— SUR L'ŒUVRE MATHÉMATIQUE D'ALAIN GUICHARDET —

Jacques DIXMIER[1]

Alain Guichardet commence ses travaux de recherche en 1956. Il se révèle rapidement comme un thésard doué et travailleur. Il peut bientôt rédiger un mémoire de plus de 20 pages sur une caractérisation des algèbres de von Neumann de type I, qui paraît au Bulletin de la S.M.F. de 1961, puis un mémoire de plus de 80 pages, qui paraît aux Annales de l'Institut Fourier de 1963 et constitue sa thèse, thèse soutenue en 1962. Ce travail concerne les caractères des algèbres de Banach involutives. La notion de caractère est bien connue pour les représentations des groupes finis, et sans doute encore pour les représentations des groupes compacts. Elle a été généralisée aux représentations des groupes localement compacts, puis des algèbres de Banach involutives (on revient des algèbres aux groupes en considérant diverses "algèbres de groupe"). La propriété principale reste valable pour toutes ces généralisations : le caractère caractérise !

Il s'agit donc d'une thèse de mathématiques pures. Mais Guichardet, qui a publié en 1957 quelques notes sur la mécanique quantique, souhaite conserver des contacts avec la physique mathématique. Heureusement les algèbres d'opérateurs ont quelques rapports avec la physique mathématique. Dans les travaux ultérieurs de Guichardet apparaissent les espaces de Fok, les relations de commutation et d'anticommutation, les états quasi-libres, les rotations et vibrations de molécules, les règles de sélection en spectroscopie moléculaire. En raison de mon incompétence, je ne reviendrai pas sur ces travaux dans la suite.

Entre 1964 et 1970, Guichardet publie une série de mémoires concernant les produits tensoriels de C^*-algèbres; sur une algèbre involutive A, une C^*-norme est une norme qui vérifie $||x^*|| = ||x||$, $||x^*x|| = ||x||^2$ pour tout $x \in A$; si A est de plus complète, A est une C^*-algèbre. Soient A, B des C^*-algèbres. Il est important que $A \otimes B$ puisse être muni d'une structure de C^*-algèbre (après complétion). Guichardet prouve qu'il existe une plus grande C^*-norme sur $A \otimes B$; c'est le premier pas vers la définition des C^*-algèbres nucléaires qui jouent actuellement un rôle central dans beaucoup de questions d'analyse fonctionnelle. Guichardet étudie aussi — et c'est important pour les applications — les produits tensoriels infinis, et même continus, de C^*-algèbres.

A partir de 1966 apparaît dans l'œuvre de Guichardet un nouveau thème : l'homologie et la cohomologie des algèbres de Banach et des groupes localement compacts. Le côté algébrique des choses étant déjà bien au

[1] Abrégé d'un exposé fait par J. Dixmier au Colloque en l'honneur d'Alain Guichardet : "Groupes, cocycles, déformations" (Ecole Polytechnique, mai 1996).

point, c'est à l'aspect topologique que se consacre surtout Guichardet. Au début, il s'agit surtout du 1er groupe de cohomologie à valeurs dans une représentation unitaire, en relation avec les fonctions conditionnellement de type positif, les fonctions de type positif indéfiniment divisibles, les représentations des groupes de courants (c'est-à-dire, en gros, les groupes d'applications — par exemple C^∞ — d'un intervalle dans un groupe de Lie). Les groupes étudiés sont d'abord les groupes à classes de conjugaison compactes, les groupe nilpotents, puis certains groupes résolubles, puis des groupes non résolubles tels que le produit semi-direct de $SO(n,1)$ avec $\mathbf{R}^{n+1}$.

Si G est un groupe localement compact, $\widehat{G}$ est l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de G, muni d'une topologie naturelle qui en fait, dans la plupart des cas, un espace presque localement compact. (Le cas où G est commutatif est bien connu). A partir de 1977, Guichardet considère les liens entre la cohomologie de G et la topologie de $\widehat{G}$, en particulier la propriété de Kajdan (qui dit que, pour certains groupes G, la représentation triviale de dimension 1 est isolée dans $\widehat{G}$). Les groupes semi-simples sont étudiés à fond.

A partir de 1979, Guichardet s'attaque aux groupes Ext^1 puis Ext^n, pour deux représentations d'un même groupe. Les résultats s'appliquent dans beaucoup de cas intéressants : groupes de déplacements, groupe de Galilée, groupe de Poincaré. Pour les groupes de Lie résolubles, le lien est fait avec la paramétrisation de $\widehat{G}$ qu'avaient obtenue Auslander et Kostant.

En 1985 surgissent deux nouveaux thèmes : les représentations de longueur finie (celles de longueur 1 sont les représentations irréductibles) et les déformations (formelles) de représentations. Guichardet, dans un article aux Inventiones, généralise aux représentations de longueur finie une construction de représentations unitaires due à Duflo. Il calcule les Ext^n dans le cas unitaire.

En 1987, Guichardet suggère que l'étude des extensions de représentations de G est une manière d'introduire sur $\widehat{G}$ (qui n'était qu'un espace topologique) une structure différentielle. Il faut calculer le carré des éléments de Ext^1 au sens du cup-produit, d'où l'intérêt de l'algèbre Ext^*. Guichardet donne un début de réalisation de son programme pour G semi-simple.

Soit U une représentation unitaire irréductible de G. La catégorie des G-modules de longueur finie à sous-quotients isomorphes à U est équivalente à la catégorie $mod\, A$ des modules de dimension finie sur une certaine algèbre A, algèbre qui apparaît de plus en plus comme un objet fondamental. En 1994, Guichardet calcule A dans des cas étendus.

J'ai laissé de côté, dans ce suivi chronologique, certains travaux de Guichardet. Il faut toutefois mentionner au moins un article de 1970, en collaboration avec Kastler, qui inaugure la théorie ergodique non commutative.

D'autre part, Guichardet travaille actuellement sur les déformations des algèbres de polynômes.

Tous ces mémoires fourmillent de démonstrations difficiles. Guichardet a aussi écrit de très longs articles d'exposition, et six livres (dont certains ont été traduits en anglais ou en russe) :

Leçons sur certaines algèbres topologiques, 1967
Analyse harmonique commutative, 1968
Symmetric Hilbert spaces and related topics, 1972
Systèmes dynamiques non commutatifs, 1974
Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie, 1980
Groupes quantiques, 1995

Nous sommes en présence d'une œuvre importante et variée. Il n'est donc pas surprenant que Guichardet ait attiré de nombreux élèves. Voici la liste de ceux qu'il a dirigés jusqu'à une thèse d'Etat (pour les deux premiers, en collaboration avec Revuz) : Michel Bonnard (1969), Bernard Guennebaud (1973), Dang Ngoc (1974), Jean-Luc Sauvageot (1976), Patrick Delorme (1978), Joëlle Pichaud (1983), Fokko Du Cloux (1984), Philippe Blanc (1985).

Mon cher Guichardet, nous te souhaitons une retraite voyageuse, fastueuse, fructueuse, et surtout heureuse.