– LES TRAVAUX DE JEAN LERAY EN MÉCANIQUE DES FLUIDES –

Jacques-Louis LIONS

Collège de France

Les travaux de Jean Leray sur la mécanique des fluides ont été surtout effectués avant la guerre de 1940. Ils ont profondément modifié l'analyse mathématique, les équations aux dérivées partielles et la mécanique des fluides.

Jean Leray a introduit la notion de solution faible (il dit "solution turbulente") des équations de la mécanique des fluides visqueux incompressibles (équations de Navier-Stokes). Par une série de tours de force (il ne démontre pas les inégalités de Sobolev, mais il n'en passe pas loin, établissant exactement ce qu'il lui faut pour surmonter les difficultés rencontrées), il démontre l'existence et l'unicité d'une solution faible en dimension 2 d'espace, pour un fluide occupant tout l'espace, et l'existence d'une solution faible en dimension 3 d'espace. Il ne peut résoudre le problème de l'unicité en dimension 3, qui est toujours une question ouverte ! Il étudie la régularité des solutions et la structure des singularités éventuelles.

Il faut comprendre que, à l'époque où Jean Leray établit tout cela –qui a servi de base à toutes les recherches sur les équations de la mécanique des fluides depuis maintenant plus de 60 ans ! –, toutes les idées brièvement évoquées ci-dessus sont révolutionnaires. Très peu de mathématiciens travaillent alors sur les équations aux dérivées partielles non linéaires. Les solutions faibles de Sobolev (introduites pour des problèmes linéaires) ne sont pas encore connues, ni les solutions distributions de Laurent Schwartz qui fixèrent le cadre général linéaire. De leur côté, les spécialistes de mécanique des fluides s'interrogent sur le "sens physique" de "solutions" qui peuvent devenir infinies...

Il faut tout l'évidente puissance mathématique de J. Leray pour arriver à faire entendre son point de vue ! D'autant que la terminologie utilisée ("solution turbulente") prête à... discussions. Mais les simulations numériques directes récentes ne montrent-elles pas que "toute l'information" est dans les équations de Navier-Stokes, et donc que, là aussi, J. Leray avait raison ?

Evidemment, un mathématicien de cette classe ne se borne pas aux équations de Navier-Stokes. Il travaille sur toutes les équations aux dérivées partielles non linéaires elliptiques et paraboliques. Alors qu'il réfléchit dans ce cadre, il rencontre par hasard, dans les jardins du Luxembourg, le jeune mathématicien polonais Julius Schauder qui, lui, travaille sur la théorie des points fixes dans les espaces (de dimension infinie) de Banach dans un cadre "topologique". Rencontre fulgurante. Le Théorème de Leray Schauder est "bouclé" en quelques semaines. Résultat qui a servi de base à *toutes* les recherches sur la théorie des points fixes, degré topologique et applications.

Prisonnier de guerre pendant la guerre de 1940, J. Leray poursuit ses recherches dans des conditions très difficiles. Il sait bien qu'il lui est impossible de cacher ses manuscrits et toutes les applications potentielles du développement de ses idées en hydrodynamique et en aérodynamique. C'est pourquoi il change de sujet, se dirigeant vers des sujets plus abstraits, en topologie. Il va encore y faire la démonstration de sa puissance créatice.

C'est Peter Lax qui a organisé la partie "Equations aux dérivées partielles" de la publication des œuvres complètes de Jean Leray, sous la responsabilité d'ensemble de Paul Malliavin, et qui y a ajouté, ou fait ajouter, des commentaires et compléments extrêmement intéressants et importants.

JEAN LERAY ET L'ANALYSE ALGÉBRIQUE

Pierre SCHAPIRA

Université Paris 6

Une bonne partie des mathématiques d'aujourd'hui utilise le langage des faisceaux, introduit par Jean Leray dans les années 45, et la cohomologie des faisceaux qui serait inopérante sans les suites spectrales, elles aussi introduites par Leray (ou bien sans les catégories dérivées introduites quinze ans plus tard par Grothendieck).

Les faisceaux rendent compte de propriétés locales et leur cohomologie mesure l'obstruction à passer du local au global. Rien d'étonnant à ce que les équations aux dérivées partielles linéaires analytiques (EDPLA) se prêtent à ce langage, et dans le domaine complexe le problème essentiel est de comprendre la structure du faisceau des solutions holomorphes de l'équation homogène $Pf = 0$ (P désigne ici un opérateur différentiel sur une variété analytique complexe X) et en particulier de contrôler le domaine d'existence de f. L'idée centrale (qui peut sembler banale aujourd'hui) est que "les singularités se propagent le long des