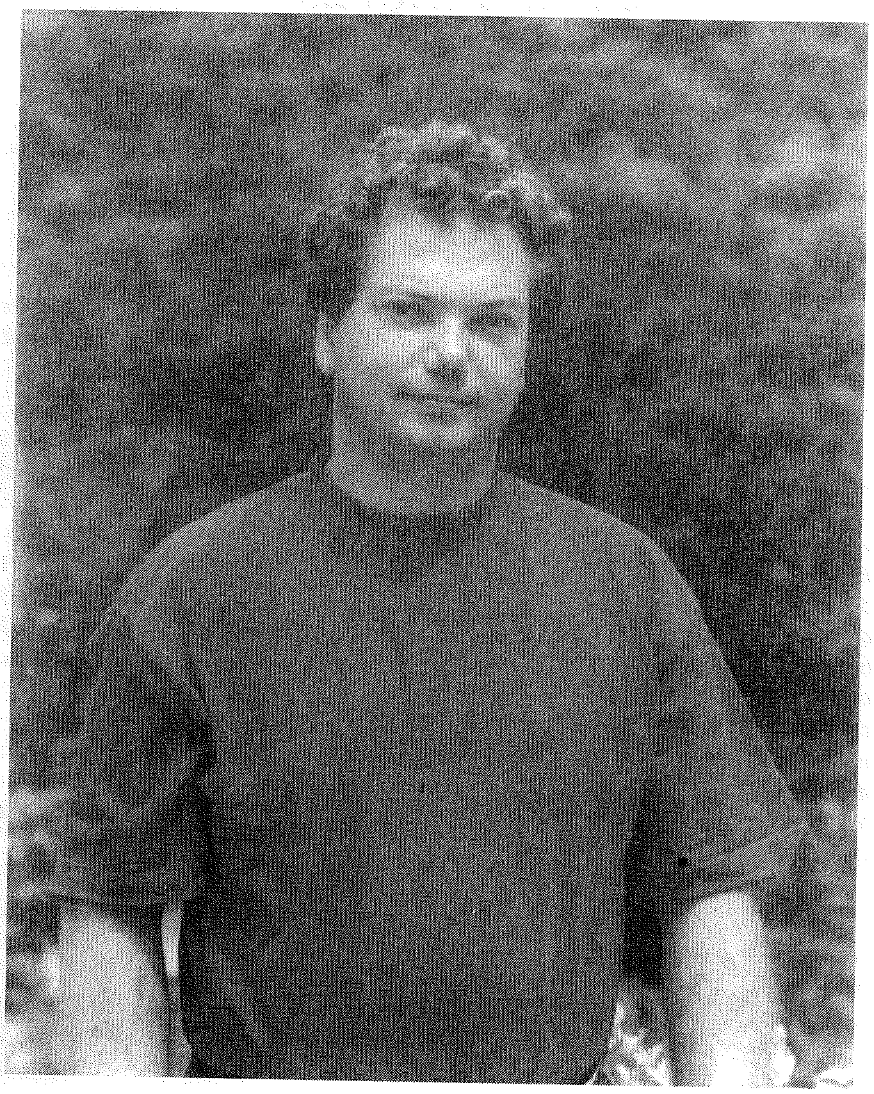

Jean-Christophe Yoccoz

INTERVIEWS MEDAILLES FIELDS

ENTRETIEN AVEC JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

Olivier GÉRARD

Quel est votre plus ancien souvenir mathématique?

Je n'ai pas de réponse toute prête, il faudrait vraiment que je réfléchisse... J'ai des souvenirs très confus avant mais rien d'aussi précis. Mais j'ai eu un professeur exceptionnel en terminale qui s'appelait monsieur Gerll et là j'ai effectivement des souvenirs vraiment merveilleux. Il nous a ouvert des tas d'horizons. J'aimais les mathématiques bien avant...mais...

Quel est le résultat que vous auriez aimé démontrer?

Ha! Si c'est un rêve...Disons...parmi les grandes conjectures...Ce serait sûrement l'hypothèse de Riemann...(Parmi Fermat, Poincaré...)

Mais ça c'est un résultat qui n'a pas encore été démontré. Un résultat qui aurais déjà été démontré et vous auriez aimé être là à temps?

Là il faut que je réfléchisse...Je vous donne une réponse volontairement atypique peut-être : un mathématicien suédois que j'admire beaucoup, Carleson, a démontré au début des années 60, le théorème de convergence presque partout pour les séries de Fourier de carrés intégrables. C'est pour moi un modèle des mathématiques que j'aime; donc c'est certainement un théorème que j'aurais aimé démontrer

Est-ce-qu'il y a des parties mathématiques pour lesquelles vous n'avez pas d'affinité?

S'il y a certainement des parties mathématiques pour lesquelles je ne me sens aucun talent, où je reste à un niveau superficiel, je ne gagne aucune intuition, c'est probablement pour les parties algébriques. Cela n'empêche pas que je puisse les apprécier en les lisant mais je n'arrive pas à avoir vraiment de l'intuition sur ces choses là. En ce sens je n'ai pas d'affinité. Ce n'est pas une affinité de coeur, c'est plutôt une affinité de raison, d'esprit.

Dans cette optique quel résultat aimeriez vous démontrer dans les années prochaine?

—Rires—

Cela dépend si on parle du domaine du possible ou du domaine du rêve. Je veux dire qu'il y a des résultats dans mon domaine que je serais susceptible de prouver, vu que je travaille sur ce genre de questions...Bon, j'ai cité l'hypothèse de Riemann mais évidemment ne travaillant pas dessus, il n'y a aucune chance que je la démontre!

On ne sait jamais il y a peut-être un détour?

Non il ne faut pas rêver. Dans mon domaine, disons que je peux vous donner 2 types de problèmes sur lesquels j'ai passé du temps. Il y a le problème que j'ai mentionné à la fin [de mon exposé], qui est un problème central des systèmes dynamiques qui est le problème dit du "closing lemma". Le problème est de savoir quand on a une orbite, une trajectoire qui se referme presque : est-ce qu'on peut changer les paramètres du système dynamique pour faire en sorte que cette trajectoire se referme? Cela à l'air très simple, on a l'impression qu'il suffit de tirer un petit peu, et de fait c'est un problème qui est très simple quand on se permet des perturbations qui sont petites en $\mathcal{C}^0$ topologie mais éventuellement grandes dans les topologies qui impliquent les dérivées d'ordre plus élevé; ce qui se passe c'est que l'orbite peut revenir plusieurs fois avant de se refermer presque. On a donc un phénomène un peu quasi-périodique comme ce dont j'ai parlé [dans l'exposé] donc quand on commence à pousser un petit peu on pousse obligatoirement ce qui est avant et donc on perturbe tout. Quand on a pas regardé ce problème on ne peut pas se rendre compte qu'il est difficile. Ceci étant c'est un problème qui bloque quand même beaucoup de questions en systèmes dynamiques donc c'est certainement un problème que j'aimerais résoudre. Maintenant, il faut être honnête je n'ai pas fait de progrès sur la question et c'est un problème qui reste toujours grand ouvert.

Un autre thème, de nature plus arithmétique, sur lequel j'essaye de réfléchir est celui des fractions continues en plus grandes dimensions; elles ont été beaucoup étudiées mais je dirai principalement par des spécialistes de théorie des nombres avec en vue, bien sûr, des applications à la théorie algébrique des nombres or ce n'est pas tout à fait cela que j'ai en vue. Ce n'est pas exactement le même type de propriétés qui focalise l'intérêt des dynamiciens et des théoriciens des nombres. Donc il y a peut-être une chance, comme les questions que nous soulevons sont différentes, que les réponses soient peut-être plus accessibles que les questions correspondantes pour les algébristes. Ces problèmes sont liés, par exemple, à trouver des réseaux très denses en grande dimension. Ça ce sont des questions qui sont très importantes pour les théoriciens des nombres, pas tellement pour nous. En fait nous pouvons nous autoriser n'importe quelles constantes du moment qu'elles ne dépendent que de la dimension et donc les grosses difficultés en théorie des nombres ne nous concernent pas exactement.

Vous n'avez pas les mêmes handicaps face à certaines questions?

Oui...Les motivations pour nous ne sont pas les mêmes que pour les théoriciens des nombres. Donc les difficultés non plus ne sont pas les mêmes.

Est-ce que vous pourriez faire une petite définition, accessible, disons, à un étudiant de terminale ou d'université, de ce qu'est un système dynamique?

Si les gens savent ce qu'est une équation différentielle, ce n'est pas trop difficile. On commence par les équations différentielles linéaires en dimension 1 et bien sûr on sait les résoudre, on a des formules. Pendant un certain temps on ne travaille qu'avec des équations qu'on sait résoudre. Mais il faut bien comprendre que dès qu'on regarde une équation différentielle un peu générale on ne peut absolument pas écrire de solution même si elle est, disons, polynomiale. Les solutions – il y a des théorèmes qui disent cela – ne peuvent pas s'écrire avec des fonctions élémentaires. Donc une fois que l'on a plus les formules pour décrire ce qui se passe, on est conduit à chercher d'autres méthodes. Des méthodes qui décrivent de façon plus qualitatives ce qui se passe...Historiquement le domaine est né de problèmes posés par des équations différentielles particulières : celles qui décrivent le mouvement des planètes autour du système solaire. C'est l'équation de la gravitation universelle qui donne des accélérations des planètes en fonction de leur distances mutuelles.

Parlons un petit peu des problèmes qui intéressent à la fois les gens qui font de la théorie algébrique des nombres et ceux qui s'intéressent aussi aux systèmes dynamiques Est-ce que votre spécialité vous a attiré, justement parce qu'il y a intrusion de nombreux résultats par exemple de type combinatoire, des résultats de théorie des nombres?

Certainement. Disons qu'il y a quelque chose d'agréable, en tout cas quand on débute. Un sujet comme la géométrie algébrique est un sujet où l'on ne peut pas donner directement un sujet de thèse à quelqu'un qui sort de DEA. Il faut vraiment un long apprentissage avant même de pouvoir travailler sur un vrai sujet de recherche. Ce n'est pas le cas en systèmes dynamiques. Il s'agit d'un sujet beaucoup plus jeune que la géométrie algébrique. Au lieu de nécessiter la maîtrise d'un grand nombres de techniques comme en géométrie algébrique, on interfère avec beaucoup de domaines mais on n'utilise que des outils relativement simples de ces domaines. J'ai mentionné la théorie algébrique des nombres pour ces questions d'approximations diophantiennes. L'étude des flots géodésiques fait evidemment appel à la géométrie riemannienne. Si on s'intéresse aux systèmes dynamiques holomorphes, on est amené à utiliser la théorie des fonctions d'une ou plusieurs variables complexes. Il est important aussi d'avoir une certaine intuition probabiliste. On rencontre aussi de temps à autre des questions de topologie différentielle ou algébrique. Une des raisons pour lesquelles le sujet m'intéresse est qu'il brasse beaucoup de mathématiques issues d'horizons différents.

Peut-on dire qu'à cause de cette jeunesse les problèmes y sont plus accessibles?

Certainement. Il reste beaucoup plus de problèmes directement accessibles... il y a peut-être, je ne sais pas, 500 spécialistes de systèmes dynamiques dans le monde – 500 est un chiffre très approximatif – et il y a beaucoup plus de problèmes que nous ne sommes nous-mêmes. On est dans une phase de maturation où les choses se décantent progressivement et on voit quelles sont les vraies questions difficiles qui risquent de vous résister un certain temps. C'est clair aussi parce que justement le domaine avance relativement vite. Il y a aussi un travail, je dirais de nettoyage, de bourbakisation en quelque sorte à faire mais que l'on a pas eu le temps de faire : comme cela ne nous résiste pas trop à l'avant on ne ressent pas encore le besoin urgent de nettoyer nos arrières, de construire disons un truc bien structuré. C'est quelque chose que l'on sera amené à faire je pense un jour où l'autre mais...

Etes-vous parfois agacé par le fait que ce qui est très vulgarisé ce sont des choses comme les ensembles de Julia et l'ensemble de Mandelbrot?

Bien sûr oui. C'est vrai que c'est toujours un peu irritant de revoir sortir toujours les mêmes exemples. D'un autre côté je crois que c'est un peu inévitable. Il y a aussi de la faute de nous-mêmes, moi le premier, de souvent ne pas faire l'effort d'essayer d'expliquer. On a chacun nos priorités, on a toujours tendance à préférer faire nous mêmes notre recherche plutôt que de l'expliquer aux autres. Ça je crois que c'est un défaut bien partagé chez les mathématiciens.

Est-ce qu'il y a des choses qui vous semblent très importantes dans les programmes scolaires que vous avez eues ou au contraire qui vous ont manqué lorsque vous avez voulu vous intéresser à votre domaine?

Vous voulez dire quand j'étais étudiant?

Oui lorsque vous étiez étudiant

Si je peux voir un peu l'évolution des programmes, la chose que je regretterais peut-être le plus, c'est plutôt en comparant un peu ce que j'ai l'impression que nous savions quand nous étions disons en 1ère, terminale ou en classes préparatoires et ce que peuvent savoir les étudiants dans les premières années d'universités, est que l'on a beaucoup tronqué ce qui est algèbre linéaire, on a l'impression que les étudiants découvrent l'algèbre linéaire seulement en 1ère ou 2ème année et je crois que l'intuition correspondante, pas vraiment les résultats, est importante. On se forge une intuiton avec l'algèbre linéaire qui est extrêmement importante et c'est donc dommage de ne pas l'introduire plutôt. Il y a sans doute des arguments... je n'ai pas étudié sérieusement la question. Comme enseignant, nous sommes parfois bloqués autour de questions qui, quand on a une petite intuition de l'algèbre linéaire, apparaissent triviales, mais les étudiants ont beaucoup de mal à les comprendre.

Vous avez des activités d'enseignant?

Oui, à l'Université de Paris Sud.

A quel niveau?

En 2ème et 3ème cycles. Cette année j'enseignais dans un certificat de maitrise de géométrie. L'année dernière, je donnais un cours de DEA. Depuis 3 ans, j'ai une position privilégiée : je suis membre de l'Institut Universitaire de France, ce qui me permet d'avoir un service d'enseignement plus léger et une activité de recherche et d'encadrement doctoral plus soutenue. Je pense que c'est très important que l'Institut Universitaire de France continue de fonctionner. Ce ne sont pas des positions permanentes – les membres sont nommés pour 5 ans – et cela permet de se consacrer pleinement à la recherche sans couper les liens avec l'enseignement. Je veux dire quelque chose d'un peu personnel. Il y a probablement trop de séparation entre le CNRS – les gens qui n'ont pas à enseigner, les gens qui font que de la recherche – et les Universités où l'on fait de la recherche mais aussi de l'enseignement. Je crois qu'il serait très souhaitable de pouvoir passer des périodes de 5 années à l'Université, qu'il existe des systèmes d'aller et retour, parce que je crois qu'il ne faut pas complètement couper le contact avec l'enseignement, c'est important... Et puis d'un autre côté il faut aussi ne pas être accaparé par ces problèmes d'enseignements et avoir le temps de bien se consacrer à la recherche. Alors l'Institut Universitaire de France effectivement aide beaucoup dans cette direction. Mais il concerne quand même qu'un nombre assez limité de chercheurs. Il a été créé il y a 3 ans, il y a eu déjà 3 promotions de l'Institut Universitaire de France. c'est un Institut non localisé. Il n'y a pas de siège. Ces membres sont des professeurs d'Universités, à deux niveaux juniors et séniors, je crois que la séparation correspond à peu près à 40 ans...

Vous êtes...

Je suis junior...(rires)... il y a trois choses qui sont offertes, deux pour le membre : une décharge de services et des crédits pour les voyages, les invitations de chercheurs, l'achat de matériel informatique. Pour ne pas pénaliser l'Université, parce que évidement si on a une décharge de service c'est autant d'enseignement qui n'est plus fait par le professeur, il y avait donc un nouveau poste de professeur en compensation. Malheureusement il semble que cette année ces compensations pour les Universités n'aient pas eu lieu. Elles ont eu lieu les deux premières années. J'espère que cela sera réparé. Sinon la position de l'Université risque d'être de s'opposer à ce que ces membres soient nommés dans cet Institut.

Quelle est la part de l'informatique dans votre intuition, dans vos travaux?

Elle est non-nulle. Cela peut me donner des idées de théorèmes à démontrer et surtout éviter de passer du temps à essayer de démontrer des théorèmes faux. Je peux donner un exemple un peu anecdotique : dans ces problèmes de linéarisation de germes holomorphes j'avais introduit une série entière dont le rayon de convergence est 1 et dont les coefficients sont des nombres rationnels. Ces nombres rationnels sont déterminés dyadiquement : les dénominateurs sont des puissances de deux. Ils se calculent suivant une relation de récurrence simple à implanter sur un ordinateur mais pas simple à controler à la main. On n'a pas de formules explicites pour ces nombres, les dénominateurs croissent assez rapidement et en calculant les 200 premiers par ordinateur, ils semblaient non-seulement rationnels mais aussi positifs. Je ne voyais aucune raison a priori pour qu'ils soient positifs. J'ai cherché pendant un petit moment à démontrer qu'ils étaient positifs et je n'y suis pas arrivé. Je ne suis pas très fort en programmation. Assez récemment, il y a un ou deux ans, un étudiant en thèse les a programmés et a calculé les 2000 premiers et on s'est aperçu que le 621-ième (approximativement) est négatif. La théorie des nombres a beaucoup d'exemples comme ça : quand on a des données numériques insuffisantes on est conduit à de fausses conjectures. La théorie analytique des nombres est pleine de surprises : un théorème de Littlewood sur la répartition des nombres premiers modulo 4 montre que la différence entre π_1 et π_3 (*) change une infinité de fois mais on n'a jamais détecté un seul changement de signe sur ordinateur.

(*) NDLR : $\pi_1(x)(resp. \pi_3(x))$ désigne le nombre de nombres premiers congrus à 1 ($resp.$3) modulo 4 et inférieur à x.