

Des supraconducteurs aux gaz de Coulomb: questions de cristallisation

Sylvia SERFATY

Courant Institute, New York University

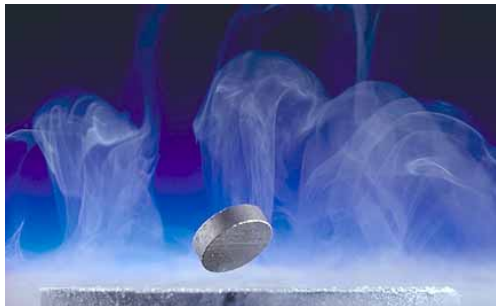
Journée SMF junior, 21 janvier 2023

Une brève introduction à la supraconductivité

- ▶ Découverte en 1911 dans le mercure par H. Kammerling Ohnes. Résistivité s'annule en-dessous d'une température critique: courants supraconducteurs et électrons supraconducteurs (**paires de Cooper**)

Une brève introduction à la supraconductivité

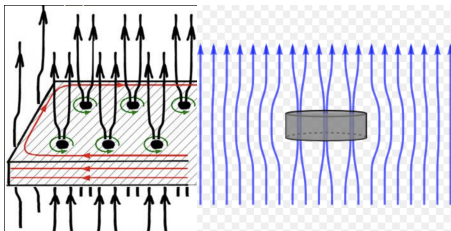
- ▶ Découverte en 1911 dans le mercure par H. Kammerling Ohnes. Résistivité s'annule en-dessous d'une température critique: courants supraconducteurs et électrons supraconducteurs (**paires de Cooper**)
- ▶ effet Meissner



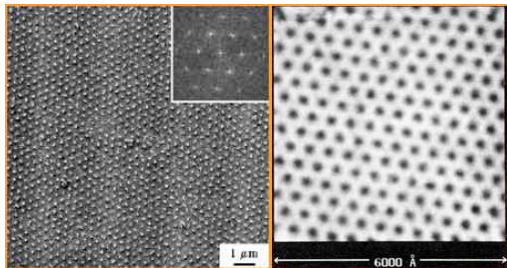
le supraconducteur **repousse le champ magnétique**

réseau d'Abrikosov

- ▶ H_{c1} premier champ critique: le champ magnétique pénètre par des **tourbillons ou vortex** (région de phase normale entourée d'une boucle de courant supraconducteur)
- ▶ Les tourbillons **se repoussent** et leur nombre augmente quand on augmente le champ appliqué



Réseaux d'Abrikosov



Abrikosov (Nobel 2003)

Le modèle de Ginzburg-Landau



Landau
1908-1968 (Nobel 1962)



Ginzburg
1916-2009 (Nobel 2003)

$$G_\varepsilon(\psi, A) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla_A \psi|^2 + |\operatorname{curl} A - h_{\text{ex}}|^2 + \frac{(1 - |\psi|^2)^2}{2\varepsilon^2}$$

$$G_\varepsilon(\psi, A) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla_A \psi|^2 + |\operatorname{curl} A - h_{\text{ex}}|^2 + \frac{(1 - |\psi|^2)^2}{2\varepsilon^2}$$

- ▶ Ω = domaine 2D
- ▶ tourbillons = zéros de ψ , avec degré
- ▶ h_{ex} = intensité du champ appliqué
- ▶ A = jauge
- ▶ ε = paramètre du matériau, on le fait $\rightarrow 0$.

On a montré [Bethuel-Brezis-Hélein, Sandier-S] que la minimisation de G_ε qd $\varepsilon \rightarrow 0$ mène à une **interaction de Coulomb entre les tourbillons**, se comportant comme des charges quantifiées.



Figure: Charles-Augustin Coulomb (1736-1806)

Electrostatique

Potentiel électrostatique ($d = 3$) entre charges ponctuelles q_1, q_2 en x_1, x_2 est proportionnel à $\frac{q_1 q_2}{|x_1 - x_2|}$



Figure: Siméon Denis Poisson (1781-1840)

Potential électrostatique h^{ρ} engendré par une densité de charge ρ vérifie:

$$-\Delta h^{\rho} = \rho \quad \text{équation de Poisson}$$

Laplace et le laplacien



Figure: Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)

Solution fondamentale du laplacien

$$-\Delta w = \delta_0 \quad (\text{au sens des distributions})$$

→ solution $w =$ "noyau de Coulomb" → résout l'équation de Poisson.

A une constante multiplicative près :

$$w(x) = \begin{cases} -|x| & d = 1 \\ -\log |x| & d = 2 \\ \frac{1}{|x|} & d = 3 \\ \frac{1}{|x|^{d-2}} & d \geq 3. \end{cases}$$

Une énergie de Coulomb à N particules

$$H_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq N} w(x_i - x_j) + N \sum_{i=1}^N V(x_i) \quad x_i \in \mathbb{R}^d$$

- ▶ avec w comme au-dessous ou plus généralement

$$w(x) = -\log|x| \quad d = 1 \quad \text{cas log}$$

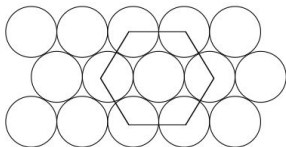
$$w(x) = \frac{1}{|x|^s} \quad \text{cas Riesz}$$

- ▶ V potentiel de confinement
- ▶ Comportement des minimiseurs de H_N quand $N \rightarrow \infty$?

- Plus généralement sur une variété \mathcal{M}

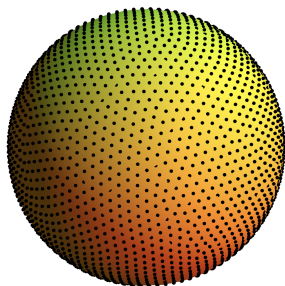
$$\min_{x_1 \dots x_N \in \mathcal{M}} \sum_{i \neq j} \frac{1}{|x_i - x_j|^s} \quad s\text{-energy de Riesz}$$

connecte l'énergie logarithmique ($s \rightarrow 0$) au problème du meilleur empilement de sphères ($s \rightarrow \infty$)



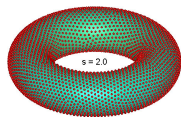
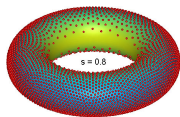
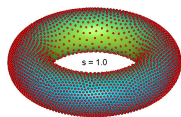
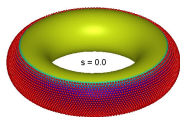
Points de Fekete sur une variété

$$\max \prod_{i \neq j} |x_i - x_j| \leftrightarrow \min - \sum_{i \neq j} \log |x_i - x_j|$$



Points de Fekete sur la sphère, $N=3000$ (Doug Hardin)

Motivation: bons points d'interpolation, molécules de carbone en ballon de foot



Points de s -energie minimale sur un tore, $s = 0, 1, 0.8, 2$
(Rob Womersley)

Avec température, mesure de Gibbs

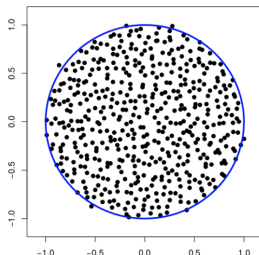
$$d\mathbb{P}_{N,\beta}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{Z_{N,\beta}} e^{-\beta H_N(x_1, \dots, x_N)} dx_1 \cdots dx_N$$

$Z_{N,\beta}$ fonction de partition function,

- ▶ modèles de **mécanique quantique**, "effet Hall quantique fractionnaire"
- ▶ modèle jouet pour les **plasmas** (astrophysique)
- ▶ avec charges \pm : modèles XY, sine-Gordon, transition de phase de Kosterlitz-Thouless

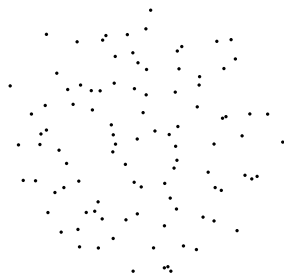
$d = 1, 2$ cas logarithmique: valeurs propres de **matrices aléatoires** (Wigner, Dyson, Mehta, Ginibre):

- ▶ $d = 1, \beta = 2, V(x) = x^2/2 \rightsquigarrow$ **GUE** (= loi des vap de matrices Hermitiennes à coeff gaussiennes complexes iid).
- ▶ $d = 1, \beta = 1, V(x) = x^2/2 \rightsquigarrow$ **GOE** (matrices réelles symétriques à coefficients gaussiennes réelles iid).
- ▶ $d = 2, \beta = 2$ et $V(x) = |x|^2 \rightsquigarrow$ **ensemble de Ginibre** (matrices à coefficients gaussiennes complexes iid).



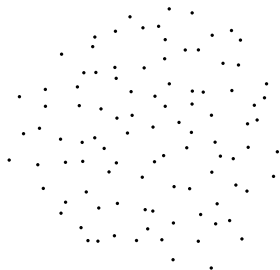
Valeurs propres de l'ensemble de Ginibre (D. Chafai)

Effet de la température



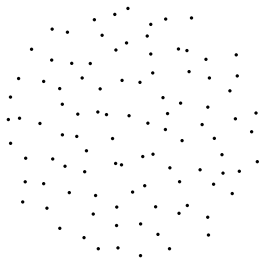
$w = -\log$, $V = |x|^2$, 100 points, $\beta \in [0.7, 400]$ (Thomas Leblé)

Effet de la température



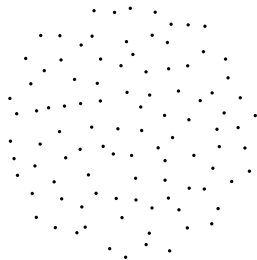
$w = -\log$, $V = |x|^2$, 100 points, $\beta \in [0.7, 400]$ (Thomas Leblé)

Effet de la température



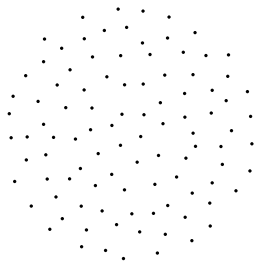
$w = -\log$, $V = |x|^2$, 100 points, $\beta \in [0.7, 400]$ (Thomas Leblé)

Effet de la température



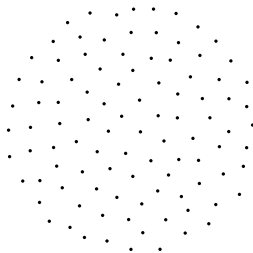
$w = -\log$, $V = |x|^2$, 100 points, $\beta \in [0.7, 400]$ (Thomas Leblé)

Effet de la température



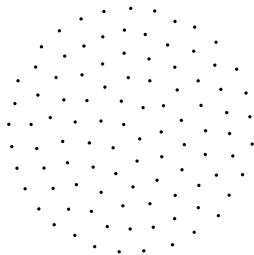
$w = -\log$, $V = |x|^2$, 100 points, $\beta \in [0.7, 400]$ (Thomas Leblé)

Effet de la température



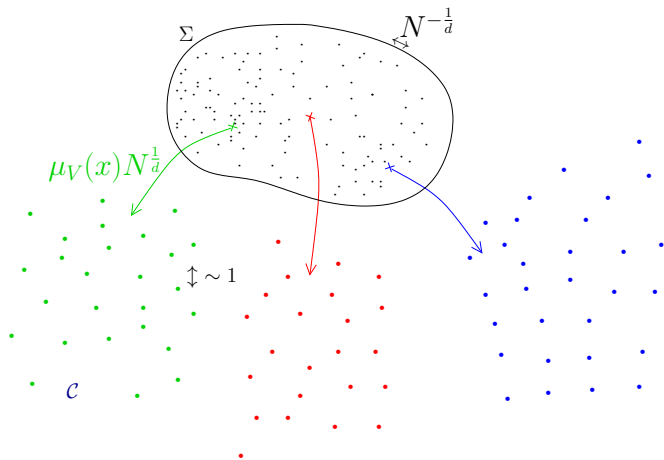
$w = -\log$, $V = |x|^2$, 100 points, $\beta \in [0.7, 400]$ (Thomas Leblé)

Effet de la température



$w = -\log$, $V = |x|^2$, 100 points, $\beta \in [0.7, 400]$ (Thomas Leblé)

Zoom et extraction d'énergie limite

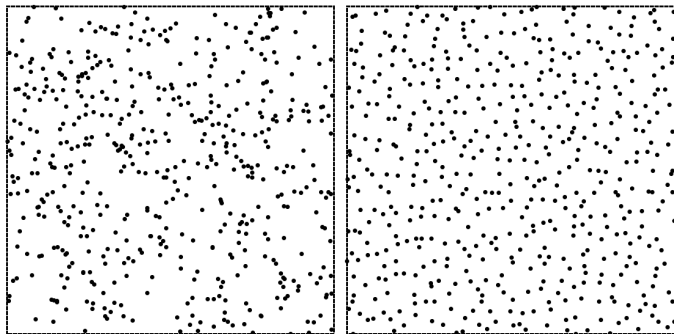


- ▶ On a montré [Sandier-S, Rougerie-S, Petrache-S] que les configurations zoomées convergent vers des minimiseurs d'une énergie de Coulomb d'un *jellium* en volume infini \mathbb{W} .
- ▶ Dans le cas avec température (Leblé-S) le processus ponctuel limite minimise

$$\mathbb{W} + \frac{1}{\beta} \text{entropie relative}$$

- ▶ Compétition entre ordre et désordre: \mathbb{W} préfère les configurations ordonnées, l'entropie relative les distributions poissonniennes

Images de processus ponctuels limites



Le processus de **Poisson** et le processus de **Ginibre**
(limite du gaz de Coulomb planaire à $\beta = 2$)
(Alon Nishry)

Minimiseurs à température nulle

- ▶ cas température nulle, minimiser \mathbb{W} .
- ▶ cas des *configurations périodiques* à n points par période, \mathbb{W} peut s'écrire

$$\mathbb{W}(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{|\mathbb{T}|} \sum_{j \neq k} G(a_j - a_k) + \lim_{x \rightarrow 0} (G(x) + w(x)),$$

avec G = fonction de Green du tore ($-\Delta G = \delta_0 - 1/|\mathbb{T}|$), prend la forme d'une série d'Eisenstein.

- ▶ A quoi ressemblent les minimiseurs de \mathbb{W} ? Sont-ils des réseaux?

Questions de cristallisation : nombreuses ramifications

- famille plus générale des **problèmes de cristallisation**: étant donné U , trouver les points qui minimisent

$$\sum_{i \neq j} U(x_i - x_j)$$

(+ condition de bord)? Ou plutôt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_R|} \sum_{i \neq j, x_i, x_j \in B_R} U(x_i - x_j)?$$

Sont-ce des réseaux?

Questions de cristallisation : nombreuses ramifications

- ▶ famille plus générale des **problèmes de cristallisation**: étant donné U , trouver les points qui minimisent

$$\sum_{i \neq j} U(x_i - x_j)$$

(+ condition de bord)? Ou plutôt

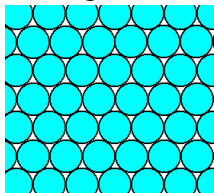
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_R|} \sum_{i \neq j, x_i, x_j \in B_R} U(x_i - x_j)?$$

Sont-ce des réseaux?

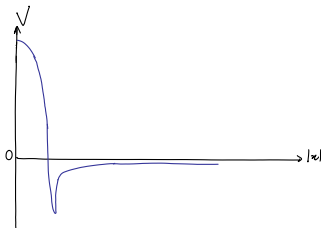
- ▶ Question scientifique importante : **structure cristalline** de la matière

Quelques résultats positifs

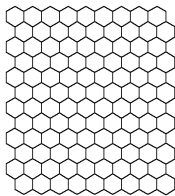
- ▶ pour le problème d'empilement de sphères en 2D (interaction sphères dures) le réseau triangulaire est le minimiseur



- ▶ [Radin '81, Theil '06] montrent le même résultat pour des caricatures de potentiel de Lennard-Jones



- ▶ la conjecture du nid d'abeille [Hales '01]:
Le pavage du plan par des hexagones minimise le périmètre total parmi les pavages de même périmètre

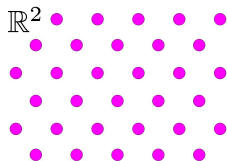


- ▶ empilement des sphères en 3D (conjecture de Kepler) aussi résolue par [Hales '14].

La conjecture de Cohn-Kumar '09

Il y a des **réseaux particuliers** en dimensions 2, 8, 24

- ▶ en $d = 2$ le réseau triangulaire



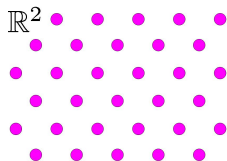
- ▶ en $d = 8$ le réseau E_8
- ▶ en $d = 24$ le réseau Λ_{24}

qui sont **universellement minimisants**, cad minimisent l'énergie d'interaction dès que $U(x) = f(|x|^2)$ avec f complètement monotone: $(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$.

La conjecture de Cohn-Kumar '09

Il y a des **réseaux particuliers** en dimensions 2, 8, 24

- ▶ en $d = 2$ le réseau triangulaire



- ▶ en $d = 8$ le réseau E_8
- ▶ en $d = 24$ le réseau Λ_{24}

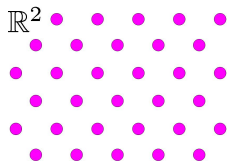
qui sont **universellement minimisants**, cad minimisent l'énergie d'interaction dès que $U(x) = f(|x|^2)$ avec f complètement monotone: $(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$.

Cela inclut le problème d'empilement de sphères!

La conjecture de Cohn-Kumar '09

Il y a des **réseaux particuliers** en dimensions 2, 8, 24

- ▶ en $d = 2$ le réseau triangulaire



- ▶ en $d = 8$ le réseau E_8
- ▶ en $d = 24$ le réseau Λ_{24}

qui sont **universellement minimisants**, cad minimisent l'énergie d'interaction dès que $U(x) = f(|x|^2)$ avec f complètement monotone: $(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0$.

Cela inclut le problème d'empilement de sphères!

[Petrache-S '20] La conjecture de Cohn-Kumar implique le même résultat pour \mathbb{W} (version Coulomb ou Riesz)

- ▶ percée: [Viazovska '19] a montré que E_8 résout le problème d'empilement de sphères en dimension 8, puis [Cohn-Kumar-Miller-Radchenko-Viazovska '19] l'ont montré pour Λ_{24} en dimension 24
- ▶ la conjecture de Cohn-Kumar complète est **résolue** en dimensions 8 et 24! [Cohn-Kumar-Miller-Radchenko-Viazovska '20] \rightsquigarrow minimisation de \mathbb{W} résolue dans ces dimensions, mais toujours pas en dimension 2!
- ▶ en grande dimension les minimiseurs **ne sont pas en général** des réseaux!...
- ▶ en dimension $d \rightarrow \infty$, ils sont importants en *informatique théorique* et *théorie du codage*

Conjecture

En dimension 2, le réseau triangulaire est un minimiseur global de \mathbb{W} .

conjecture en accord avec les observations de réseaux d'Abrikosov

Conjecture

En dimension 2, le réseau triangulaire est un minimiseur global de \mathbb{W} .

conjecture en accord avec les observations de réseaux d'Abrikosov

Résultat partiel : le réseau triangulaire atteint l'unique minimum **parmi les réseaux** (de volume donné)

Conjecture

En dimension 2, le réseau triangulaire est un minimiseur global de \mathbb{W} .

conjecture en accord avec les observations de réseaux d'Abrikosov

Résultat partiel : le réseau triangular atteint l'unique minimum **parmi les réseaux** (de volume donné)

[Cassels, Rankin, Ennola, Diananda, 50's, Montgomery 80's]: le réseau triangular atteint l'unique minimum parmi les réseaux de

$$\zeta_s(\Lambda) = \sum_{p \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|p|^s} \quad s > 2$$

Conjecture

En dimension 2, le réseau triangulaire est un minimiseur global de \mathbb{W} .

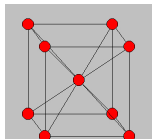
conjecture en accord avec les observations de réseaux d'Abrikosov

Résultat partiel : le réseau triangulaire atteint l'unique minimum **parmi les réseaux** (de volume donné)

[Cassels, Rankin, Ennola, Diananda, 50's, Montgomery 80's]: le réseau triangulaire atteint l'unique minimum parmi les réseaux de

$$\zeta_s(\Lambda) = \sum_{p \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|p|^s} \quad s > 2$$

En dimension 3, est-ce que le réseau BCC (body centered cubic) joue ce rôle?



Conclusion

- ▶ Les interactions de Coulomb et Riesz apparaissent dans d'importants systèmes physiques (des supraconducteurs aux plasmas, mécanique quantique, matrices aléatoires)
- ▶ leur étude mêle analyse, probabilité, géométrie, théorie des nombres
- ▶ on peut en dériver rigoureusement des questions (difficiles) de cristallisation

Conclusion

- ▶ Les interactions de Coulomb et Riesz apparaissent dans d'importants systèmes physiques (des supraconducteurs aux plasmas, mécanique quantique, matrices aléatoires)
- ▶ leur étude mêle analyse, probabilité, géométrie, théorie des nombres
- ▶ on peut en dériver rigoureusement des questions (difficiles) de cristallisation

Il reste bcp de questions ouvertes!

- ▶ le réseau triangulaire est-il optimal en 2D?
- ▶ combien de ces comportements est spécifique aux interactions de Coulomb/Riesz ?
- ▶ ...

MERCI DE VOTRE ATTENTION!