ZELMANOV ET LE PROBLEME DE BURNSIDE

MÉDAILLE FIELDS 1994

Olivier GÉRARD

Efim Zelmanov est un jeune mathématicien russe dont l'ingéniosité et l'imagination furent révélées par la classification des algèbres de Jordan dont il fut l'un des principaux acteurs entre 1977 et 1983, avec notamment Y.A Medvedev et Kevin McCrimmon.

On peut dire qu'il y avait en 1977, sept problèmes majeurs ouverts sur la structure des algèbres de Jordan et notamment celles de dimension infinie. En 1983 ils avaient tous été résolus, et chaque fois les contributions de Zelmanov avaient été déterminantes. Je recommande la magistrale et enthousiaste synthèse de Kevin McCrimmon [11] sur cette époque (lire aussi [07]).

La définition courante d'une algèbre de Jordan est un système d'éléments commutatifs (mais pas nécéssairement associatifs) muni d'un produit interne et d'une multiplication externe (par les scalaires du corps de base) qui vérifient la loi suivante :

$$((a * a) * b) * a = (a * a) * (b * a)$$

Dans la plupart des cas considérés, une algèbre de Jordan est issue d'une algèbre associative sur un corps de caractérisque différente de 2 à partir de laquelle on fabrique une nouvelle opération :

$$a * b = 1/2(a.b + b.a)$$

Il est facile de voir qu'elle vérifie la condition précédente. On peut généraliser cette construction dans diverses directions.

Quoique la motivation des créateurs de la théorie dans les années trente (P. Jordan, John von Neumann, Eugène Wigner) fut au départ la formalisation de la mécanique quantique, les algèbres de Jordan devinrent assez vite un sujet à part entière avec des applications très diverses (notamment en analyse). Le traité classique dans les années 1970 était celui de Jacobson [08]. La classification de ces algèbres a montré qu'elles étaient à la fois plus complexes et plus simples qu'on ne l'imaginait (voir notamment [12]).

Evoquons quelques mots-clefs (ou folkloriques) : de nombreuses structures associées à une algèbre de Jordan peuvent être engendrées ou décrites à l'aide de "tétrades" c'est-à-dire les produits de quatres éléments. L'un des outils de Zelmanov fut la considération des "dévoreurs" de tétrades et de pentades (tetrad or pentad eaters), compagnon de l'idée de "sandwich" due à Kostrikin pour les algèbres de Lie :

Un "sandwich" d'épaisseur v est un élément qui annule toutes les expressions de la forme : $[s, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k, s]$ avec les b_i quelconques, k inférieur a v. C'est la transposition d'une loi générale en gastronomie, qu'il est hélas devenu difficile de vérifier expérimentalement de nos jours : lorsque le pain est bon, peu importe le jambon. L'interêt de cette notion est qu'une algèbre engendrée par des sandwichs est nilpotente (Kostrikin-Zelmanov [09]). L'un des autres objets remarquables, presque la mascotte de Zelmanov, est une algèbre ou plutot l'algèbre d'Albert exceptionnelle d'ordre 27 qui joue un rôle un peu analogue à l'algèbre associée au Monstre dans la classification des groupes finis.

L'application de ces travaux sur les algèbres de Jordan qui a le plus retenu l'attention concerne le *problème de Burnside restreint*. Dans un groupe fini, tout élément possède un ordre (le nombre minimum de fois qu'il faut le multiplier par lui même pour obtenir l'élément neutre). De même, si on définit la puissance n-ième d'un groupe G comme le sous-groupe engendré par les puissances n-ièmes de tous ses éléments, l'exposant d'un groupe est le plus petit entier e tel que G puissance e soit le groupe unité. C'est donc aussi le plus petit commun multiple des ordres de tous les éléments du groupe. Le nombre de générateurs est pour un groupe l'équivalent en moins régulier de la notion de dimension pour un espace vectoriel. Ce sont des conditions nécessaires de "finitude". Les différentes versions du problème de Burnside (voir l'article original [02] ou le traité [03]) demandent s'il s'agit de conditions suffisantes (c'est un thème courant en théorie des groupes, voir par exemple Robinson [15]). La version d'origine est :

— Un groupe finiment engendré d'exposant fini est-il fini ? [1]

La version restreinte de ce problème peut se formuler ainsi :

— Y-a-t'il un nombre fini de groupes finis d'exposant e fini à m générateurs ?

Pour $m = 1$, la solution est immédiate : le groupe est cyclique et possède exactement e éléments. Il est assez facile de démontrer qu'il n'y a également qu'un seul nombre d'éléments possible (à m donné) pour $e = 2$ et $e = 3$, un peu plus délicat pour $e = 4$ (Sanov 1940 [16]) et beaucoup plus difficile pour $e = 6$ (Hall 1957 [05]) mais lontemps ce furent les seuls exposants pour lesquels il était possible de trancher. On peut trouver dans le cours de Robinson [15] ou celui de Hall [04] une présentation de certaines de ces preuves. En mettant au point des méthodes alliant logique, théorie combinatoire des groupes et une grande quantité de concepts qualitatifs sur les suites de symboles, Adian et Novikov [13] sont parvenus dès 1967 à démontrer que l'on pouvait construire un groupe infini pour e impair et supérieur ou égal à 4381 ($n > 2$). Plus tard cette borne fut ramenée à 665 (Adian[01]) puis plus récemment à 115 (Lysenok[10]). Lorsque je

[1] Les premiers contreexemples ont été construits par Golod (Nilalgebras on residually finite groups, Izv. Akad. Nauk SSSR, 1964, n, 28, p273-276).

demandai à M. Zelmanov ce qu'il pensait de ces démonstrations, il me dit avec un sourire : "These are not mainstream mathematics". Il faut reconnaître que leur analyse est délicate en particulier car elles se présentent sous la forme d'une gigantesque récurrence où certains énoncés sont utilisés bien avant d'être démontrés. A ma connaissance ces techniques ont été employées jusqu'à maintenant pour des problèmes de théorie combinatoire des groupes (ou des semi-groupes), d'informatique théorique (automates finis) mais ailleurs seulement par le biais de leur résultats. Les méthodes de Zelmanov renforcent des liens nombreux et explicites entre le problème de Burnside et tout un éventail de questions structurales en algèbre.

L'énoncé qu'a démontré Zelmanov [17] et [18] (en s'appuyant notamment sur des résultats de A. Kurosh, A. Kostrikin, A. Shirshov, I. Kaplansky) est le suivant :

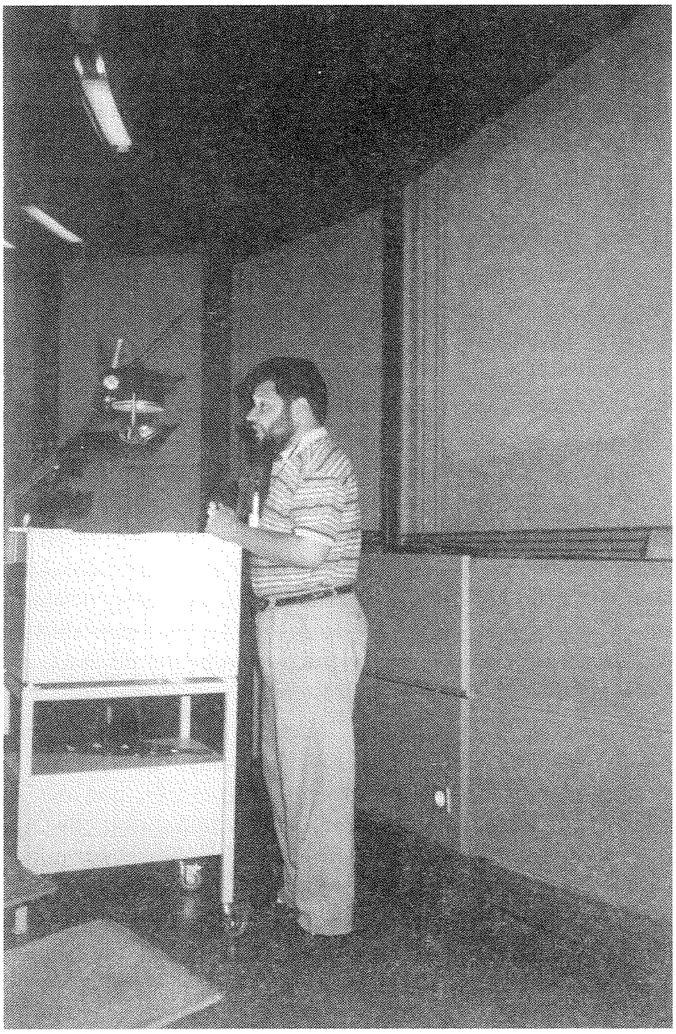
"*Le problème de Burnside restreint a une réponse positive pour les groupes dont l'exposant est une puissance d'un nombre premier*"

C'était la pièce manquante pour montrer qu'il y a en fait une solution pour un groupe résoluble (grâce à un théorème de Hall et Higman [06]) ou même d'exposant quelconque (à condition d'utiliser le théorème de classification des groupes finis simples). Le point de départ en fut la série de résultats de Kostrikin pour le cas où l'exposant est premier. On peut faire correspondre à chaque groupe d'exposant p à m générateurs une algèbre de Lie de même classe de nilpotence et dont tous les éléments sont "engeliens" (concept à l'origine de celui de sandwich). Le problème de Burnside devenait équivalent à la nilpotence (locale) de cette algèbre de Lie.

En schématisant, il s'agissait pour l'essentiel de généraliser la construction au cas $e = p^k$ et de montrer que l'algèbre ainsi associée au groupe de Burnside d'exposant p^k était une algèbre engendrée par des sandwichs, et donc nilpotente. Pour ce faire, Zelmanov exhiba des "distributeurs de sandwichs", polynômes géants qui permettent de fabriquer une famille de sandwichs génératrice de cette algèbre (en fait d'une sous-algèbre essentielle). C'est cette partie qui fait appel aux travaux sur la classification des algèbres de Jordan.

La démonstration a d'abord buté sur le cas $p = 2$ ou $p = 3$ (où il y a une forte interaction entre la caractéristique du corps de base de l'algèbre et les expressions utilisées), puis par une très habile généralisation a également englobé ce cas. Non content de ce travail imposant, Efim Zelmanov s'est efforcé de traduire les arguments venant de la théorie de Jordan sous formes de calculs symboliques, ce qui fut particulièrement difficile dans le cas où $p = 2$ (traité par Vaughan-Lee).

Zelmanov a, en passant, comblé des lacunes un peu partout (notamment sur la structure des groupes "engeliens", des groupes compacts, des groupes résiduellement finis) dans les différentes classifications des structures de base.



Efim Zelmanov

Mais laissons la conclusion à un connaisseur. Walter Feit, co-auteur de la démonstration d'un autre célèbre problème de Burnside (la résolubilité des groupes d'ordre impair), présentant les travaux de Zelmanov lors de la cérémonie de remise des médailles Fields, acheva son exposé par cette phrase :

"And this is a truly remarkable achievement [...] I think it is really worth this medal or any other prize"

Références

[01] Adian S. I. : The Burnside Problem and Identities in Group, EMG 95, Springer Verlag. Berlin 1979. (traduit du russe par John Lennox et James Wiegold)

[02] Burnside W. : On an Unsettled question in the theory of discontinuous groups. Quart. J. Pure Appl. Math 33 (1902), pp230-238

[03] Burnside W. : Theory of Groups of Finite Order, 2nd Ed., Cambridge University Press (1911), (Reimpression Dover 1955)

[04] Hall M. : The Theory of Groups, MacMillan, New-York (1959)

[05] Hall, M. Jr : Solution of the Burnside problem for exponent 6, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 43 (1957), pp751-753

[06] Hall P., Higman G. : On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem, Proc. London Math. Soc. 6 (1956), pp1-42.

[07] Jacobson N. : A Survey of Jordan Structure Theory, South East Asian Bull. of Math. 5 (1981), no 1

[08] Jacobson N. : Structure and Representations of Jordan Algebras, AMS Coll. Publ. 39, AMS, Providence 1968.

[09] Kostrikin A.I., Zelmanov E.I. : A theorem on Sandwich Algebras. Proc. of Steklov Math. Inst. Akad. Nauk SSSR 183 (1988) pp142-149

[10] Lysenok, I. : On the Burnside problem for odd exponents $n \geq 115$. *in "International Conference in Algebra - Novossibirsk 1989" (à paraître).*

[11] McCrimmon Kevin : The Russian revolution in Jordan Algebras, Algebra, Groups and Geometries 1 (1984), no 1, pp1-61

[12] Medvedev Yu. A., Zelmanov E.I. : Some Counterexamples in the theory of Jordan Algebras, in Non associative algebraic models Saragosse 1989, Nova Scienta Publication New York 1992, pp1-16.

[13] Novikov, P. S., Adian S. I. : On infinite periodic groups I, II, III. Izv. Akad. Nauk SSSR 32 (1968), no 1 pp 212-244, no 2 pp251-254, no 3, 709-731.

[14] Robinson D.J.S. : A Course in the Theory of Groups, GTM 80, Springer-Verlag, New York.1980.

[15] Robinson D.J.S. : Finiteness Conditions and generalized Soluble Groups, 2 volumes, Springer-Verlag, Berlin 1972.

[16] Sanov, I. N. : Solution of the Burnside problem for exponent 4, Publ. Leningrad Univ. 10 (1940), pp166-170

[17] Zelmanov E.I. : The solution of the restricted Burnside problem for groups of odd exponent, Izv. Akad. Nauk SSSR 54 (1990)

[18] Zelmanov E.I. : The solution of the restricted Burnside problem for 2-groups, Math. Sb. 182 (1991), no 4 pp568-592

[19] Zelmanov E.I. : On the Restricted Burnside Problem in Proceedings of the ICM 90 Kyoto 1991, pp395-402

ASTÉRISQUE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique.
Revue éditée par la Société Mathématique de France.

ASTÉRISQUE 218 Année 1993.** — *Journées de géométrie algébrique d'Orsay (juillet 1993)*
336 pages, prix public (TTC) : 265 FF, prix membres SMF : 190 FF

Les Journées de géométrie algébrique d'Orsay ont eu lieu à l'Université Paris-Sud en juillet 1992. Leur objet était de faire le point sur l'état des connaissances en géométrie algébrique complexe, en mettant en lumière les perspectives de recherche qui semblent aujourd'hui les plus prometteuses.

Les textes de ces Actes reflètent les grands thèmes actuels de la géométrie complexe tels qu'ils ont été abordés pendant la conférence : systèmes linéaires, fibrés vectoriels, cycles algébriques et cohomologie, "symétrie miroir" sur les variétés de Calabi-Yau. Ils témoignent de la vitalité du sujet telle qu'elle est apparue aux participants lors de ces journées.

ABONNEMENT 1993
Prix public Europe : 1215 FF Hors Europe : 1515 FF
Prix Membres Europe : 730 FF Hors Europe : 1030 FF

ABONNEMENT 1994
Prix public Europe : 1265 FF Hors Europe : 1565 FF
Prix Membres Europe : 780 FF Hors Europe : 1080 FF

DISTRIBUTION
Membres de la S.M.F. : *Maison de la S.M.F., Case 916, Luminy, 13288 Marseille Cedex 09*

France et Etranger (excepté les Etats-Unis, le Canada et le Mexique) :
Maison de la S.M.F., Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 09
ou *Offilib, 48 rue Gay-Lussac, 75240 Paris Cedex 05*

Etats-Unis, Canada, Mexique :
American Mathematical Society, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940, U.S.A.