LIVRES

LIVRES RECUS

Cours de Mathématiques spéciales

B. Gostiaux
PUF.

Ce cours en trois tomes (tome 1 : Algèbre; tome 2 : Topologie, analyse réelle; tome 3 : Analyse fonctionnelle et calcul différentiel) a été rédigé à partir des notes du cours de mathématiques spéciales fait par l'auteur au lycée Saint Louis. Un cours vivant, émaillé de réflexions et commentaires intéressants, un cours très complet aussi dont les ambitions dépassent largement celles de l'enseignement actuel de DEUG.

COMPTES RENDUS

Lectures on Arakelov Geometry

C. Soulé, D. Abramovich, J. F. Burnol, J. Kramer
Cambridge studies in advanced mathematics 33. 1992.

Dans l'étude des équations diophantiennes, S. Arakelov a ouvert la voie en 1974 à une nouvelle géométrie, combinant la théorie des schémas et la géométrie hermitienne. Considérant une courbe X définie par des équations à coefficients entiers comme une surface arithmétique "complètée à l'infini" par la surface de Riemann de $X(\mathbb{C})$, il construit, à l'aide de la théorie du potentiel sur $X(\mathbb{C})$, une théorie globale de l'intersection aux propriétés analogues à celles de l'intersection sur une surface projective lisse; les hauteurs (complexité arithmétique) des points algébriques de X y apparaissent comme intersection. Cette théorie culmine avec le théorème "de Riemann - Roch" sur les surfaces arithmétiques dû à G. Faltings (Ann. of Maths 1984).

Pour un exposé de ces résultats, on peut consulter l'article de L. Szpiro (Contemp. Math 67) ou le petit livre de S. Lang "Introduction to Arakelov theory" (Springer, 1988).

Peu après la parution de ce dernier, H. Gillet et C. Soulé complétaient le vaste programme pluridisciplinaire consistant à étendre cette théorie en dimension quelconque (bien entendu, d'autres mathématiciens, et aussi des physiciens, ont contribué à cette profonde généralisation, notamment D. Quillen, P. Deligne et J. M. Bismut). P. Vojta l'a utilisé pour donner une nouvelle preuve de la conjecture de Mordell (Ann. of Maths 1991).

Nous introduire pas à pas dans le vif de ce sujet passionnant, neuf et déjà mûr, voilà l'objet de "Lectures on Arakelov Geometry", basé sur un cours de Soulé (1989), rédigé et développé en collaboration avec D. Abramovich, J. F. Burnol et J. Kramer.

Avant d'entrer dans la description technique du contenu de l'ouvrage, distinguons sommairement ses deux moitiés. La première construit, d'après Gillet - Soulé, une théorie de l'intersection arithmétique sur une variété arithmétique X de dimension quelconque (i.e un schéma régulier, projectif et plat sur $\mathbb{Z}$) : anneau de Chow $\widehat{CH}(X)_{\mathbb{Q}}$, classes caractéristiques arithmétiques d'un fibré vectoriel muni d'une métrique hermitienne. Cette partie —dont les moyens analytiques restent assez élémentaires, mais dont les démonstrations n'évitent pas une bonne dose de K-théorie— suffira probablement à l'usage de maint géomètre arithméticien; mais ce serait se priver de bien belle mathématique que de ne pas entreprendre, après avoir repris haleine, l'ascension de la seconde moitié qui, mettant en oeuvre (avec la collaboration de Bismut) des outils analytiques sophistiqués, culmine en *un théorème de Riemann-Roch arithmétique.*

Le premier chapitre expose avec beaucoup de clarté la théorie de l'intersection sur un schéma régulier X de dimension finie. Un accouplement d'intersection entre groupes de Chow rationnels à supports

$$\widehat{CH}^p_Y(X)_{\mathbf{Q}} \otimes \widehat{CH}^q_Z(X)_{\mathbf{Q}} \to \widehat{CH}^{p+q}_{Y\cap Z}(X)_{\mathbf{Q}} \tag{1}$$

y est construit, ayant les propriétés usuelles. Comme on ne dispose pas du lemme de déplacement de Chow dans ce contexte général, on introduit pour ce faire les K-groupes locaux $K_0^Y(X)$ engendrés par les complexes finis de fibrés vectoriels acycliques en dehors de Y, et l'accouplement

$$K_0^Y(X) \otimes K_0^Z(X) \to K_0^{Y\cap Z}(X) \tag{2}$$

donné par le produit tensoriel, puis on prouve que la filtration F par la codimension du support vérifie

$$F^p K_0^Y(X)_{\mathbf{Q}}.F^p K_0^Z(X)_{\mathbf{Q}} \subset F^{p+q} K_0^{Y\cap Z}(X)_{\mathbf{Q}} \tag{3}$$

et enfin que

$$\widehat{CH}^p_Y(X)_{\mathbf{Q}} \cong Gr^p_F K_0^Y(X)_{\mathbf{Q}} \tag{4}$$

[(3) provient de ce qu'il existe une structure de λ-anneau sur $\oplus_Y K_0^Y(X)$ telle que les opérations d'Adams scindent F^p, tandis que (4) s'obtient à l'aide de la suite spectrale de localisation de Quillen].

Le second chapitre introduit la notion de courant de Green pour un cycle algébrique Z sur une variété projective lisse X : courant g tel que $dd^c g + \delta_Z$ soit lisse (δ désigne le courant d'intégration). Le prototype en est $-log|f|^2$ pour Z le diviseur d'une fonction rationnelle f (Poincaré - Lelong).

Supposons (par additivité) que Z soit un sous-schéma irréductible, et soit $q : \tilde{Z} \to X$ le morphisme dans X d'une désingularisation de Z. Alors la formule

$$g_{Y.Z} = (dd^c g_Y + \delta_Y) g_Z + q_* q^* g_Y \tag{5}$$

définit un courant de Green pour $Y.Z$, et par là un produit (commutatif associatif) pour les courants de Green.

Dans le chapitre III, un cycle arithmétique de degré p sur une variété arithmétique X est défini comme un couple (Z, g), où Z est un cycle algébrique de codimension p sur X, et g est un courant de Green réel de type $(p-1, p-1)$ sur $X_{\mathbf{C}}$ pour $Z_{\mathbf{C}}$.

Le groupe de Chow arithmétique $\widehat{CH}^p(X)$ est le groupe abélien des cycles arithmétiques de degré p, modulo le sous groupe engendré par $(0, \partial u + \bar{\partial} v)$ et $(div(f), -log|f|^2)$, où u et v sont des courants arbitraires du bon bidegré, et $div(f)$ est le diviseur d'une fonction rationnelle sur un sous-schéma fermé irréductible de codimension $p-1$ de X. Le noyau de la flèche évidente $\widehat{CH}^p(X) \to CH^p(X)$ est décrit en termes de l'image d'un régulateur. L'accouplement d'intersection arithmétique

$$\widehat{CH}^p(X)_{\mathbf{Q}} \otimes \widehat{CH}^q(X)_{\mathbf{Q}} \to \widehat{CH}^{p+q}(X)_{\mathbf{Q}} \tag{6}$$

issu de (1) et (5) fait de $\widehat{CH}(X)_{\mathbf{Q}} = \oplus \widehat{CH}^p(X)_{\mathbf{Q}}$ une algèbre commutative et graduée. On a la bifonctorialité et la formule de projection usuelles.

L'un des mérites de cette intersection arithmétique est de fournir une notion de hauteur (positive) pour les sous-variétés de $\mathbf{P_Z}$, utilisée par Faltings dans son étude des points rationnels sur les variétés abéliennes (Ann. of Maths 1991).

Au chapitre IV sont construites, pour tout fibré hermitien $\bar{E}$ sur X, des classes caractéristiques arithmétiques à valeurs dans $\widehat{CH}(X)_{\mathbf{Q}}$, parmi lesquelles $\widehat{ch}$ (caractère de Chern arithmétique).

Pour tout représentant (Z, g) *de* $\widehat{ch}(\bar{E})$, *on a*

$$dd^c g + \delta_Z = ch(\bar{E}) \tag{7}$$

le caractère de Chern usuel.

De plus $\widehat{ch}$ *vérifie les axiomes usuels pour* ch, *en restreignant toutefois l'additivité aux suites exactes orthogonales. Pour des suites exactes quelconques de fibrés hermitiens, le défaut de l'additivité de la seconde composante de* $\widehat{ch}$ *est donné par la classe caractéristique secondaire de Bott-Chern, l'un des ingrédients essentiels de la théorie, et dont une ingénieuse construction est proposée au début du chapitre.*

La construction de $\widehat{ch}$ *se fait soit au moyen d'un principe de scindage pour les groupes de Chow arithmétiques des grassmanniennes, soit par l'intermédiaire d'une définition directe de classes de Segre arithmétiques (§ 7).*

Passons à la seconde moitié du livre, consacrée à l'étude d'une notion d'image directe d'un fibré hermitien par un morphisme projectif plat de variétés arithmétiques, qui requiert la notion préalable de déterminant régularisé du laplacien, très agréablement présentée dans le chapitre V, en partant de l'exemple :

$$1.2.3.4\ldots = e^{-\zeta'(0)} = \sqrt{2\pi}\ ,\ \zeta'(s) = -\sum(logn)n^{-s} \tag{8}$$

Le lien avec les parties finies d'intégrales de fonctions thêta est explicité [1].

Puis est prouvée l'existence d'un noyau de la chaleur $p_t(x, y)$ *pour tout laplacien généralisé (= opérateur différentiel H d'ordre 2 vérifiant* $[[H, f], f] = -2|df|^2$ *pour toute fonction lisse* f*) agissant sur les sections d'un fibré vectoriel; ceci permet, dans le cas positif, d'écrire la fonction thêta sous la forme*

$$\Theta(t) = \int tr\ p_t(x, y) \tag{9}$$

(En ce qui concerne les propriétés de $p_t(x, y)$, *la stratégie des auteurs sera ensuite de s'appuyer sur le livre de N. Berline, E. Getzler et M. Vergne "Heat kernel and the Dirac operator" Springer (1992), et de rester aussi autonome que possible modulo cette référence).*

Le laplacien généralisé qui interviendra est le double de l'opérateur de Laplace - Beltrami complexe $\Delta^q = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$ *agissant sur l'espace préhilbertien* $A^{0,q}(X_{\mathbf{C}}, \bar{E}_{\mathbf{C}})$ *des formes de type* $(0, q)$ *à valeurs dans un fibré holomorphe hermitien sur une variété kählérienne (*$\bar{\partial} = \bar{\partial}_{\bar{E}}$ *est l'opérateur de Cauchy - Riemann,* $\bar{\partial}^*$ *son dual).*

Le chapitre VI introduit le fibré en droite hermitien $\lambda(\bar{E}_{\mathbf{Q}}) = (\lambda(E), h_{\mathbf{Q}})$ *déterminant de la cohomologie, pour un morphisme* $f : X \to Y$ *projectif plat de variétés arithmétiques, lisse sur la fibre générique* $X_{\mathbf{C}}$ *et pour un fibré hermitien* E *sur* X*; on suppose la fibration* $f_{\mathbf{C}}$ *localement kählérienne.*

La fibre en tout point y *de* Y *de* $\lambda(E)$ *est le produit tensoriel alterné (A. Grothendieck, F. Knudsen, D. Mumford)*

$$\lambda(E)_y = \otimes_{q \geq 0} \Lambda^{max}(H^q(X_y, E_y))^{(-1)^q} \tag{10}$$

D'après Quillen, on obtient une métrique lisse h_Q *sur* $\lambda(E)$ *en identifiant* $H^q(X_y, E_y)$ *avec* $Ker\Delta^q$ *(pour* $y \in Y(\mathbf{C})$ *), et en multipliant sa métrique* L^2 *par* $\Pi(det'\Delta^q)^{(-1)^q q}$, *c'est-à-dire par l'exponentielle de la torsion analytique de Ray - Singer*

[1] Signalons une coquille : p. 96, l. 7 il faut remplacer le facteur $\theta(\pi/t)$ par $\theta(\pi^2/t) + 1/2$

$$h_Q = h_{L^2}.expT(\bar{E}) \ , \ T(\bar{E}) = \sum(-1)^{q+1} q\zeta_q'(0) \tag{11}$$

où ζ_q est la fonction zêta de Δ^q.

Le chapitre crucial qui suit calcule la courbure de h_Q :

$$c_1(\lambda(\bar{E}_Q)) = (f_{\mathbf{C}})_*(ch(\bar{E}_{\mathbf{C}})Td(f_{\mathbf{C}}))^{(2)} \tag{12}$$

généralisant des résultats de Quillen, Bismut - Freed, et des formules "d'anomalie" familières en théorie quantique des cordes.

Cette formule est obtenue à partir du théorème de l'indice pour les familles d'opérateurs de Dirac (Bismut) et d'une estimation à l'infini du noyau de la chaleur, grâce à l'usage capital des superconnexions; ainsi, soit $(\bar{E}_., v_.)$ un complexe acyclique de fibrés hermitiens, et soit $\nabla = \nabla^+ + \nabla^-$ la connection unitaire associée. On sait que la supertrace $tr_s exp(-A^2)$ est, en négligeant des facteurs $2i\pi$, la somme alternée des $ch(\bar{E}_i)$ (ici, A désigne la superconnexion $\nabla + v + v^*$). Mais il y a plus : la classe de Bott - Chern apparaît (à normalisation près) comme

$$\int_z tr_s exp(-A_z^2) log|z|^2 \tag{13}$$

où A_z est la superconnexion

$$\nabla + dz\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + zv + \bar{z}v^* \tag{14}$$

Si l'on joue le même jeu avec le complexe de Dolbeault relatif (non acyclique et de dimension infinie), l'intégrale (13) diverge mais la partie finie de sa composante de degré 0 donne essentiellement la torsion analytique (via le formalisme des fonctions thêta du chapitre V).

Le dernier chapitre combine (12) avec le théorème de Riemann - Roch - Grothendieck pour f, pour obtenir rapidement le théorème de Riemann - Roch arithmétique sous la forme suivante : la différence

$$\widehat{c}_1(\lambda(\bar{E}_Q)) - f_*(\widehat{c}h(\bar{E})\widehat{T}d(f))^{(1)} \in \widehat{CH}^1(Y)_{\mathbf{Q}} \tag{15}$$

dont la projection sur $CH^1(Y)_{\mathbf{Q}}$ est nulle, ne dépend que de la classe de $E_{\mathbf{Q}}$ dans $X_{\mathbf{Q}}$.

Application : on tord $\bar{E}$ par $\bar{L}^{\otimes n}$, $\bar{L}$ étant un fibré de droite hermitien avec $c_1(\bar{L}) > 0$. Alors $f_*(\widehat{c}h(\bar{E})\widehat{T}d(f))^{(1)} \in \widehat{CH}^1(\mathbf{Z}) = \mathbf{R}$ croît comme κn^{d+1}, avec

$$\kappa = (rangE)\bar{L}^{d+1}((d+1)!)^{-1} \ , \ d = dim(X/\mathbf{Z}) \tag{16}$$

tandis que la différence (15) croît en n^d. Comme la partie "torsion analytique" de $\widehat{c}_1(\lambda(\bar{E} \otimes \bar{L}^{\otimes n})_Q)$ est $O(n^d logn)$ (Bismut - Vasserot), on en déduit, via Minkowski, le théorème d'amplitude arithmétique : si $\bar{L}^{d+1} > 0$, le logarithme du nombre de sections de $E \otimes L^{\otimes n}$ dans la boule unité croît au moins en κn^{d+1}.

Il existe en fait une formule exacte pour (15), obtenue par Gillet - Soulé en s'appuyant sur des travaux de Bismut et de Lebeau, et citée dans ce chapitre; mais sa preuve, très difficile, requerrait un autre livre (signalons que ce livre existe maintenant, dû à Faltings [2], qui a simplifié et étendu ce résultat).

---

[2] Ann of Maths studies 127, Princeton (1992)

Ce compte-rendu laconique laisse dans l'ombre l'un des aspects les plus remarquables de cet ouvrage : son accessibilité. Le style est celui d'une introduction, à la fois limpide et extraordinairement concise, où tous les objets sont définis avec soin — quitte à recourir çà et là à d'autres sources pour leurs propriétés. (Ayant coorganisé un séminaire à Bonn il y a quatre ans à partir de la jungle des prépublications originales, j'apprécie le succès de l'énorme effort de lisibilité accompli par les auteurs, particulièrement aux chapitres IV et VII, les plus techniques). L'ordre des matières semble couler de source, en partie grâce à un subtil élagage de points techniques secondaires. Tous les calculs sont faciles à suivre (parole de non-analyste!). En outre, le texte est parsemé de remarques et problèmes ouverts destinés à piquer l'intérêt du lecteur.

J'en viens à mon unique réserve, qui tempère quelque peu les mérites d'exposition que je viens de souligner : ce livre ne contient pas d'exemples [3]*. Il faut recommander vivement au lecteur de traiter lui-même, pour chaque notion introduite, le cas facile mais instructif de* $E = \mathcal{O}(n)$ *sur* $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Z}}$ *(munis des métriques de Fubini - Study), où tout s'explicite. Du reste* X *demeure d'un bout à l'autre une variété arithmétique (ou complexe) de dimension quelconque* d *(sur* $\mathbf{Z}$ *ou* $\mathbf{C}$*), jamais spécialisé à* $d = 1$ *(sauf pour une brève allusion en III 5.2, 5.3); en particulier il n'y a pas un mot sur les rapports entre le théorème de Riemann - Roch arithmétique prouvé ici (dû à Deligne dans le cas* $d = 1$*) et le théorème de Riemann - Roch - Faltings sur les surfaces arithmétiques. Le lecteur déjà familier avec la théorie d'Arakelov* $(d = 1)$ *devra se reporter à l'exposé Bourbaki n°713 de Soulé (1989) pour faire le lien.*

En conclusion, voici une excellente introduction à la théorie d'Arakelov en dimension supérieure, à lire la plume à la main; un livre très dense qui s'adresse bien entendu d'abord aux géomètres arithméticiens, mais dont la richesse attirera un public varié de K*-théoriciens, analystes de tendance géométrique, et spécialistes de la théorie des cordes.*

Appendice : un doute a plané (et s'est même abattu [4]*) naguère sur la forme forte du théorème de Riemann - Roch arithmétique, i.e. la formule pour (15). Bien que celui-ci sorte stricto sensu du cadre de ce livre, une rapide mise au point est peut-être opportune ici.*

Examinons d'abord l'effet d'une dilatation de la métrique kählérienne de X *par un coefficient* $\alpha > 0$ *: la métrique* L^2 *sur* $A^{0,q}(X, \bar{E})$ *est dilatée par* α^{d-q}*, d'où*

${}_\alpha\Delta^q = \alpha^{-1}\Delta^q$,

${}_\alpha\zeta_q(0) = \zeta_q(0)$, *mais*

${}_\alpha\zeta'_q(0) = \zeta'_q(0) + log\alpha.\zeta_q(0)$.

On a alors la "formule d'anomalie"

$$log\frac{{}_\alpha h_Q}{h_Q} = log\alpha.(d.\chi(E) + \sum(-1)^{q+1}q(t^d\theta_q(t))_{|t=0})$$

où θ_q *désigne la fonction theta de* Δ^q *(lorsque* X *et* E *varient holomorphiquement,* $log\frac{{}_\alpha h_Q}{h_Q}$ *varie donc continûment, et même harmoniquement, cf. chapitre VI lemme 9).*

Le point litigieux est que, dans "Analytic torsion..." (Topology 1991), Gillet - Soulé empruntent la liste des valeurs propres de Δ^q *pour* $X = \mathbf{P}^N$ *(muni de Fubini - Study) à A. Ikeda - Y. Taniguchi (Osaka J. of Maths 1978), qui travaillent avec le laplacien riemannien. Pour justifier la citation, il suffit donc, d'après ce qui précède, de vérifier que la métrique utilisée par Ikeda - Taniguchi est le double de la métrique riemannienne induite par Fubini - Study. Comme ces métriques sont a priori proportionnelles (car* $U(N+1)$*-invariantes), cela se voit aisément par récurrence, en utilisant le plongement isométrique standard* $\mathbf{P}^{N-1} \subset \mathbf{P}^N$*; pour* $N = 1$*, un calcul direct de la première valeur propre conclut.*

---

[3] à part deux exemples de fonctions de Green cités sans explication au chapitre II.

[4] cf. Encycl. of Math. Sc 60, Number theory III, p.174

Certes, Ikeda - Taniguchi prétendent utiliser Fubini - Study, mais on remarquera que la $(1,1)$*-forme qu'ils associent au § 3, loc.cit.,est le double de la forme usuelle.*

Yves ANDRÉ
Paris 6

Géométrie et Dioptrique au Xe siècle

Traduction de R. RASHED

Belles Lettres, Paris. 1993.

Cet ouvrage présente un certain nombre de textes établis et traduits en français pour la première fois, ainsi qu'un résumé et commentaire de la plupart de ces textes. C'est donc un livre source mais aussi un livre de recherche centré sur quelques thèmes et sur la découverte d'une personnalité scientifique : celle de Ibn Sahl.

L'écrit le plus étonnant, découvert par l'auteur à l'occasion de ses recherches sur l'optique arabe du Xème siècle, est sans conteste le traité sur les "instruments ardents" d'Ibn Sabl provenant d'un manuscrit de la bibliothèque de Téhéran considéré à tort jusqu'à présent comme un traité sur les miroirs ardents. C'est en fait la première dioptrique de l'histoire de l'optique connue à ce jour. Ce traité contient une loi implicite pour la réfraction tout à fait analogue à la formulation qu'en donnera Snell au XVIIème siècle, une étude élégante des lentilles convexes hyperboliques, et une méthode de tracé continu des coniques nouvelle en ce qu'elle utilise la constance d'une somme. Un autre écrit d'Ibn Sahl est un commentaire du traité sur l'astrolabe d'al-Quhi, commentaire remarquable par le développement au premier chapitre d'une étude de pure géométrie projective qui dépasse le cadre nécessaire à la construction et à l'utilisation de l'astrolabe.

Ces points nouveaux s'insèrent naturellement au cours de l'ouvrage dans le contexte plus général de l'innovation scientifique propre à cette époque illustré par des textes d'al-Quhi, Ibn al-Haytham et al-Farisi. L'intérêt demeure cependant centré sur l'optique et les transformations en géométrie, excluant le domaine de la géométrie algébrique et des méthodes archimédiennes pour les quadratures et l'étude des centres de gravité.

Les textes ont été établis d'après les manuscrits disponibles pour chacun d'eux, puis traduits en français, et sont présentés en version bilingue. Il s'agit de 8 textes d'optique et de géométrie auxquels s'ajoutent 3 textes donnés en appendices parce que nécessaires à la lecture de certains des textes principaux. Ainsi en est-il du traité sur l'astrolabe d'al-Quhi et d'un livre de synthèses de problèmes géométriques écrit par un inconnu avec l'intention de compléter l'analyse, aujourd'hui perdue, de ces mêmes problèmes par Ibn Sahl. Le traité des synthèses permet alors à l'auteur de reconstituer les analyses de Ibn Sahl. Les principaux textes du livre sont les suivant :

- *"Le livre sur les instruments ardents" d'Ibn Sahl.*
- *"Preuve que la sphère céleste n'est pas d'une transparence extrême" d'Ibn Sahl.*
- *"Des propriétés des trois sections coniques" d'Ibn Sahl.*
- *Commentaire du traité sur l'Art de l'Astrolabe d'al-Quhi, par Ibn Sahl.*
- *Une partie du septième livre de l'Optique d'Ibn al-Haytham concernant le dioptre sphérique et la lentille sphérique.*
- *Le traité sur la Sphère ardente d'Ibn al-Haytham et sa rédaction par al-Farisi.*

Le premier chapitre du commentaire écrit par l'auteur traite uniquement des deux premiers textes dont il résume les démonstrations d'une façon concise et claire et dont il commente les traits principaux et l'originalité par rapport aux auteurs anciens connus par Sahl, essentiellement Ptolémée pour l'optique de la réfraction et Apollonius pour les coniques.

La démarche d'Ibn Sahl est remarquable par son propos mais aussi par le style des démonstrations qui tiennent compte de toutes les configurations possibles et se *soucient de l'existence et de l'unicité des plans tangents aux coniques. Il ne s'agit pas d'une rigueur axiomatique, beaucoup de propriétés utilisées ne sont pas énoncées mais supposées implicitement connues. Il est clair cependant que l'on se trouve en face d'un géomètre, l'un des plus grands de son époque, dont le souci est théorique même si le but de l'étude des instruments ardents est d'"embraser".*

La démonstration de la convergence au foyer de l'hyperbole de tous les rayons qui arrivent parallèlement à l'axe de la lentille plan-convexe est à mon avis la plus surprenante du livre par son élégance et son originalité.

Le fait de s'intéresser à la focalisation et non à la vision conduit Ibn Sahl à ne traiter que de cas que nous qualifierions aujourd'hui de"stigmatisme exact", et c'est ce qui l'oppose à son successeur Ibn al-Haytham. C'est aussi ce qui fait qu'il n'étudie pas le dioptre plan pour lui-même et ne dégage pas explicitement la loi générale de la réfraction. Celle-ci est utilisée comme intermédiaire pour établir les propriétés de focalisation de ses lentilles hyperboliques.

Ibn Sahl traite également de la réflexion par les miroirs parabolique et elliptique, mais ceci n'est pas nouveau.

Les caractéristiques mises en avant pour les coniques sont évidemment les propriétés bifocales pour l'optique, et d'autre part la constance d'une somme pour le tracé continu des trois sortes de coniques. Tout ceci semble admis a priori dans le déroulement nettement synthétique du procédé de construction. Les détails pratiques indiquent bien la volonté de réaliser pratiquement le dessin, mais il s'agit de le réaliser à partir de la donnée des foyers et de l'excentricité, ce que permettait difficilement le "compas parfait" d'al-Quhi.

Le deuxième chapitre analyse les traités d'Ibn al-Haytham et d'al-Farisi et permet, par comparaison, d'apprécier d'avantage me semble-t-il l'originalité et l'élégance du travail d'Ibn Sahl. Il est vrai que le propos d'Ibn al-Haytham est plus ambitieux puisqu'il tente une étude générale de la réfraction d'après des observations expérimentales et s'intéresse à la vision à travers le dioptre et la lentille sphérique. Mais c'est justement le rapport avec une expérimentation trop restreinte qui est source d'erreur, ainsi que la confusion en ce qui concerne la notion d'image. Quoiqu'il en soit, l'intervention ici de cette partie du VIIème livre de l'optique d'Ibn al-Haytham permet de présenter dans un même ensemble les textes sur les lentilles du Xème et XIème siècles.

L'auteur conclut en explicitant l'apport nouveau d'Ibn al-Haytham par rapport au travail d'Ibn Sahl sur lequel il s'appuie. Ainsi le traitement du miroir sphérique où, comme dans le traitement du dioptre sphérique donné dans ce livre, apparaît l'aberration sphérique. L'intérêt accordé à la vision crée chez Ibn al-Haytham une séparation entre les problèmes liés à la propagation de la lumière, pour lesquels il donne un modèle, et ceux de l'image et de la vision. L'importance de l'expérimentation dans la théorie est toute autre que chez Ibn Sahl mais provoque malheureusement un retour en arrière vers Ptolémée et un effacement de la loi de Snell.

Le troisième chapitre concernant Ibn Sahl mathématicien est le plus riche en réflexions générales sur le contexte des mathématiques arabes de cette époque. L'auteur reprend de façon plus schématique les procédés de construction mécanique des coniques dans son lien avec les préoccupations optiques. On traite ensuite des divisions harmoniques dans les coniques d'une façon un peu différente de celle d'Apollonius, de l'analyse et de la synthèse de divers problèmes géométriques à partir de lemmes dont l'un est le théorème de Menelaüs. Bien que l'originalité d'Ibn Sahl soit ici moins flagrante, on le sent tout-à-fait capable de saisir et d'expliciter les innovations de ses contemporains, à leur demande parfois.

Mais le deuxième point vraiment surprenant de ce livre concerne la l'étude par Ibn Sahl des projections de la sphère. Bien que l'étude de l'astrolabe se réduise à la seule projection stéréographique, d'autres projections sont envisagées avec le souci d'étudier l'existence et la nature de la sur-

face projetée selon la surface sur laquelle on projette, le caractère cylindrique ou conique de la projection, et selon les positions relatives des divers éléments. Là encore, la contribution d'Ibn Sahl est originale, car son simple commentaire transforme les considérations allusives d'al-Quhi à ce sujet en une étude théorique à part entière.

Le quatrième et dernier chapitre traite des différents manuscrits utilisés précisant ainsi les problèmes de sources pour chaque texte établi. L'auteur donne tous les renseignements qu'il possède sur les divers textes existants, leurs mutilations, les copistes connus et les filiations supposées. On donne aussi les renseignements biographiques concernant Ibn Sahl, ainsi qu'Ibn al-Haytham et al-Farisi, permettant de les replacer dans leur contexte.

L'auteur exprime enfin sa volonté de respecter au maximum le texte original, dans l'établissement du texte aussi bien que dans la traduction, plutôt que d'en favoriser l'élégance.

Ces quatre chapitre écrits par l'auteur contiennent peu d'interprétation, sauf à la fin du second chapitre où il s'agit plutôt de rendre compte de l'oeuvre d'Ibn al-Haytham précédemment étudiée par l'auteur. Les commentaires concernant Ibn Sahl sont plus descriptifs et donnent envie au lecteur d'approfondir les comparaisons de style entre les diverses approches géométriques ainsi qu'entre le rôle et l'utilisation de l'optique. Mais l'ensemble du livre répond déjà en partie à ces questionnements par la simple confrontation des textes qui y sont juxtaposés. Les textes d'optique et de géométrie s'éclairent mutuellement et on comprend ainsi par l'optique la nouvelle approche des coniques. L'ensemble du livre pose de plus le problème du rôle des intruments dans la théorie, problème que l'auteur suggère sans le traiter. C'est cette discrétion même qui fait de ce livre un excellent outil de recherche, un livre source organisé de façon thématique qui peut constituer la base de toute réflexion dans ce domaine.

L'abondance de renseignements techniques sur les antécédants, les résumés des différents textes et la cohérence de l'ensemble permettent la lecture sans connaissances préalables du domaine concerné. La compréhension des démonstrations ne requiert que quelques connaissances sur les propriétés élémentaires des coniques. Le lecteur non averti devra cependant lire l'ensemble du commentaire pour saisir les liens entre les différents texte présentés. Le chercheur spécialisé peut par contre se promener à sa guise dans ce livre, y découvrir des textes inconnus à ce jour et profiter de l'énorme travail que représentent les traductions et résumés de toutes les démonstrations.

Christiane VILAIN
Paris 7

Sur les courbes définies par une équation différentielle

Mémoire de Henri Poincaré accompagné de la thèse de l'auteur et d'un Mémoire de Briot et Bouquet
Réédition Gabay, 1993.

La publication en quatre parties – de 1881 a 1886 – du Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle *par M. H. Poincaré Ingénieur des Mines dans le* Journal de Mathématiques pures et appliquées *peut être considérée comme le point de départ de la théorie des Système Dynamiques. Confronté aux difficiles questions de la Mécanique Céleste, en particulier au Problème des Trois Corps, Poincaré comprend la nécessité qu'il y a à asseoir sur une base ferme une théorie qualitative des équations différentielles. Commençant par les équations dans le plan, il crée de toutes pièces une problématique, un vocabulaire, une technique, dont sortiront non seulement la théorie en question mais également les prémisses de la Topologie et de la théorie Ergodique. Dès la première page du Mémoire le but est clairement as-*

signé : "Rechercher quelles sont les propriétés des équations différentielles est donc une question du plus haut intérêt. On a déjà fait un premier pas en étudiant la fonction proposée dans le voisinage d'un des points du plan. *Il s'agit aujourd'hui d'aller plus loin et d'étudier cette fonction* dans toute l'étendue du plan*". Il ne se passe que deux ans entre la thèse – reproduite également dans cette réédition – et la publication de la première partie du Mémoire, trois ans entre la publication de la dernière partie et le Mémoire couronné sur le Problème des Trois Corps qui sera développé de 1892 a 1899 dans les trois volumes des* Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. *En une dizaine d'années, c'est un bouleversement complet de la posture du mathématicien que provoque Poincaré. Le résumé des dix-neuf chapitres du Mémoire (239 pages) est donné dans le chapitre V de l'*Analyse des Travaux Scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même *rééditée en tête du volume (mais pourquoi n'avoir pas également réédité le chapitre I qui résume la thèse et la situe par rapport aux travaux de Cauchy et de Briot et Bouquet?). Notons simplement parmi cet extraordinaire foisonnement de notions et de résultats la classification "linéaire" des points singuliers (cols, foyers, nœuds, $\cdots$), la théorie des "conséquents" (sections de Poincaré) et le "théorème de Poincaré-Bendixson" sur la structure des ensembles-limites d'un champ de vecteurs dans le plan, l'étude des "cycles limites", le "problème du centre", la définition de l'indice d'un champ de vecteurs en un point singulier et la démonstration du "théorème de Poincaré-Hopf" sur l'égalité à la caractéristique d'Euler-Poincaré de la somme des indices d'un champ de vecteurs sur une surface, l'étude des équations différentielles sur le tore avec en particulier l'existence du "nombre de rotation" d'un homéomorphisme du cercle. Sur le problème de la stabilité, la fin du dernier Mémoire préfigure déjà les recherches des* Méthodes Nouvelles *: l'importance de la préservation d'une mesure lisse et reconnue, ainsi que la possibilité à côté d'une stabilité géométrique – trajectoire confinée – d'une stabilité qu'il appellera plus tard "à la Poisson" ou la trajectoire revient indéfiniment dans un voisinage arbitraire de ses conditions initiales après de grandes excursions (dans le cas de Poisson il s'agit des valeurs des demi-grands axes des orbites planétaires). Enfin, bien que centré sur les équations d'ordre un ou deux dont les solutions se décrivent dans le plan ou dans l'espace, Poincaré est bien conscient de l'universalité de sa démarche. Il le dit encore plus clairement dans l'*Analyse des travaux *: "Pour étendre les résultats précédents aux équations d'ordre supérieur au second, il faut renoncer à la représentation géométrique qui nous a été si commode, à moins d'employer le langage de l'hypergéométrie à n dimensions. Mais ce langage est si peu familier à la plupart des géomètres qu'on perdrait ainsi les principaux avantages que l'on peut attendre de la représentation en question. Les résultats n'en subsistent pas moins $\cdots$"*

La thèse de Poincaré, si elle n'a pas l'ampleur du Mémoire, défriche elle aussi un domaine nouveau. Il s'agit de comprendre les problèmes posés par la résolution d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre dans les cas ou la théorie de Cauchy ne s'applique pas, autrement dit faire sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre ce que Briot et Bouquet avaient fait sur les équations différentielles ordinaires (voir plus bas). On lira avec intérêt le rapport de Darboux, reproduit à la page 331 du livre qu'Hélène Gispert a consacré à l'histoire de la Société Mathématique de France, et que cette dernière a publié récemment : s'il affirme que le théorème donné au début de la deuxième partie "constitue un premier progrès réellement remarquable" et que "quelques lemmes de l'introduction ont aussi paru dignes d'intérêt", le reste de la thèse est jugé "un peu confus"$\cdots$ Le théorème dont parle Darboux concerne les équations de la forme $X \cdot z = \lambda z$, ou $X(x_1, \cdots, x_n)$ est un (germe en 0 de) champ de vecteurs holomorphe s'annulant en 0 dans C^n. Poincaré montre l'existence d'une solution holomorphe $z(x_1, \cdots, x_n)$ pour λ valeur propre de la derivée $dX(0)$ dès que *cette dernière est "non résonante" et appartient à ce qu'on appelle aujourd'hui le "domaine de Poincaré". Cette démonstration est interprétée aujourd'hui comme la possibilité de "linéariser" X au voisinage de 0 par un changement holomorphe de coordonnées. C'est l'origine de la théorie des "formes normales".*

A la suite de la thèse on trouvera une note de Poincaré, écrite en 1878 dans le **Journal de l'Ecole Polytechnique** *alors qu'il était encore Elève-Ingénieur à l'Ecole des Mines. La note prolonge le travail de Briot et Bouquet reproduit à la fin du livre en montrant que si la fonction holomorphe $f(x,y)$ est telle que $\partial_y f(0,0) = \lambda$ soit de partie réelle positive mais ne soit pas un entier positif, les solutions de l'équation différentielle $x\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, bien que non holomorphes, se laissent développer au voisinage de $x = 0$ en séries de puissances de x et x^λ.*

Le volume se clôt sur les trois Mémoires de Charles Briot et Jean-Claude Bouquet parus en 1856 au **Journal de l'Ecole Impériale Polytechnique** *: faisant "disparaître ainsi les nuages qui obscurcissaient encore le beau théorème de M. Cauchy", le premier Mémoire expose les principes de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Le théorème de Cauchy en question concerne l'équivalence – basée sur l'intégrale de Cauchy – entre analyticité (représentation par une série entière convergente) et holomorphie. Les auteurs exposent également l'extension "indiquée par M. le capitaine Laurent", le théorème de Liouville, et les résultats de ce dernier sur les fonctions doublement périodiques, un bon cours d'initiation à ce sujet en somme! Dans le deuxième Mémoire on aborde l'étude des fonctions définies par des équations différentielles. Comme le soulignera Poincaré, il s'agit d'une étude locale dans le champ complexe. Le but des auteurs est d'étendre la théorie de Cauchy aux équations $\frac{du}{dz} = f(u,z)$ dans lesquelles f n'est plus holomorphe au voisinage du point considéré (u_0, z_0). Les résultats auxquels ils sont arrivés sont très bien résumés au début de la note de 1878 de Poincaré. Ils montrent en particulier que l'étude locale d'une équation différentielle implicite algébrique $F\left(z,u,\frac{du}{dz}\right)$ se ramène "en général" à celle d'une forme normale $z\frac{du}{dz} = f(z,u)$ avec f holomorphe (points singuliers "réguliers"), et discutent la nature des solutions de cette dernière équation suivant les valeurs de $\frac{df}{du}$ au point considéré. C'est cette discussion que complète la note de Poincaré. Dans le troisième Mémoire, l'accent est mis sur la classification et l'intégration au moyen des fonctions elliptiques des équations différentielles algébriques de la forme $F\left(u,\frac{du}{dz}\right)$ qui possèdent des intégrales uniformes (monodromes dans le langage des auteurs), en particulier les onze équations de la forme $\left(\frac{du}{dz}\right)^m = f(u)$ qui admettent pour intégrales des fonctions uniformes doublement périodiques.*

Les articles cités de Poincaré etaient déjà rassemblés, parmi d'autres, dans le premier tome de ses œuvres complètes. La comparaison que suggère le présent livre aux travaux de Briot et Bouquet souligne l'intensité de la rupture qu'inaugure le Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle.

Alain CHENCINER
Paris 7

RECTIFICATIF

Ondelettes et opérateurs, Tome 3

R. R. Coifman et Y. Meyer

Editition Hermann.

La Gazette prie les Editions Hermann de l'excuser d'avoir attribué par méprise cet ouvrage aux Editions InterEditions.