

DE BACHELIER À BLACK-SCHOLES-MERTON

Hélyette GEMAN

Professeur de Finance à l'Université Paris IX Dauphine et à l'ESSEC*

Membre d'Honneur de l'Institut des Actuaire Français

Lorsque Louis Bachelier introduisit dans sa *Théorie de la Spéculation* en 1900 les options sur actions, il ne savait pas que celles-ci, étendues aux taux de change, aux taux d'intérêt et aux matières premières, allaient représenter avant la fin du siècle un marché colossal (796 millions d'options échangées en 1996, 100 milliards de dollars de montant nominal pour les instruments dérivés échangés en 1997). Et il disparut en ignorant que le modèle de valorisation qu'il avait proposé non seulement faisait de sa thèse le premier travail -ô combien remarquable à de multiples égards- de mathématiques appliquées à la finance mais aussi que, "ajusté", ce modèle allait devenir en 1973 le paradigme de référence pour la valorisation des instruments dérivés, à savoir la formule de Black-Scholes-Merton. Dans les vingt-cinq dernières années, celle-ci a donné lieu à des développements technologiques colossaux -mathématiques, financiers, informatiques-, en même temps que justice a été quelque peu rendue à Bachelier par la communauté mathématico-financière internationale et plus particulièrement par nous, Français, qui éprouvons, lors de conférences de praticiens à Londres, Zurich ou New York, un grand bonheur à présenter à des traders médusés les profils de gain de combinaisons d'options (straddles, strangles, etc). sortis non pas de leurs écrans mais des pages 66 et 67 de la thèse de Bachelier intitulées "opérations complexe".

La reconnaissance de celle-ci a pris récemment une dimension supplémentaire avec l'obtention, en Octobre 1997, du prix Nobel d'économie, par Robert Merton, Myron Scholes et le défunt Fisher Black. Robert Merton, aussi bien dans son livre *Continuous Time Finance* que dans divers écrits et en particulier dans la première phrase de l'abstract de son article fondateur de 1973 "Theory of Rational Option Pricing", rend à Bachelier ce qui lui revient : "The long history of the theory of option pricing began in 1900 when the French mathematician Louis Bachelier deduced an option pricing formula..." En regardant derrière nous à la fin de ce siècle inauguré par la date "magique" de la thèse de Bachelier, nous ne pouvons qu'éprouver un sentiment de vertige devant la quantité de travaux et de découvertes scientifiques qui y ont été accomplis : en physique, en biologie, en chimie, dans

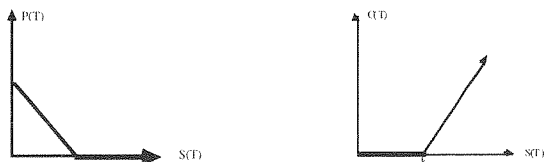
* Les arguments développés ici représentent le point de vue, subjectif par définition, de quelqu'un qui a exclusivement fait de la finance (et de l'assurance) pendant ces treize dernière années, dans des activités partiellement opérationnelles, essentiellement d'enseignement et de recherche, tout en ayant eu dans ces dernières l'honneur de continuer à cheminer à côté de grands probabilistes de notre pays.

diverses branches des mathématiques et dans d'autres disciplines. Les deux sujets sur lesquels je m'attarderai sont celui des probabilités et de la finance. Sur le premier sujet, ce siècle a vu une succession remarquable de résultats, théories et objets mathématiques nouveaux. La finance, quant à elle, est passée de l'état de non science à une discipline qui peut mériter le titre de science.

Notons qu'à l'inverse, les sciences actuarielles existaient déjà de façon structurée au début du siècle, avec des noms aussi prestigieux que Bernoulli et Huygens attachés à elles. Elles étaient largement développées en Angleterre au 19ème siècle; en France, le Cercle des Actuaires fut fondé en 1870, l'Institut des Actuaires en 1890. Et ceci ne paraît pas étonnant si l'on se souvient des missions de la finance et de l'assurance dans les siècles antérieurs : d'un côté, une situation où les *marchés de capitaux* -là où les entreprises, les collectivités locales et l'Etat vont aujourd'hui trouver leur besoin de financement- n'existaient pas et où le *risque* se réduisait tristement au fait d'être jeté en prison lorsqu'on ne pouvait rembourser un emprunt contracté au taux de l'usure (ce qui explique que les banquiers et les entrepreneurs appartenaient essentiellement à de riches familles). Dans l'autre cas, la situation de *transfert de risque* existait déjà par nécessité : les assureurs devaient assurer des navires qui partaient avec des cargaisons coûteuses pour des pays lointains et leurs actuaires calculaient la prime de risque correspondante. De la même façon, la fameuse formule de Black-Scholes-Merton fournit la valeur de la *prime de l'option* que l'acheteur paie au vendeur. Dans les deux cas, il s'agit d'achat d'assurance ou de passation du risque de celui qui ne sait pas ou n'a pas vocation économique à le gérer vers celui qui a l'expertise pour le faire.

Le modèle de Black-Scholes-Merton

Une option d'achat (ou call) européen de maturité T , de prix d'exercice k et écrite sur une action S confère à son détenteur le droit d'acheter à l'instant T l'action au prix k . L'option ne sera exercée (ou la "prime ne sera levée", dans la terminologie de Bachelier) que si la valeur de marché $S(T)$ de l'action en T est supérieure à k ; sinon, l'option ne vaut rien. Ceci permet de définir de façon équivalente l'option d'achat comme un titre financier conférant à son détenteur le droit en T au flux $\max(0, S(T) - k)$, grandeur qui est par définition la valeur $C(T)$ du call en T



L'option de vente (ou put) européen donne le droit de vendre en T l'action au prix k ; sa valeur en T est donc $P(T) = \max(0, k - S(T))$

Notons immédiatement qu'un agent économique qui à l'instant t investit son épargne dans une action S (France Telecom, Gervais Danone, etc) ou dans un panier diversifié d'actions représenté par l'indice CAC 40 possédera à l'horizon T une richesse $W(T) = S(T).n$ (où n est le nombre d'actions achetées).

Si au lieu d'investir toute sa richesse $W(t)$ dans n actions, il achète n' ($n' < n$) actions et un nombre égal de puts européens écrits sur cette action et de prix d'exercice k qu'il aura lui-même choisi, sa richesse en T s'écrira :

$$W(T) = n'S(T) + n' \max(0, k - S(T)) = n' \max(k, S(T))$$

Cette expression satisfait les deux motivations fondamentales de l'agent, à savoir profiter d'une hausse des marchés au travers de $S(T)$ si celle-ci a lieu; ne pas voir son épargne réduite à néant en cas de baisse des marchés mais avoir une richesse au moins égale à $n'k$.

Ce type de considérations devrait encourager les épargnants à investir dans des produits de type actions qui sont indispensables à la croissance des entreprises et au développement économique (ce comportement, systématique aux Etats Unis, explique en partie la force de l'économie américaine; le bien fondé de la vague récente de fusions-acquisitions est un autre débat). L'addition de l'option d'achat (ou put) à l'action permet de constituer ce que l'on appelle un "portefeuille assuré", le risque de marché étant *transféré* vers l'institution financière qui a vendu le put. Ceci se pratique aujourd'hui en France au niveau plus global de Sicav ou Fonds Communs de Placement qui sont construits selon ce principe. Comment l'institution financière gère le risque associé aux puts qu'elle a vendus est un point que nous discuterons plus loin et qui fait normalement partie de son expertise.

Revenons à notre problème de valorisation de l'option européenne à l'instant t . L'on démontre, par un raisonnement financier élémentaire pour les cas "classiques", que le calcul du prix du put $P(t)$ se ramène à celui du call. Nous nous concentrerons donc sur celui-ci, comme l'ont d'ailleurs fait les articles fondateurs de Black & Scholes (1973) et Merton (1973).

Il est clair que pour obtenir la valeur en t du flux $\max(0, S(T) - k)$, il est indispensable de formuler un certain nombre d'hypothèses, à la fois de nature économique et mathématique. Ce sont ces hypothèses, bien plus que la conclusion (qui en découle par un raisonnement mathématico-financier; et il existe plusieurs démonstrations du résultat) qui constituent le modèle de Black-Scholes-Merton. La première hypothèse, H_1 , est que les marchés fonctionnent en continu, condition indispensable pour que la position (ou le portefeuille "dupliquant" l'option) puisse être réajustée sur tout sous-intervalle de temps infinitésimal $[t, t + dt]$ de la durée de vie $[0, T]$ de l'option. Cette hypothèse établit en fait un "paysage" de temps continu qui était quasi inconnu en finance jusqu'aux travaux précurseurs de Merton en 1969.

La deuxième hypothèse, H_2 , est que les taux d'intérêt sont constants sur la durée de vie de l'option, ce qui dans une perspective de capitalisation en temps continu cohérente avec le premier point implique qu'un franc investi à l'instant 0 est devenu à l'instant t la quantité $M_t = \exp(rt)$, où M représente ce que l'on appelle l'actif sans risque et qui est matérialisé par un instrument du marché monétaire. La troisième hypothèse, H_3 , est le non-paiement de dividendes sur l'action pendant la durée de vie de l'option, la quatrième hypothèse, H_4 , celle d'absence de coûts de transaction.

Notons que ces hypothèses H_2, H_3, H_4 consistent seulement à simplifier le problème (et nous savons aujourd'hui les "relâcher"). Le modèle repose en fait sur les deux hypothèses fondamentales ci-dessous :

H₅. Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage sur les marchés, hypothèse centrale dans la finance des dérivés et qui est d'autant plus légitime que des acteurs chaque jour plus nombreux contribuent à faire disparaître les anomalies de marché. Cette hypothèse peut s'exprimer de différentes façons, par exemple par le fait que deux positions qui ont même valeur en T dans tous les états du monde (c'est-à-dire pour tout ω appartenant à Ω , où (Ω, F, F_t, P) désigne l'univers probabilisé représentant l'aléatoire de l'économie, P est la probabilité objective (ou statistique) et F_t la filtration d'information disponible à l'instant t), alors ces deux positions ont la même valeur en t .

H₆. L'évolution du prix S_t de l'action sous-jacente sur $[0, T]$ est représentée par l'équation différentielle stochastique suivante

$$(1) \quad \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

où $\mu \in \mathbf{R}$, $\sigma \in \mathbf{R}^{+*}$ et (W_t) désigne un P -mouvement brownien.

Cette équation (1) mérite une foule de commentaires économiques, mathématiques et historiques. Le premier membre

$$\frac{dS_t}{S_t} = \frac{S(t+dt) - S(t)}{S(t)}$$

représente le rendement de l'action S_t sur l'intervalle $[t, t+dt]$ (lequel est exclusivement obtenu par la plus-value (algébrique) réalisée puisqu'il n'y a pas de dividende).

Ce rendement est donc représenté par un drift μdt (terme de tendance) qui est l'espérance de $\frac{dS_t}{S_t}$ sous la probabilité objective et un terme aléatoire σdW_t , d'autant plus important que la volatilité σ est élevée :

$$E_P\left(\frac{dS_t}{S_t}\right) = \mu dt; \quad \text{Var}\left(\frac{dS_t}{S_t}\right) = \sigma^2 dt$$

Par ailleurs, plus la date $t+dt$ est éloignée, plus grande est la variance de $\frac{dS_t}{S_t}$, ce qui est intuitivement raisonnable : les anticipations sont d'autant plus entachées d'incertitude qu'elles sont relatives à un futur lointain.

Venons-en maintenant à la discussion précise du terme fondamental dans l'équation (1), à savoir σdW_t : fondamental pour les traders d'options car σ représente la volatilité du sous-jacent (et l'on verra ci-dessous que le prix du call $C(t)$ dans la formule de Black-Scholes-Merton est une fonction biunivoque de σ , ce qui fait que les marchés d'options sont des marchés de volatilité). Fondamental pour les probabilistes car dW_t représente la différentielle du mouvement brownien standard $(W_t)_{t \geq 0}$, ce processus stochastique extraordinaire que le botaniste britannique Brown avait perçu en 1828 derrière le mouvement des particules de pollen en suspension dans l'eau. Bachelier dans sa thèse utilise (sans le nommer) ce processus en dimension 1 pour représenter le caractère aléatoire de la fluctuation des cours boursiers et en déduire les prix d'options. La terminologie "mouvement brownien" avait déjà commencé à être utilisée au cours du 19ème siècle par de nombreux physiciens qui essayaient d'en comprendre la nature et avaient conclu que les changements de direction étaient dus aux chocs très nombreux entre les particules et la matière environnante. En 1905, par des considérations de mécanique statistique qui le conduisent à l'équation de la chaleur (équation qui, à un changement de variable près, sera vérifiée par le prix du call dans le modèle de Black-Scholes-Merton), Einstein explicite de façon rigoureuse la densité de la loi de la position à un *instant donné* d'une particule animée d'un mouvement brownien.

Ce fut en 1923 que Wiener démontra (en le construisant) l'existence d'un processus aléatoire appelé mouvement brownien (mathématique) ou processus de Wiener et ayant les propriétés pressenties par le botaniste inventif et définies plus clairement par le mathématicien-financier avant l'heure et le physicien génial. Il est important de ne pas oublier de citer ici le nom du grand Paul Lévy qui apportera un peu plus tard des contributions majeures à l'étude du mouvement brownien.

Sur l'histoire et les développements fascinants sur le mouvement brownien au cours du 20ème siècle, je renvoie le lecteur aux excellents articles de J. F. Le Gall "Introduction au Mouvement Brownien", publié en 1989 dans la Gazette des Mathématiciens, de J. P. Kahane "Le Mouvement Brownien" dans les Actes du Colloque Dieudonné de Janvier 1996 et pour la période plus récente, de M. Yor "Le Mouvement Brownien : Quelques Développements de 1950 à 1995". Je me contenterai de discuter, parmi les innombrables et magnifiques propriétés mathématiques qu'il possède (et qui ne sont très probablement pas toutes connues à ce jour), celles qui ont une interprétation économique-financière. L'une d'entre elles est la propriété de Markov : pour représenter le futur de la particule brownienne - et du prix de l'action S dirigé par la dynamique décrite dans l'équation (1) -, la connaissance du "passé", c'est-à-dire de la trajectoire du prix avant la date t , n'apporte aucune information supplémentaire par rapport à l'information contenue dans $S(t)$. Bien que son modèle ne fût pas strictement l'équation (1) -j'y viens un peu plus loin- la propriété de Markov est très

importante pour Bachelier qui, en même temps qu'il utilise des probabilités conditionnelles, notion fondamentale qui ne sera introduite formellement que par Kolmogorov en 1933, établit par ailleurs la formule relative aux probabilités de transition, cruciale dans les processus de Markov, (alors que l'introduction des chaînes de Markov - processus de Markov en temps discret - par leur auteur ne se fera qu'en 1907).

Dit en d'autres termes, l'analyse technique c'est-à-dire l'étude du passé des cours boursiers en termes de cycles dans les trajectoires, de "head and shoulders", points extrêmes etc... (qui peut se révéler profitable sur certains marchés et pour certains types d'actifs financiers) n'est pas compatible avec le référentiel de Bachelier et de Black-Scholes-Merton.

Revenons maintenant à la modélisation mathématique du cours de l'action dans l'univers de Bachelier. Même si le mouvement brownien n'existait pas au sens strict en 1900, la façon la plus claire de décrire la dynamique de $(S(t))$ telle que proposée par Bachelier est

$$(2) \quad dS(t) = \sigma dW(t)$$

Le processus de prix de l'action était en fait pour Bachelier une marche aléatoire (donc une martingale) et sa justification, non sans intérêt, était selon lui la suivante : puisqu'il y a toujours des acheteurs et des vendeurs à la Bourse, c'est que "le marché ne croit à un instant donné ni à la hausse ni à la baisse du cours vrai". Et nous savons que, lorsque le pas tend vers 0 et sous des conditions mathématiques précises, la marche aléatoire converge vers le mouvement brownien (propriété qui est d'ailleurs utilisée pour simuler sur ordinateur les trajectoires du mouvement brownien et générer les simulations de Monte Carlo, massivement utilisées en finance aujourd'hui pour valoriser des options complexes ou calculer la "Value at Risk", c'est-à-dire la perte maximale attachée à une position donnée, à un horizon donné, à un niveau de confiance donné).

Notons que les différences entre l'équation (1) et l'équation (2) ont des conséquences très importantes, tant du point de vue mathématique que financier : l'absence du dénominateur $S(t)$ figurant dans l'équation (1) a pour conséquence que

$$S(t + dt) = S(t) + \sigma S(t) dW_t$$

est une fonction affine de la quantité dW_t , qui par construction du mouvement brownien, suit une loi normale (d'espérance nulle et d'écart type \sqrt{dt}), donc peut prendre des valeurs négatives.

Cette propriété est, d'un point de vue financier, "fatale" pour le modèle de Bachelier. Le principe de responsabilité limitée, c'est-à-dire le fait que détenir une action ne peut entraîner la perte de ses biens personnels ou de sa maison parce que la valeur de l'action est devenue négative, a été un élément crucial de la création d'entreprises et donc du développement économique par des entrepreneurs n'ayant pas de fortune personnelle : les fonds propres

qui permettent de financer l'activité de l'entreprise correspondent aux actions détenues y compris par de petits épargnants puisque ceux-ci ne peuvent pas perdre plus que leur mise initiale (la valeur d'achat des actions).

Par conséquent, le remplacement de l'équation (2) par l'équation (2')

$$(2') \quad \frac{dS_t}{S_t} = \sigma dW_t$$

serait une amélioration car le premier membre, comme on l'a vu, devient le rendement sur l'intervalle $[t, t + dt]$ et donc peut prendre des valeurs négatives.

Mais cette étape n'a pas été proposée par les financiers car elle a un inconvénient économique fondamental :

$$E_P \left[\frac{dS_t}{S_t} \right] = 0$$

où P est la probabilité "physique" ou statistique définie plus haut comme représentant l'aléatoire de notre univers.

Or, un agent économique ordinaire (petit épargnant ou investisseur institutionnel) ne va pas investir sa richesse dans l'action $S(t)$ s'il doit avoir une espérance de rendement nul :

- a) il sait que tout capital peut être au moins rémunéré au taux sans risque
- b) il est averse au risque, donc il n'investira dans l'action (*actif risqué*) que si on le rémunère non seulement sur la valeur temps de l'argent mais si on y rajoute une prime de risque.

C'est sur la base de ces considérations qu'au milieu des années 1960, l'équation (1), équation utilisée depuis dans des centaines d'articles de finance, apparaît pour la première fois en économie financière sous la plume de Paul Samuelson, prix Nobel d'économie et directeur de thèse de Robert Merton.

Le membre de droite de l'équation (1) est pour les mathématiciens un mouvement brownien arithmétique, qui représente le processus des rendements. Le processus (S_t) est dit suivre un mouvement brownien géométrique. La présence du mouvement brownien (W_t) standard dans la représentation de la dynamique de (S_t) (ou dans un modèle de déformation de la gamme des taux) a des conséquences très importantes en finance.

- (i) à t fixé, W_t (ou une fonction affine de W_t) est une gaussienne et cela implique que quantité de calculs, non nécessairement immédiats au départ, peuvent être menés à bien au prix de certains efforts (valorisation d'options dites exotiques par exemple).
- (ii) les accroissements du processus sont indépendants et stationnaires et cette propriété est elle aussi très importante, tant au niveau des calculs que de l'interprétation.

Revenons maintenant à la démonstration de la formule de Black-Scholes-Merton telle que proposée par les auteurs.

L'hypothèse mathématique fondamentale est l'équation (1)

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW_t$$

qui est en fait une équation différentielle stochastique (EDS) particulière.

La notion d'EDS fut introduite pour la première fois en 1938 par le mathématicien russe Serge Bernstein dans un article écrit en français pour une revue française; elle fut ensuite étudiée par Itô en 1946, qui s'intéressa en particulier aux équations différentielles stochastiques ayant pour solutions des processus de diffusion et dont fait partie notre équation (1), c'est-à-dire à trajectoires continues. C'est pour cela, pour son fameux lemme, et plus généralement pour le calcul stochastique qu'il a développé que le nom d'Itô est présent dans tout article de finance portant sur les instruments dérivés.

Essayons de reconstruire, au travers de ce qui est écrit dans des livres relatant l'histoire financière récente mais aussi de notre compréhension de la finance et du calcul probabiliste, la mise en oeuvre de la formule de Black-Scholes-Merton. Nous sommes au début des années 1970 au MIT. Paul Samuelson, professeur d'économie, a comme étudiant doctoral Robert Merton, venu du Caltec avec un mastère de mathématiques appliquées. Samuelson et Merton travaillent ensemble sur la valorisation de warrants (variété particulière d'options) par une méthodologie d'optimisation chère aux économistes. Au même moment, Myron Scholes est un jeune professeur de finance au MIT et cherche avec Fisher Black -lequel travaille pour une institution financière de Boston- à valoriser des options sur actions, instruments qui commençaient à représenter un volume de transactions non négligeable. Black et Scholes ont l'intuition économique fondamentale de la construction d'un portefeuille constitué à partir de l'action sous-jacente et du call. Leur grande référence est le modèle financier appelé Capital Asset Pricing Model élaboré au début des années 1960 par Sharpe (futur prix Nobel d'économie) à partir des travaux de Markowitz (futur prix Nobel d'économie) et exprimant que sous certaines conditions de marchés dits parfaits (absence de coûts de transaction, actifs infiniment divisibles, etc...), le rendement (sur une période) d'un actif risqué k a une espérance qui s'écrit

$$(3) \quad E_P(\tilde{\mathbf{r}}_k) = \text{taux sans risque} + \text{prime de risque}$$

où la prime de risque est proportionnelle à la surperformance espérée du "marché" (représentée par un indice boursier m de rendement $\tilde{\mathbf{r}}_m$) par rapport au taux sans risque \mathbf{r}_f et à la covariance entre $\tilde{\mathbf{r}}_k$ et $\tilde{\mathbf{r}}_m$.

Quoi qu'il en soit, Black et Scholes n'aboutissent pas complètement dans leur démarche, même si leur idée d'éliminer la (seule) source de risque $\tilde{\mathbf{r}}_m$ entre S_t et C_t est excellente. C'est là que l'apport de Merton est décisif. En même temps qu'il travaille avec Samuelson, le jeune Robert Merton est

fasciné par le temps continu (qu'il est le premier à avoir introduit en finance en 1969; d'où le titre du livre publié en 1990 et qu'il a symboliquement intitulé "Continuous-Time Finance"), par le calcul stochastique et par la thèse de Bachelier. Et l'application du lemme d'Itô au prix du Call C_t

$$(4) \quad dC_t = \left(\frac{dC_t}{dt} + \mu S_t \frac{dC_t}{dS_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{d^2 C_t}{d^2 S_t} \right) dt + \frac{dC_t}{dS_t} \sigma S_t dW_t$$

permet d'obtenir une nouvelle équation différentielle stochastique qui, combinée à l'équation (1) permettra d'éliminer le mouvement brownien. Le portefeuille \mathcal{P} que voulaient construire Black and Scholes avec la bonne intuition économique est désormais fourni par une observation élémentaire. Si on met dans \mathcal{P} à l'instant t un call et un nombre n ($n \in \mathbf{R}$ à préciser) d'actions, la différentielle de la valeur $V_{\mathcal{P}}$ de \mathcal{P} s'écrit :

$$(5) \quad dV_{\mathcal{P}}(t) = dC_t + n dS_t$$

et ne contiendra plus dW_t si $n = -\frac{\partial C_t}{\partial S_t}$.

Le portefeuille a désormais la propriété remarquable d'être (localement) sans risque et, par *absence d'opportunité d'arbitrage*, d'avoir un rendement exactement égal à r :

$$(6) \quad \begin{aligned} dV_t &= rV(t)dt \\ &= r \left[C(t) - S(t) \frac{\partial C_t}{\partial S_t} \right] dt \end{aligned}$$

En égalant cette expression de dV_t à celle de l'équation (5), nous obtenons l'équation aux dérivées satisfaite par le prix du call

$$(7) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC$$

où la condition terminale $C(T) = \max(0, S(T) - k)$ joue bien sûr un rôle très important.

L'équation (6) se ramène par un changement de variable à l'équation de la chaleur et admet une solution unique

$$C(t) = S(t)N(d_1) - ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

où

- N est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (dans les notations de la finance)
- $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\log \left(\frac{S(t)}{ke^{-r(T-t)}} \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) \right]$
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

Le "véga" du call, $\frac{\partial C}{\partial \sigma}$, est strictement positif et la relation entre $C(t)$ et σ est biunivoque, ce qui fait que les traders parlent plus souvent du "prix de la volatilité implicite" que du prix du call.

Quantité d'autres observations peuvent être faites à ce niveau. La seule que je ferai est la mise en évidence - par des arguments mathématiques incorrects mais qui ont le mérite de donner l'intuition (et qui se raccorderont à des propriétés établies un peu plus loin) - de la propriété de *duplication locale* du call. Dans l'équation (5), le portefeuille $V(t)$ qui est localement sans risque par construction se comporte comme une certaine quantité $\alpha(t)$ (positive ou négative a priori) d'instruments du marché monétaire $M(t)$, ce qui donne

$$C(t) = S(t) \frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \alpha(t) M(t)$$

où les quantités $\Delta_t = \frac{\partial C_t}{\partial S_t}$ et $\alpha(t)$ varient bien sûr au cours du temps.

Cette propriété de "redondance" entre le call (l'instrument dérivé) et les deux actifs "primitifs" est remarquable car elle permet de valoriser le call par arbitrage tout en rendant celui-ci "inutile", en apparence tout du moins. Je voudrais à ce propos faire quelques commentaires sur l'article publié le 4 novembre 1997 par J.P. Bouchaud et M. Potters dans le journal économique *La Tribune*, dans un débat non polémique mais scientifique puisque je respecte grandement leurs travaux en sciences physiques. Je pense que l'article contient beaucoup d'inexactitudes et que son titre "Un prix Nobel de l'économie sans risque" est un contresens. La propriété de redondance évoquée plus haut ne rend pas l'univers de Black-Scholes-Merton sans risque (ce débat a d'ailleurs eu lieu en 1979 sous la plume de Hakansson, professeur de finance à Berkeley, donnant lieu à ce qu'on appelle en finance le paradoxe de Hakansson). L'économie de Black-Scholes-Merton est *risquée par définition* puisqu'on y échange de la volatilité, c'est à dire de la variance. Et le fait que ce risque soit matérialisé, en tout cas dans la forme non généralisée qui prévaut aujourd'hui, par un seul petit nombre σ le rend palpable et immédiat pour tout un chacun qui ne peut avoir l'excuse d'avoir été aveuglé par la complexité du modèle. Les "déroutes financières récentes" qu'ils évoquent n'ont rien à voir avec les "limites mal perçues" du modèle de Black and Scholes mais sont dues au fait que des agents économiques se sont mis à faire ce pour quoi qu'ils n'avaient aucune compétence, à savoir *vendre du risque*. Le fait que Volkswagen réduise à néant des années de bénéfices accumulés dans la production de voitures en prenant des positions spéculatives sur les instruments dérivés sans en avoir la compétence est aussi aberrant que serait celui de confier à Volkswagen la responsabilité de la construction d'une centrale nucléaire.

Il suffit d'avoir des amis dans des institutions financières à New York pour savoir qu'ils ont depuis longtemps généralisé le modèle de Black-Scholes-Merton pour l'adapter à la réalité. Les trajectoires de l'actif ne sont pas nécessairement continues, comme le dit l'équation (1), mais ils le savent et l'ont intégré. Merton le sait aussi puisqu'il écrit dès 1976 un article intitulé "Option pricing when trajectories are discontinuous". Quant au fait que les

rendements observés, surtout sur des courtes périodes, ne soient pas normaux (à cause en particulier de l'épaisseur des queues de distribution), les traders d'options (et du sous-jacent) le savent aussi puisque leur σ n'est pas constant mais évolue de façon aléatoire au cours du temps (et même de la journée). Et dans un merveilleux petit article vide d'équations mais rempli d'idées et écrit au début des années 1980, le brillant Fisher Black expliquait comment l'arrivée d'*information* était prise en compte par ajustement du prix de l'option au travers de la *volatilité*; et il comparait l'efficacité de l'introduction de cette *volatilité stochastique* à l'introduction de *sauts* par Merton.

“La théorie de Black and Scholes est en contradiction avec l'existence même des marchés d'options puisque des clones parfaits peuvent être réalisés”. Ceci est inexact, comme le reconnaissent Bouchaud et Potters un peu plus loin, puisque nous sommes en présence de volumes colossaux échangés soit sur des marchés organisés, soit entre deux contre-parties données. C'est en fait le contraire qui s'est produit. “Reality will eventually imitate theory” avait écrit Merton il y a fort longtemps. Il existe peu d'exemples aussi remarquables de prophétie qui s'auto-réalise. J'en donnerai quelques explications, qui ne sont certainement que parcellaires :

1) La robustesse au sens mathématique de la formule, qui se traduit par diverses propriétés et qui fait que dans une version étendue du modèle que les praticiens utilisent aujourd'hui en définissant des “surfaces de volatilité implicite” $\sigma_{\text{imp}}(k, T)$ (alors que cette fonction devrait être constante par rapport aux deux arguments selon le modèle original), chaque quantité est calculée à partir du prix de marché de l'option de prix d'exercice k et de maturité T par inversion de la formule de Black-Scholes-Merton.

2) Ce modèle d'une économie élémentaire où sont négociés deux actifs, l'actif sans risque et un actif risqué, donne pour la première fois une réalité au chapitre 7 du livre “Théorie de la Valeur” par Gérard Debreu (prix Nobel d'économie), dans lequel celui-ci parle de marchés complets, c'est à dire de marchés où tout actif contingent est répliquable par les actifs de base. Dans l'univers de Black-Scholes-Merton, tout flux aléatoire positif \tilde{H} payé en T - donc nécessairement de la forme $f(S_T)$ - , dont la valeur réalisée $H(\omega)$ sera contingente à l'état du monde ω ($\omega \in \Omega$) prévalant en T , peut être dupliqué par une mise de fonds initiale continuellement réajustée entre l'actif risqué S_t et l'actif sans risque M_t . On pourra écrire \tilde{H} comme une intégrale stochastique par rapport à dS_t (et dM_t) :

$$(8) \quad \tilde{H} = H_0 + \int_0^T \alpha_S dM_S + \int_0^T \beta_S dS_S$$

où le processus bidimensionnel (α_S, β_S) définit la stratégie (auto-finançante) de duplication.

Au delà de cette formule un peu compliquée, qu'il me soit permis ici de recommander à nos étudiants qui s'intéressent à ces sujets d'*apprendre* des bases minimales d'économie financière. Le fait de connaître des “sciences

dures”, même à haut niveau, ne suffit pas pour appréhender correctement les notions fondamentales, celle de risque par exemple. Et il serait présomptueux de réduire à néant le contenu de tous les cours de théorie économique et financière dispensés dans toutes les universités du monde. Dans la même logique, je pense que l’appellation “mathématiques financières” utilisée par certains est malheureuse. Il n’y a pas plus de mathématiques financières que de mathématiques biologiques ou historiques. L’expression est en général annonciatrice de mauvaises nouvelles : soit de travaux mathématiques de qualité médiocre pour lesquels l’argument financier est “l’excuse” ; soit de mathématiques élémentaires servant de base à des calculs financiers eux mêmes très simples.

3) La formule de Black-Scholes-Merton écrite au travers des diverses expressions vues plus haut a le mérite

- de fournir le portefeuille de couverture, donc de dire à celui qui a vendu l’option ce qu’il doit faire au cours du temps pour être en mesure d’assurer le pay-off terminal (cette couverture est encore plus cruciale que la valorisation)
- de donner, grâce à sa forme explicite, les “sensibilités” (qui ne sont autres que des dérivées partielles) aux différentes sources de risque.

Cette propriété est fondamentalement importante dans la réalité opérationnelle, y compris dans les versions étendues du modèle.

4) L’existence d’une formule simple, accessible à tous, dans laquelle le prix de marché de l’option nous donne une information exacte sur le *prix du risque*, permet précisément de bien connaître celui-ci. Je fais certainement partie de ceux qui ne croient pas nécessairement à l’accroissement du welfare collectif au travers de marchés financiers en expansion démesurée. Par contre, ceux-ci ont clairement une contribution indiscutable en termes de “price discovery”, à savoir qu’un risque échangé sur les marchés (donc nécessairement titrisé, véhiculé par un titre financier) est désormais perçu à sa vraie valeur (ou presque).

Il est clair que les banquiers de Corée du Sud ou d’ailleurs n’auraient pu accumuler au cours du temps des prêts colossaux à des promoteurs immobiliers ou autres entrepreneurs ayant dépassé depuis longtemps un niveau de risque admissible si le *risque de crédit* avait été matérialisé ne serait-ce que par un petit σ que les régulateurs n’auraient pu ignorer puisque ces σ auraient été affichés sur les écrans et dans les journaux (et leur “concentration” éventuellement calculée). Le problème de ce risque serait alors resté dans les mains de ceux qui avaient vocation à se l’échanger et non transmis au contribuable, éventuellement modeste et certainement en dehors du jeu, ou à des fonds de solidarité internationale pour lesquels seule une allocation (don ou prêt à long terme) en direction des enfants du Sahel ou d’Ukraine entraîne notre adhésion unanime.

Pour terminer sur le sujet de la valorisation de l’option dans le contexte

de Black-Scholes-Merton et même si cette approche a été développée après 1973 à partir des articles fondateurs d'Harrison-Kreps (1979) et Harrison-Pliska (1981), il convient de mentionner le calcul du prix du call comme l'espérance de son pay-off terminal actualisé.

Nous savons d'après le remarquable théorème de Feynman-Kac (1949) que la solution de l'équation aux dérivées partielles (7) s'écrit comme l'espérance de la valeur terminale $\max(0, S(T) - k)$, *actualisée* puisque le coefficient de C dans l'EDP (7) est précisément r . Nous savons d'après l'aversion au risque des agents que cette propriété ne peut avoir lieu sous la mesure de probabilité objective P . Il suffit d'écrire la prime de risque définie dans la relation (3) comme $\lambda\sigma$ (ce qui est toujours possible puisque σ est non nul) pour obtenir la dynamique de $(S(t))$ dans l'équation de référence (1) sous la forme

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma[\lambda dt + \sigma dW_t]$$

Désormais, il devient naturel d'utiliser le remarquable théorème de Girsanov (1960) (et Cameron-Martin 1944) pour savoir qu'il existe une mesure de probabilité Q équivalente à P dite *ajustée au risque* (celle sous laquelle on accepte de payer pour un flux aléatoire l'espérance de sa valeur terminale actualisée) telle que le processus $(\widehat{W}_t)_{t \geq 0}$ défini par $d\widehat{W}_t = \lambda dt + \sigma dW_t$ soit un Q -mouvement brownien. Le prix actualisé de l'actif risqué S_t est désormais une martingale sous Q ; le prix actualisé de l'actif sans risque est constant, donc une martingale sous Q . Et dans l'univers de complétude de Black-Scholes-Merton, la propriété se transmet au prix du call, lequel peut désormais être de façon élémentaire valorisé comme

$$C(t) = E_Q \left[\max(0, S(T) - k) e^{-r(T-t)} / F_t \right]$$

où $\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma d\widehat{W}_t$ et (\widehat{W}_t) est un Q -mouvement brownien. Ces changements de mesure de probabilité, lorsqu'ils sont *associés à une interprétation économique* ont représenté pour moi dans ces dix dernières années un outil très puissant en finance et en assurance (comme le montrent ci-dessous quelques références, probablement trop nombreuses, à certains de mes travaux). Depuis six ans s'y est ajoutée l'utilisation des changements de temps aléatoires (voir le beau livre d'Itô-McKean) puisque le temps économique n'a aucune raison d'être mesuré à l'horloge du temps calendaire.

En conclusion, nous pouvons légitimement nous émerveiller du nombre de résultats probabilistes remarquables et d'hommes de science de premier ordre rencontrés sur le chemin qui nous a menés de Bachelier à Black-Scholes-Merton. Nous pouvons aussi être émus, après la reconnaissance médiocre de Bachelier par ses contemporains, de l'hommage rendu par le prix Nobel d'économie, fils du plus grand sociologue vivant et membre comme son père de l'Académie des Sciences aux Etats Unis, à l'orphelin, commis de Bourse par nécessité, mathématicien par vocation, financier par génie.

Références

- ANÉ T. et H. GEMAN (1997) "Order Flow, Transaction Clock and Normality of Asset Returns", *Cahier de Recherches du CEREG*
- BACHELIER L. (1900) "Théorie de la Spéculation" Editions Jacques Gabay
- BACHELIER L. (1941) "Probabilités des Oscillations Maxima", *Note aux Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*
- BLACK F. and M. SCHOLES, (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.
- GEMAN H. (1989) "The Importance of the Forward Neutral Probability Measure in a Stochastic Approach to Interest Rates", *ESSEC Working Paper*
- GEMAN H., EL KAROUI N. et ROCHET J. C. (1995) "Changes of Numéraire, Changes of Probability Measure and Option Pricing" *Journal of Applied Probability*
- GEMAN H. and M. YOR, (1993) "Bessel Processes, Asian Options and Perpetuities", *Mathematical Finance*, 3, N°4, 349-375
- GEMAN H. and M. YOR (1996) "Pricing and Hedging Double-Barrier Options : a Probabilistic Approach" *Mathematical Finance*
- GEMAN H. (1997) "Insurance Risk Securitization and Catastrophe Derivatives", *Financial Derivatives and Risk Management*
- HARRISON J.M. and D. KREPS (1979) "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory* 20, 381-408
- HARRISON J.M. and S. R. PLISKA (1981) "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stoch. Proc. Appl.*, 11, 215-260
- ITÔ K. and H.P. Mc KEAN (1965) "Diffusion Processes and their Sample Paths", Springer
- LE GALL J. F. (1989) "Introduction au Mouvement Brownien", *Gazette des Mathématiciens*, 1989, n°40
- KAHANE J. P. (1996) "Le Mouvement Brownien" *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXème siècle, Actes du Colloque Dieudonné SMF Séminaires et Congrès n°3*, 1998
- MERTON R.C. (1973) "Theory of Rational Option Pricing", *Bell. J. Econ. Manag. Sci.*, Vol 4, p. 141-183
- MERTON R.C. (1990) "Continuous-Time Finance" - Blackwell
- REVUZ D. and M. YOR (1994) "Continuous Martingales and Brownian Motion", 2nd edition, Springer
- YOR M. (1997) "Le Mouvement Brownien : Quelques Développements de 1950 à 1995" *Prépublication du Laboratoire de Probabilités de Paris VI*