tire : fixons E une courbe elliptique semi-stable en 3 et 5. Si les hypothèses d'irréductibilité ne sont pas vérifiées par $\bar{\rho}_{E,\ell}$ en $\ell = 3$ alors elles le sont par $\bar{\rho}_{E,\ell}$ en $\ell = 5$ sauf éventuellement pour quelques courbes dont on savait déjà qu'elles étaient modulaires. Il reste quand même à avoir la modularité de $\bar{\rho}_{E,5}$. On l'obtient en construisant une autre courbe modulaire E' telle que $\bar{\rho}_{E',5} \simeq \bar{\rho}_{E,5}$ et telle que $\bar{\rho}_{E',3}$ a les bonnes propriétés d'irréductibilité. Le théorème principal appliqué à E' donne la modularité de E' et donc de $\rho_{E',5}$; ceci donne en réduction la modularité de $\bar{\rho}_{E',5}$ et donc celle de $\bar{\rho}_{E,5}$.

Il reste le théorème principal, le coeur du livre lui est consacré. Ici on fixe F un corps fini et $\bar{\rho}$ une représentation galoisienne à valeurs dans $GL(2, F)$. On suppose au moins que $\bar{\rho}$ est absolument irréductible (i.e. elle reste irréductible

après extension des scalaires à une clôture algébrique de F). Suivant Mazur, on regarde le foncteur qui à un anneau local complet A de corps résiduel F associe l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations galoisiennes à coefficients dans A (de déterminant fixé) ayant $\bar{\rho}$ comme réduction. On fixe aussi un ensemble Σ de places de \mathbb{Q} contenant les places où $\bar{\rho}$ est ramifiée et on impose aux représentations considérées d'être non ramifiées hors de Σ ; on peut aussi limiter le type de ramification aux places de Σ . On montre alors que ce foncteur est représentable grâce à une représentation ρ_Σ à valeurs dans $GL(2, R_\Sigma)$ où R_Σ est un anneau local complet noethérien de corps résiduel F . Cette théorie dite des déformations de $\bar{\rho}$ est expliquée avec tous les détails nécessaires par Mazur lui-même. Une construction élémentaire et algébrique de R_Σ est donnée dans l'exposé de De Smit et Lenstra.

D'autre part, on considère les déformations modulaires, c'est-à-dire que dans le foncteur ci-dessus, on se limite au déformation de $\bar{\rho}$ qui proviennent de forme modulaire. Ici, évidemment, il faut supposer que $\bar{\rho}$ est elle-même modulaire. Pour Σ fixé comme ci-dessus, on montre que ce foncteur est lui aussi représentable, R_Σ étant remplacé par un anneau T_Σ assez naturellement construit à l'aide des coefficients de Fourier des formes modulaires ayant les bonnes propriétés de ramification.

Les propriétés universelles donnent un morphisme π_Σ de R_Σ dans T_Σ . Le but est de démontrer que π_Σ est bijectif. On suppose maintenant que $\bar{\rho}$ a un conducteur sans facteur carré. On commence par écrire un triangle commutatif donné par l'hypothèse que $\bar{\rho}$ est modulaire : ceci permet de fixer une forme modulaire, f_\emptyset de ramification minimale donnant en réduction la représentation $\bar{\rho}$. L'existence d'une forme avec cette propriété de ramification minimale résulte de la partie de la conjecture de Serre déjà démontrée par Ribet. Pour simplifier disons ici que F est le corps à ℓ éléments avec ℓ premier. Les propriétés universelles assurent alors l'existence d'un triangle commutatif, pour tout Σ :

$$\begin{array}{ccc} R_\Sigma & \xrightarrow{\pi_\Sigma} & T_\Sigma \\ \searrow & & \swarrow \\ & \mathbb{Z}_\ell & \end{array}$$

Il faut travailler fonctoriellement et prendre un anneau plus général que \mathbb{Z}_ℓ . Une des idées de Wiles est de trouver un critère pour pouvoir déduire de l'existence de ce triangle la bijectivité de π_Σ . Wiles et Taylor-Wiles en ont en fait écrit 2 qui ont été améliorés entre autres par Faltings et Lenstra; des critères alternatifs ont aussi été développés par d'autres et tout ceci est très clairement expliqués dans le livre par De Smit, Rubin et Schoof avec des preuves originales dûes à Schoof pour l'un des critères et à Rubin pour l'autre; l'exposé de Tilouine aborde aussi ces questions. Il reste à en déduire le théorème en 2 étapes. D'abord régler le cas où Σ est minimal (travail de Taylor-Wiles dans le livre exposé par De Shalit) puis ramener le cas non minimal au cas minimal (dans le livre exposé de Diamond et Ribet). Ces exposés tiennent compte des améliorations apportées aux travaux de départ en particulier par Darmon-Diamond-Taylor.

Tout ceci n'épuise pas le livre; on y trouve aussi :

- . un exposé de Diamond qui explique ses perfectionnements à la preuve de Wiles qui permet de supposer la courbe elliptique semi-stable en 3 et 5 et non en toutes places;
- . un exposé sur l'historique du théorème de Fermat fait par Rosen;
- . un exposé des premiers cas connus du théorème de Fermat fait par Lenstra et Stevenhagen;
- . un exposé de Frey qui montre plus généralement les liens entre certaines équations diophantiennes et certaines propriétés arithmétiques des courbes elliptiques;
- . un exposé de Darmon qui explique les problèmes liés aux valeurs spéciales des fonctions L et de leur dérivée au centre de symétrie (quand la fonction L s'annule en ce point); cela l'amène évidemment à réexpliquer la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer.

Comme on le voit, ce livre représente un travail considérable. Il permet aux lecteurs compétents de comprendre les travaux de Wiles et Taylor-Wiles dans leurs moindres détails et aux lecteurs moins compétents d'ignorer certains détails mais de comprendre en quoi ces travaux apportent de nouvelles perspectives dans au moins un domaine celui des formes automorphes avec les conséquences arithmétiques liées à tout progrès dans ce domaine..

Colette Mœglin,
Université de Paris 7

Errata

Le compte rendu de livre paru dans la Gazette n° 75 "Un mathématicien aux prises avec le siècle" de Laurent Schwartz a été rédigé par Thong Nguyen Quang Do, professeur à l'Université de Besançon.

Revue Astérisque Nouveautés

SÉMINAIRE BOURBAKI

Vol. 1995/96, exposés 805-819

(volume 241)

Comme les précédents volumes de ce séminaire, celui-ci contient quinze exposés de synthèses sur des sujets d'actualité : un exposé sur les espaces d'opérateurs, un sur la classification des C^* -algèbres et un autre sur la géométrie spectrale ; un exposé sur les actions de groupes sur les arbres, un sur la cohomologie d'espaces de formes automorphes et un sur les intégrales orbitales sur certains espaces symétriques ; un exposé sur l'application de méthodes logiques à la géométrie algébrique et un sur la résolution des singularités en géométrie algébrique ; un exposé sur la cohomologie quantique et un sur la géométrie sous-riemannienne, un exposé sur un aspect mathématique de l'analyse d'images, et enfin deux sur les classes caractéristiques.

PÔLES DE DIFFUSION ENGENDRÉS PAR UN COIN

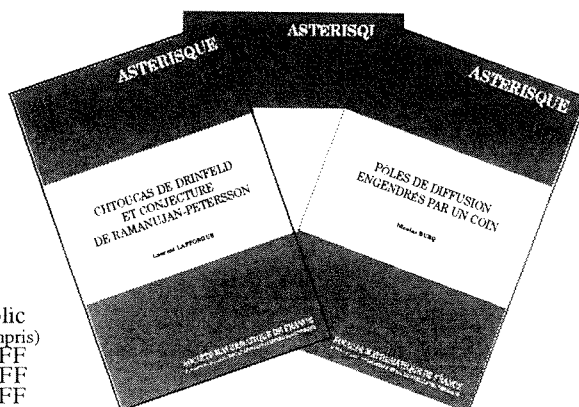
Nicolas Burq

On étudie les pôles de diffusion engendrés par une trajectoire qui relie un coin à lui-même. On donne un développement asymptotique à tous les ordres de (presque) tous les pôles situés sous une courbe logarithmique arbitraire ($\text{Im}z \leq M \log \text{Re}z$). On montre que ces pôles se répartissent asymptotiquement sur des courbes logarithmiques (volume 242).

CHTOUCAS DE DRINFELD ET CONJECTURE DE RAMANUJAN-PETERSSON

Laurent Lafforgue

Ce livre a pour objet principal la conjecture de Ramanujan-Petersson sur les corps de fonctions. On démontre celle-ci pour les représentations automorphes cuspidales de GL_r quand r est impair, et on obtient un résultat partiel quand r est pair. On précise également l'emplacement des zéros des fonctions L de Rankin-Selberg de paires. La démonstration se fait par l'étude des champs classifiant les chtoucas de Drinfeld. Elle combine en particulier le théorème des points fixes de Grothendieck-Lefschetz, le théorème de pureté de Deligne et une version sur les corps de fonctions de la formule des traces d'Arthur-Selberg (volume 243).



Tarifs :
Prix membre/public
(frais de port non compris)
241 : 350 F/500 FF
242 : 85 F/120 FF
243 : 280 F/400 FF

Commandes :
Maison de la SMF, BP 67, 1374 Marseille cedex 9
Tél : 04 91 26 74 64, Fax : 04 91 41 17 51, mail : smf@smf.univ-mrs.fr
(frais de port : Europe = 25 F, hors Europe : 35 F)