Société mathématique de France
Bibliothèque nationale de France

un texte, un mathématicien 2023

Laure Saint-Raymond

Grégory Miermont

Virginie Bonnaillie-Noël

David Harari

Tangente

Animath

BnF

Société Mathématique de France

**Bienvenue aux auditeurs,
jeunes et moins jeunes, du cycle de conférences
« Un texte, un mathématicien » !**

**La Bibliothèque nationale de France
est une des plus grandes et plus anciennes
bibliothèques, qui contient des millions d'ouvrages,
dans tous les champs du savoir
y compris les sciences.**

**La Société mathématique de France
est une des plus anciennes sociétés savantes,
ayant pour but « l'avancement et la propagation des études de mathématiques pures et appliquées ».**

**Pour la dix neuvième année, la BnF et la SMF
s'associent pour organiser ces conférences où
de grands chercheurs nous montreront le chemin
qui mène d'un grand texte classique de
mathématiques jusqu'à la recherche contemporaine.**

Partageons ensemble leur passion.

**Bibliothèque nationale de France
Société mathématique de France**

Décrire mathématiquement les gaz : le défi de Boltzmann

Laure Saint-Raymond

Mercredi 18 janvier 2023

Le 5 septembre 1906, Ludwig Boltzmann se suicide au château de Duino, près de Trieste où il passe ses vacances en famille. Il occupe pourtant une chaire prestigieuse de physicien et de philosophe à l'université de Vienne, est un enseignant hors pair unanimement apprécié de ses étudiants, un mari et un père bienveillant… mais ses travaux font l'objet de fortes controverses. Il ne saura jamais que les dits travaux vont révolutionner des pans entiers de la physique classique, et préfigurer certaines idées de la physique quantique !

Cent cinquante ans après son introduction, l'équation qui porte désormais le nom de Boltzmann reste à la fois un modèle très utilisé pour la simulation des gaz peu denses (par exemple pour la haute atmosphère et les calculs de rentrée atmosphérique de véhicules spatiaux), et un objet d'étude théorique qui pose de nombreux défis et engendre une activité de recherche importante.

L'intuition géniale de Boltzmann a consisté à introduire une description probabiliste des gaz. Cette description est en quelque sorte intermédiaire entre la mécanique classique (qui décrit la trajectoire de chacune des particules microscopiques de gaz, et est de ce fait d'une complexité inextricable), et la mécanique des fluides continus (basée sur l'hypothèse très forte qu'en chaque point du fluide on a un très grand nombre de particules qui sont à l'équilibre thermodynamique, de sorte que l'état du fluide peut être décrit par un petit nombre de grandeurs : température, pression, vitesse moyenne d'écoulement...).

Dans la théorie de Boltzmann, on décrit donc l'état d'un gaz en comptant, à chaque instant t, la proportion de particules qui ont approximativement la position x et la vitesse v. On obtient ainsi une fonction f qui dépend de t, x, et v, et dont l'intégrale (la somme sur tous les x et v) est égale à 1.

Pour prédire l'évolution du gaz, on doit alors écrire une équation sur la variation de f(t) en fonction du temps, c'est-à-dire une équation sur sa dérivée f'(t). Physiquement cette évolution est due à la combinaison de deux phénomènes.

- Le transport : une particule de position x et de vitesse v à l'instant t, si elle ne rencontre pas d'obstacle, sera à la position $x+v\ \delta t$ à l'instant $t+\delta t$.
- Les collisions : quand deux particules se touchent, elles sont réfléchies comme deux boules de billard.

La difficulté est d'estimer la probabilité que deux particules se touchent. Boltzmann obtient son équation en supposant que les particules sont plus ou moins indépendantes les unes des autres. C'est la première fois que quelqu'un écrit une équation différentielle pour des probabilités !

Une propriété cruciale de l'équation de Boltzmann ainsi obtenue est qu'elle prédit que les gaz ont une évolution irréversible, et finissent toujours par se retrouver dans une situation d'équilibre (avec une répartition uniforme en x et gaussienne en v).

Cela est tout-à-fait conforme aux observations que l'on peut faire dans la vie réelle (où l'évolution représentée par la flèche verte est plausible, contrairement à celle représentée par la flèche rouge, voir figure page suivante). Mais cette propriété semble à première vue contredire ce qui est attendu mathématiquement pour des grands billards.

C'est ce paradoxe qui a suscité une certaine méfiance de la part de la communauté scientifique et attiré beaucoup d'ennuis à Boltzmann.

Depuis l'eau a coulé sous les ponts et on sait maintenant que l'irréversibilité est en fait un problème de probabilités, qu'on essaiera d'élucider dans cette conférence…

Autour du texte :

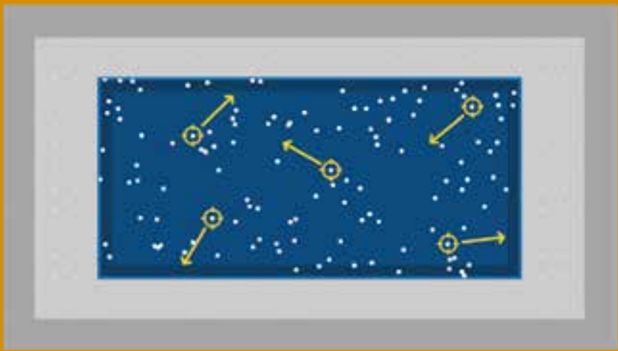
Ludwig Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie, Bd I & II, Leipzig, J.A. Barth (1896-1898)

(Leçons sur la théorie des gaz, Vol. I & II, Paris, Gauthier-Villars (1902-1905).

Laure Saint-Raymond est actuellement professeure à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Elle dirige également l'Institut des Mathématiques de la Planète Terre depuis 2021. Ses travaux portent principalement sur la dynamique des gaz et des fluides. Avec différents collaborateurs, elle a apporté des contributions fondamentales au sixième problème de Hilbert

concernant l'axiomatisation de la mécanique, un des 23 problèmes proposés par David Hilbert au congrès international de mathématiques de 1900, non encore résolu à ce jour : l'objectif est de montrer que les modèles décrivant un fluide à différentes échelles sont compatibles entre eux. En parallèle, elle travaille sur les courants océaniques : elle étudie en particulier l'influence de la rotation et de la stratification sur la propagation des ondes, et les phénomènes de couches limites.

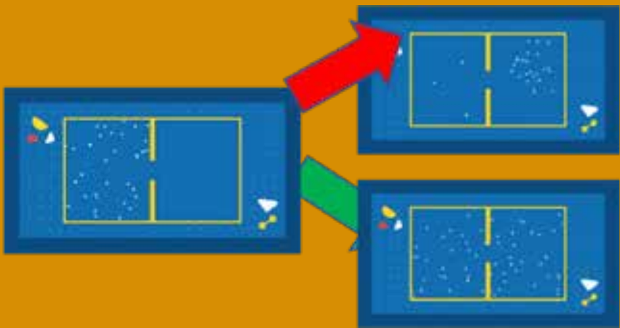
Ludwig Boltzmann, un des pères de la physique moderne



Une théorie révolutionnaire mais controversée

Le gaz évolue sous l’action combinée du transport (haut) et des collisions (bas)

Le second principe de la thermodynamique interdit les évolutions vers des états moins probables (haut), et prédit une relaxation vers des états les plus probables, qui ont une entropie maximale (bas).



Bibliographie sélective

Œuvres de Ludwig Boltzmann

Boltzmann, Ludwig (1844-1906)
Leçons sur la théorie des gaz, Paris, Gauthier-Villars, 1902-1905, 280. p. [trad. par A. Gallotti ; avec une introd. et des notes de M. Brillouin].

Boltzmann, Ludwig (1844-1906)
Leben und Briefe, Graz : Akademische Druck-u. Verl., 1994, (pas de n. de pages).

Boltzmann, Ludwig (1844-1906)
Voyage d'un professeur allemand en Eldorado et autres écrits populaires, trad. de l'allemand par Ulrike Bockskopf et Didier Aviat, de Populären Schriften, Actes Sud, 1987, 144 p.

Sur la vie et les travaux de Ludwig Boltzmann

Cercignani, Carlo
Ludwig Boltzmann, the man who trusted atoms, Oxford: New York, Melbourne, Oxford University Press, 1998, 329 p.

Darrigol, Olivier
Atoms, mechanics, and probability. Ludwig Boltzmann's statistico-mechanical writings : an exegesis, Oxford : Oxford University Press, 2018, 612 p.

Pour commencer sur l'équation de Boltzmann

Bodineau, Thierry, Gallagher, Isabelle, Saint-Raymond, Laure, Pajot, Philippe
« Calculer la marche du hasard dans les gaz », *La Recherche*, n. 521, mars 2017, P. 63-67.

Saint-Raymond, Laure
« Boltzmann et l'irréversibilité, une histoire de probabilités », *Tangente*, n. 133, 2010, p. 12-14.

Saint-Raymond, Laure
« 140 ans après Boltzmann, que comprenons-nous de l'entropie ? », *Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie*, n. 1000, 2018, p. 227-234.

Pour aller plus loin

Bodineau, Thierry, Gallagher, Isabelle, Saint-Raymond, Laure, Simonella, Sergio
« Dynamics of dilute gases: a statistical approach », proceeding of the International Congress of Mathematicians (2022). Voir le préprint : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03540993/

Cercignani, Carlo, Illner, Reinhardt, Pulvirenti, Mario
The mathematical theory of dilute gases, New-York, Springer, 1994, 349 p.

Saint-Raymond, Laure
« L'équation de Boltzmann : état de l'art et perspectives », Leçons de Mathématiques d'Aujourd'hui, vol. 5, Ed. Cassini, 2019.

Villani, Cédric
« Limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann », Séminaire Bourbaki, n. 893, 53e année, 2000-2001, p. 365-405.

Sur le web

CEA Recherche
« Les équations clefs de la physique : la formule de Boltzmann, #5 », page consultée le 12 décembre 2022.
https://www.youtube.com/watch?v=vs0J9qpppUA

Institut des Hautes Etudes Scientifiques
« Boltzmann and the bridge between two worlds », page consultée le 12 décembre 2022.
https://www.youtube.com/watch?v=uJGyTcehW18

Saint-Raymond, Laure
« Dynamics of dilute gases : a statistical approach », Conférence à l'International Mathematical Union, 2022, page consultée le 12 décembre 2022.
https://www.youtube.com/watch?v=VMVI055YhEU

Saint-Raymond, Laure
Large-Scale Limits of Interacting Particle Systems, « Statistical Description of a Hard Sphere Gas Dynamics 1/2 and 2/2», Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures-Sur-Yvettes, 4-8 Octobre 2021, page consultée le 12 décembre 2022.
Deux conférences à consulter en ligne: https://www.youtube.com/watch?v=YIuC8H0Tzm4 et https://www.youtube.com/watch?v=c9h54SPNcDk

Blaise Pascal, géomètre du hasard

Grégory Miermont

Mercredi 08 février 2023

Nous sommes en 1654. Pour Blaise Pascal, qui a trente-et-un ans, c'est une année charnière. Enfant précoce, physicien, ingénieur et mathématicien en pleine maturité, il a déjà à son actif des découvertes retentissantes, comme ses travaux précurseurs de la géométrie projective, l'invention de la première machine à calculer, et sa théorie sur l'équilibre des fluides et la pression, dont est issue le principe de la presse hydraulique. Bientôt, sa vie va connaître une inflexion, marquée par une révélation mystique qui le frappera en novembre de cette année, et il deviendra également l'écrivain, moraliste, philosophe et théologien dont les Pensées marqueront durablement les sciences humaines et sociales. Pour le moment, Pascal fréquente des cercles intellectuels mondains auprès desquels son esprit vif trouve de nombreuses occasions de s'exercer. Et une question de son ami Antoine Gombaud, chevalier de Méré, va l'occuper singulièrement : le problème des partis. Deux personnes s'affrontent dans un jeu en plusieurs manches gagnantes, l'issue de chacune étant déterminée par le pur hasard, par exemple un lancer de pile-ou-face. Pour intéresser le jeu, des mises initiales sont placées. Si les joueurs décident de s'interrompre avant la conclusion de leur partie, comment doivent-ils convenir de se partager l'argent mis en jeu en fonction des résultats des manches déjà jouées, « proportionnellement à ce qu'ils auraient droit d'espérer de la fortune » ? Cette question n'est pas nouvelle, il en est question depuis le XVème siècle au moins, dans les écrits des mathématiciens italiens Pacioli, Cardano — le premier à rédiger un traité sur la mathématique des « jeux de dés » — et Tartaglia, mais les solutions proposées, d'ailleurs probablement inconnues de nos protagonistes, sont insatisfaisantes.

Pascal va rapidement résoudre ce problème, et, sur les conseils de Roberval, entamer à son sujet une correspondance avec Pierre de Fermat pendant l'été. L'énigme ne pose aucune difficulté au grand mathématicien toulousain, qui en donne une solution concise et élégante, et malheureusement perdue, mais dont on peut deviner les contours grâce au reste de la correspondance. Les deux hommes comparent et développent leurs solutions, bien différentes en essence, et

éclaircissent quelques malentendus quant à la portée de la méthode de Fermat. Il est intéressant de mettre les deux approches en regard. Si celle de Fermat est de nature combinatoire, celle de Pascal, qui se base sur un raisonnement par récurrence, fait intervenir avant la lettre la notion typiquement probabiliste d'espérance mathématique, et, au prix d'un peu d'audace, on peut y déceler les prémices de certaines notions modernes de processus aléatoires. Pascal est grisé par cette découverte, dont il perçoit toute la portée scientifique et philosophique. D'après lui, elle porte en germe la géométrie du hasard, théorie mathématique presque contre nature puisqu'elle lie la rigueur du calcul arithmétique avec l'insaisissable inconstance de ce qui nous échappe par essence. Cette science devrait permettre de peser rationnellement les risques et espérances de tout « travail pour l'incertain » : jeux de hasard, économie, justice, assurances... et même « les voyages sur mer, les batailles » ! Il en explorera même les conséquences morales dans le fameux argument du « pari ». Pourtant, malgré son intention première de s'atteler à la rédaction d'un traité sur cette nouvelle science, il laissera ce travail à d'autres, à commencer par Christian Huygens qui formalisera et développera dès 1657 les implications des découvertes de Pascal et Fermat.
La théorie des probabilités est née, même si elle requerra encore beaucoup de temps et de travail avant d'être ainsi baptisée, et de s'insérer dans le champ mathématique, passant du simple statut de « calcul » à celui de théorie à part entière. Rétrospectivement, que peut inspirer la correspondance entre Pascal et Fermat à l'œil moderne, rompu à un formalisme poli par les siècles dont nos deux héros ne pouvaient avoir qu'une intuition vague et lointaine ? Cette question a bien sûr été régulièrement débattue, et cet exposé sera l'occasion d'y apporter quelques éléments de réponse.

Autour du texte :
La correspondance Pascal-Fermat sur les problèmes des partis, et notamment sur la lettre du 29 juillet 1654 de Pascal à Fermat.

Grégory Miermont est professeur à l'Unité de mathématiques pures et appliquées de l'Éns de Lyon. Spécialiste de théorie des probabilités, il s'intéresse principalement à l'étude de grandes structures combinatoires

aléatoires, dont la particularité est de pouvoir souvent être décrites par des processus stochastiques discrets ou continus. Une partie importante de ses travaux concerne l'étude de grandes cartes aléatoires et de leurs limites d'échelle, qui permettent de définir des modèles canoniques et universels de surfaces aléatoires. Ces questions se situent à une riche interface entre probabilités, combinatoire, géométrie et physique mathématique.

Blaise Pascal
(1623 –1662)
(source Wikipedia)

Les « vieilles tables » transmises à Fermat par Pascal, le 29 août 1654

TABLE

…T FAIT MENTION DANS LA LETTRE PRÉCÉDENTE.

Si on joue chacun 256, en

		6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
Il m'appartient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour la	1re Partie.	63	70	80	96	128	256
	2e Partie.	63	70	80	96	128	
	3e Partie.	56	60	64	64		
	4e Partie.	42	40	32			
	5e Partie.	24	16				
	6e Partie.	8					

Si on joue 256, chacun, en

		6 Parties.	5 Parties.	4 Parties.	3 Parties.	2 Parties.	1 Partie.
Il m'appartient sur les 256 de mon joueur, pour les	La 1re Partie.	63	70	80	96	128	256
	2 1res Parties.	126	140	160	192	256	
	3 1res Parties	182	200	224	256		
	4 1res Parties.	224	240	256			
	5 1res Parties.	248	256				
	6 1res Parties.	256					

Pierre de Fermat
(– 1665)
(source Wikipedia)

Bibliographie sélective

Œuvres de Blaise Pascal

Pascal, Blaise (1623-1662)
La Correspondance de Blaise Pascal et de Pierre de Fermat : la géométrie du hasard ou le calcul des probabilités, Fontenay-aux-Roses : Éns [École normale supérieure], 1983, 87 p.

Pascal, Blaise (1623-1662)
Traité du triangle arithmétique, [Reproduction en fac-similé de l'éd. du 17e], Saint-Christophe-en-Bresse: Éd. les Caractères d'Ulysse, 2011, 64 p.

Pascal, Blaise (1623-1662)
Œuvres complètes, I, éd. présentée, établie et annotée par Michel Le Guern, Paris : Gallimard, 1998, 1378 p.
Œuvres complètes, II, éd. présentée, établie et annotée par Michel Le Guern, Paris : Gallimard, 1999, 1710 p.

Œuvres de Pierre de Fermat

Fermat, Pierre de
Varia opera mathematica D. Petri de Fermat, 1679. - *Précis des œuvres mathématiques / de Pierre de Fermat* ; par M. E. Brassinne, 1989 (reprod. en fac-sim. de l'éd. de 1853).

Fermat, Pierre de
Œuvres, publiées par les soins de Paul Tannery et Charles Henry. Paris : Gauthier-Villars et fils, 1891-1922. 5 vol.

Sur les œuvres de Blaise Pascal

Coumet, Ernest
« Le problème des partis avant Pascal », *Archives internationales d'histoire des sciences*, 18e année, n°72-73, 1965, p. 245-272.

Coumet, Ernest
« La théorie du hasard est-elle née par hasard ? », *Annales : Économie, Sociétés, Civilisations*, 25e année, n. 3, 1970, p. 574-598.

Derriennic, Yves
« Pascal et les problèmes du Chevalier de Méré », *Gazette de la société mathématique de France*, n. 97, 2003, p. 45-71.

Godfroy-Genin, Anne-Sophie
« Pascal : La géométrie du hasard », *Mathematics and social sciences*, 150, Été 2000, La doctrine des chances : sur le calcul des probabilités, mis en ligne le 10 février 2006, consulté le 30 novembre 2022. http://journals.openedition.org.bnf.idm.oclc.org/msh/2824

Parzysz, Bernard
« Fermat, Pascal et le problème des partis », *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*, n. 519, 2016, p. 310-319.

Quelques ouvrages historiques sur les propabilités

Bernoulli, Jakob (1654-1705)
The Art of Conjecturing, together with - Letter to a Friend on Sets in Court Tennis, (trad. du latin par Edith Sylla), Baltimore, Johns Hopkins University Press, 2006, 430 p.

Borel, Émile (1871-1956)
Traité du calcul des probabilités et de ses applications, 2e édition, Gauthier-Villars et Cie, 1962.

Cardan, Jérôme (1501-1576)
Liber de ludo aleae, in Opera omnia ; a cura di Massimo Tamborini, Milano : F. Angeli, cop. 2006, 426 p.

Huygens, Christiaan (1629-1695)
De ratiociniis in ludo aleae, éditeur Ex officinia J. Elsevirii, 1657, 18 p.

Kolmogorov, Andrej Nikolaevič (1903-1987)
Selected works of A. N. Kolmogovrov. Volume II, Probability theory and mathematical statistics / ed. by A. N. Shiryayev ; transl. from the Russian by G. Lindquist, 1991-1993.

Laplace, Pierre-Simon de (1749-1827)
Théorie analytique des probabilités, Paris, Courcier, 1812, 464 p.

Moivre, Abraham de (1667-1754)
The Doctrine of Chances: A Method of Calculating the Probabilities of Events in Play, New-York, Chelsea Publishers, 1716 (réimpr. 2000), 3e édition, 368 p.

Ouvrages modernes relatifs aux probabilités

Kallenberg, Olav
Foundations of Modern Probability, 3rd edition, Springer, 2021, 295 p.

Pagès, Gilles, Bouzitat, Claude
En passant par hasard, les probabilités de tous les jours, Paris, Vuibert, 1999, 268 p.

Peut-on entendre la forme d'un tambour ? D'après Mark Kac

Virginie Bonnaillie-Noël

Mercredi 22 mars 2023

Fixez une plaque à un support, saupoudrez-la de sable, puis frottez un archet verticalement sur le bord de la plaque. Le sable se déplacera alors des zones de forte vibration vers celles où elles sont moins fortes, formant des figures dites de Chladni.

Ce phénomène a été observé par Galilée en 1638. C'est Ernst Chladni, grâce à la publication en 1787 du traité *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*, qui permet de diffuser ce phénomène. Les figures observées portent désormais son nom. Elles permettent de « voir un son ». Napoléon, impressionné devant un tel phénomène, promit un prix à celui qui pourrait expliquer comment se forment ces figures. Le prix fut remporté par Sophie Germain.

L'apparition des lignes dessinées sur la plaque est liée au son qu'elle produit lorsqu'on la fait vibrer.

Lorsqu'un objet (corde, membrane, plaque, diapason) vibre, sa forme lui impose certains types de mouvements périodiques... Ces vibrations peuvent se décomposer en certaines vibrations périodiques élémentaires. Ces vibrations élémentaires se produisent à des fréquences (nombre de périodes par seconde) bien précises. On les appelle modes propres et fréquences propres.

Regardons l'exemple d'une corde élastique tendue et fixée à chacune de ses extrémités. Ca peut être le cas d'une guitare ou d'un piano par exemple. Lorsqu'on tape la corde, elle se met à vibrer à une fréquence déterminée. Elle pourrait vibrer indéfiniment s'il n'y avait pas de déperdition d'énergie. Ce mouvement peut être décomposé en une collection de mouvements simples, les modes propres auxquels correspondent des fréquences propres. Ces modes propres sont des sinusoïdes (voir figure).

Si on envoie une vibration sur l'objet à sa fréquence de vibration se produit alors un phénomène d'amplification. C'est ce qui s'est passé en 1831 sur le pont de Broughton, l'un des premiers ponts suspendus en Europe : alors que la troupe marchait au pas cadencé sur le pont, il se produisit un phénomène de résonance mécanique qui provoqua la ruine du pont. Désormais, les militaires rompent la cadence lorsqu'ils franchissent un pont. Ces exemples montrent qu'à chaque forme correspond des modes et fréquences propres. En 1966, Kac se pose la ques-

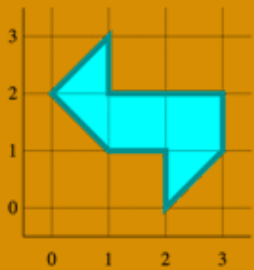
tion du « problème inverse » dans l'article intitulé « Peut-on entendre la forme d'un tambour ?». Dans cet article, Mark Kac formule la question suivante : si vous entendez quelqu'un jouer du tambour, et à supposer que vous connaissez les fréquences correspondant aux sons perçus, serez-vous capable de déterminer la forme exacte de l'instrument qui a servi à les produire ? Ou, au contraire, existe-t-il plus d'un tambour capable de donner les sons en question ? Milnor répond presque immédiatement à la question en exhibant un contre-exemple avec une paire de tores à 16 dimensions ayant le même spectre mais des formes différentes. Il faut attendre 1992 pour obtenir la réponse en dimension 2 : C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert ont montré que la liste des fréquences propres n'est pas caractéristique du tambour. Les deux tambours de forme décrites sur la figure de la page suivante ont les mêmes fréquences propres, la même aire mais ne sont pas identiques. En cinquante ans, la question posée par Kac est devenue extrêmement classique et source de nombreux travaux. En particulier, il s'agit soit de comprendre si la réponse peut être positive sous des contraintes supplémentaires ou si la réponse est la même pour d'autres modèles.

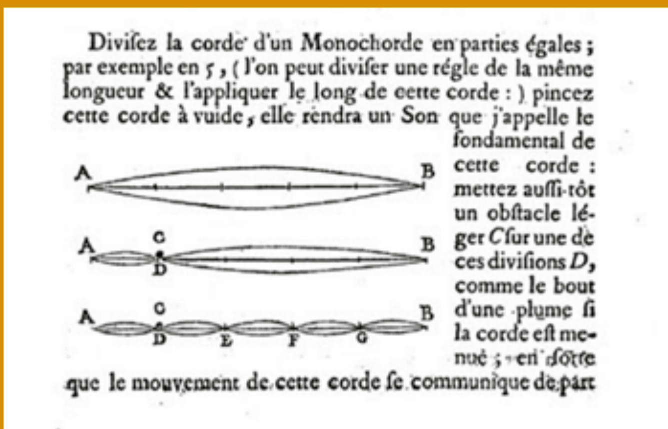
Autour du texte :

Kac, Mark Can one hear the shape of a drum? Amer. Math. Monthly 73 (1966), no. 4, part II, 1-23

Virginie Bonnaillie-Noël, ancienne élève de l'École normale supérieure de Cachan, agrégée de mathématiques en 2000 et docteure en mathématiques en 2003 de l'université Paris-Sud 11, elle entre au CNRS en 2004 en tant que chargée de recherche à l'Institut de recherche Mathématique de Rennes. Spécialiste des équations aux dérives partielles, de la théorie spectrale et des analyses asymptotiques et numériques, elle est lauréate, en 2008, de la médaille de bronze du CNRS et en 2009 du prix Irène Joliot-Curie « Jeune femme scientifique ». En 2014, elle devient directrice de recherche au Département de mathématiques et applications (ENS-PSL et CNRS) et est nommée directrice adjointe scientifique de l'Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions (INSMI) du CNRS. Depuis 2018, elle est directrice de direction d'appui aux partenariats publics du CNRS.

Le second pont suspendu de Broughton (reconstruit en 1883).





Diviſez la corde d'un Monochorde en parties égales ; par exemple en 5, (l'on peut diviſer une régle de la même longueur & l'appliquer le long de cette corde :) pincez cette corde à vuide, elle rendra un Son que j'appelle le fondamental de cette corde : mettez auſſi-tôt un obſtacle léger C ſur une de ces diviſions D, comme le bout d'une plume ſi la corde eſt menuë ; en ſorte que le mouvement de cette corde ſe communique de part

Le système général de Sauveur dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1701)

Bibliographie sélective

Œuvres

Kac, Mark (1914-1984)
« Can one hear the shape of e drum ? », American Mathematical Monthly, 73, 1966, n. 4, part II, p. 1-23. https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/m207b/kac.pdf

Kac, Mark (1914-1984), Ulam, Stanislaw Marcin (1909-1984)
Mathematics and logic, retrospect and prospects. New-York, Washington, London, F.A. Praeger, 1968, 170 p.

Kac, Mark (1914-1984) , Ulam, Stanislaw Marcin (1909-1984)
Mathématiques et logique : rétrospective et perspectives, traduit par Philippe Gatbois, Paris, Dunod, 1973, 178 p.

Kac, Mark (1914-1984), Rota, Gian-Carlo (1932-1999) , Schwartz, Jacob T. (1930-2009)
Discrete thoughts : essays on mathematics, science, and philosophy, Boston, Birkhäuser, 1986, 264 p.

Kac, Marc (1914-1984)
Enigmas of chance. An autobiography. Alfred P. Sloan Foundation, New-York : Harper & Row, 1985, 163 p.

Sur les œuvres

Giraud, Olivier, Thas, Koen
« Hearing shapes of drums : mathematical and physical aspects of isospectrality », Review of Modern Physics, 82, (3), 2010, p. 2213-2255.

Gordon, Carolyn, Webb, David
« You Can't Hear the Shape of a Drum », American Scientist, vol. 84, n. 1, (January-February 1996), p. 46-55.

Pleijel, Ake
« A study of certain Green's functions with applications in the theory of vibrating membranes », Arkiv för Matematik, 2, 1954, p. 553-569.

Pleijel, Ake
« Remarks on Courant's nodal line theorem », Communications on Pure Applied Mathematics, vol. 9, 1956, p. 543–550.

Pólya, George
« On the eigenvalues of vibrating membranes », proceedings of the London Mathematical Society, (3), 11, 1961, p. 419–433.

Protter, Muray Harold
« Can one hear the shape of a drum ? Revisited », Society for Industrial Applied Mathematics, vol. 29, n. 2, june 1987, p. 185-197.

Stewart, Ian
« Écoutez la forme du tambour », Mon cabinet de curiosités mathématiques, 2009, Paris, Flammarion, p. 198–201.

Stöckmann, H.J.
« Chladni meets Napoleon », European Physical Journal of Special Topics, n. 145, p. 15–23, 2007.

Vignéras, Marie-France
« Variétés riemanniennes iso-spectrales et non isométriques », Annals of Mathematics, Princeton University Press, n. 112, p. 21-32, 1980.

Weyl, Hermann
« Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte », Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften Zu Göttingen, 1911, p. 110–117.

Sur le web

Siltanen, Samuli
Can one hear the shape of a drum? Page consultée le 07.12.2022.
Voir : https://www.youtube.com/watch?v=SIOLRcU7FZo

Cantat, Serge, Hillairet, Luc
« Les figures sonores de Chladni », dans Images des Mathématiques, Juillet 2012, page consultée le 12.12.2022. Voir : https://images.math.cnrs.fr/Les-figures-sonores-de-Chladni

Legendre : à la recherche de solutions entières

David Harari

Mercredi 12 avril 2023

Les équations en nombres entiers ont de tout temps attiré l'attention des mathématiciens. Dans cet exposé, nous allons nous intéresser à la question de déterminer si une telle équation possède ou non une solution dans l'ensemble Z des nombres entiers (positifs ou négatifs), ou encore dans l'ensemble Q des nombres rationnels (lesquels sont obtenus en faisant le quotient de deux nombres entiers). Le cas qui nous concerne plus particulièrement est celui des équations dites du second degré.

Quand il s'agit d'une équation en une variable x, par exemple du type $ax^2 + bx + c = 0$, avec a,b,c entiers fixés, l'existence d'une solution x rationnelle dépend de la quantité (bien connue des lycéens) $b^2 - 4ac$, appelée discriminant de l'équation : une telle solution existe si et seulement si ce discriminant est un carré parfait, c'est-à-dire le carré d'un nombre entier. On rencontre déjà des études détaillées de ces équations sur la fameuse tablette d'argile babylonienne BM13901 (XVIIIème siècle avant J.C.). La situation est assez similaire pour une équation en deux variables x, y du type $ax^2 + by^2 = 0$: elle a une solution entière non triviale (i.e. autre que $x = y = 0$) si et seulement si la quantité ab est un carré parfait. Le problème se complique considérablement si l'on pose la même question de trouver un critère d'existence d'une solution entière (ou encore d'une solution rationnelle) non triviale pour une équation en trois variables x, y, z : $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, où a, b, c sont des entiers non nuls fixés. La solution a été trouvée au XVIIIème siècle par le mathématicien français Adrien-Marie Legendre.

Elle repose sur plusieurs concepts qui sont encore d'actualité aujourd'hui, et qu'on présentera au cours de l'exposé : les congruences modulo un nombre entier, la notion de résidu quadratique, qui est étroitement lié à une fonction $Z \times Z \longrightarrow \{0, 1, -1\}$ appelée symbole de Legendre, et bien sûr les nombres premiers, toujours omniprésents en arithmétique. Ce théorème de Legendre est exposé dans son traité Théorie des Nombres, publié en 1830, qui fourmille de résultats profonds.

Ces travaux de Legendre peuvent être considérés comme pionniers. Au début du vingtième siècle, un analogue de son théorème a été démontré par Minkowski (et généralisé ensuite par Hasse) pour des équations de degré deux en un nombre quelconque de variables. En revanche, pour des équations de degré au moins 3, on sait depuis les années soixante que les conditions «à la Legendre» de résolubilité des équations ne sont pas suffisantes : il existe en effet des obstructions beaucoup plus sophistiquées, dites cohomologiques, à l'existence d'une solution entière ou rationnelle. L'étude de ces obstructions fait encore de nos jours l'objet de recherches très actives.

THÉORÈME.

(27) « Étant proposée l'équation $ax^2 + by^2 = cz^2$, dans laquelle « les coefficients a, b, c, pris individuellement, ou deux à deux, « n'ont ni diviseur carré, ni diviseur commun ; je dis que cette « équation sera résoluble, si on peut trouver trois entiers λ, μ, ν

« tels que les trois quantités

$$\frac{a\lambda^2+b}{c},\quad \frac{c\mu^2-b}{a},\quad \frac{c\nu^2-a}{b}$$

« soient des entiers : elle sera au contraire insoluble, si ces trois « conditions ne peuvent être remplies à-la-fois. »

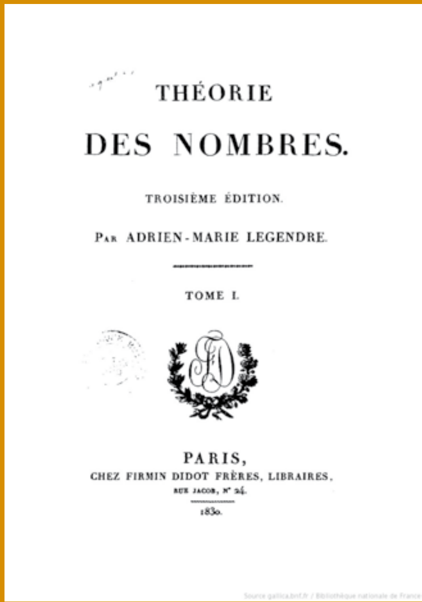
Le fameux théorème sur les équations du second degré en trois variables

Autour du texte :
Legendre «Théorie des nombres», 1830.

David Harari, après des classes préparatoires à Paris, il est rentré à l'École normale supérieure en 1988. David Harari a passé l'agrégation en 1990 et a soutenu sa thèse à Orsay en 1993 sous la direction de J.L. Colliot-Thélène. Il a ensuite été chargé de recherche au C.N.R.S. à Strasbourg (1996-2000) puis à Paris (2000-2005). Depuis 2005, il est professeur au laboratoire de mathématiques d'Orsay (qui fait maintenant partie de l'université Paris-Saclay) et a été membre junior de l'I.U.F. de 2009 à 2014.

Il travaille en géométrie algébrique et arithmétique, plus précisément sur les points rationnels et les espaces homogènes de groupes algébriques. David Harari a encadré une petite dizaine de doctorants au cours de sa carrière, et a enseigné à tous les niveaux à l'université. Enfin, son grand hobby est le bridge qu'il pratique depuis 40 ans, et fait partie des instances de la fédération française de ce jeu.

Tablette BM 13901,
British museum



THÉORIE

DES NOMBRES.

TROISIÈME ÉDITION.

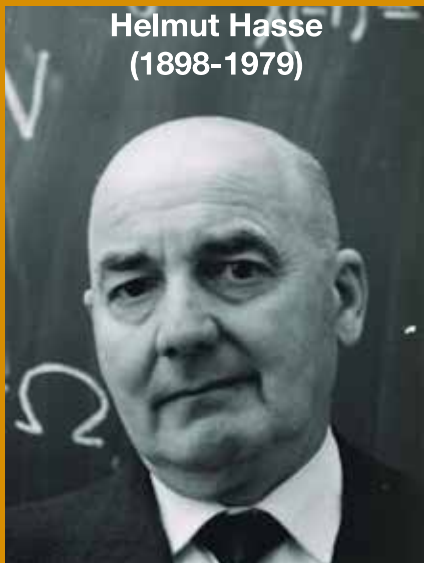
PAR ADRIEN-MARIE LEGENDRE.

TOME I.

PARIS,
CHEZ FIRMIN DIDOT FRÈRES, LIBRAIRES,
RUE JACOB, N° 24.
1830.

Le monumental
livre de théorie des
nombres de Legendre

Adrien-Marie Legendre
(1752-1833)
par François Séraphin Delpech



Helmut Hasse
(1898-1979)

Bibliographie sélective

Œuvres

Legendre, Adrien-Marie (1752-1833)
Théorie des nombres, 3e édition, Paris, Firmin-Didot, 1830.

Legendre, Adrien-Marie (1752-1833)
Éléments de géométrie avec des notes, Paris, Firmin-Didot, 1794.

Legendre, Adrien-Marie (1752-1833)
Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, Paris, Fernand Didot, 1805, 80 p.

Legendre, Adrien-Marie (1752-1833)
Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes, Paris, Huzard-Courcier, 1825-1828.

Legendre, Adrien-Marie (1752-1833)
Mémoire sur les opérations trigonométriques, dont les résultats dépendent de la figure de la terre, s. d. 32 p.

Sur les œuvres

Andrews, George Eyre , Gawronski, Wolfgang, Littlejohn, Lance
« The Legendre-Stirling numbers », Discrete mathematics, 311(14), p. 1255-1272, Kidlington, Elsevier, 2011.

Weil, André
Number Theory: An approach through history from Hammurapi to Legendre, Springer eBooks, Boston, MA, Birkhäuser, 2001, 377 p.

Sur le web

Conférence de Cyril Demarche dans la série « Une question, un chercheur », organisée par la Société Mathématique de France : « sommes de carrés, arithmétique ou géométrie ? »
https://www.youtube.com/watch?v=bze84w5nQxQ

Pour aller plus loin

Legendre, Adrien-Marie (1752-1833) , Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804-1851)
Korrespondenz Adrien-Marie Legendre - Carl Gustav Jacob Jacobi, *Correspondance mathématique entre Legendre et Jacobi* : mit dem Essay « C.G.J. Jacobi in Berlin », herausgegeben von Herbert Pieper, Stuttgart, Teubner, 1998, 245 p.

Serre, Jean-Pierre
Cours d'arithmétique, 3e édition, Paris, Presses universitaires de France, 1988, 188 p.

Weintraub, Steven
« On Legendre's Work on the Law of Quadratic Reciprocity », American Mathematical Monthly, Mars 2011, Vol. 118, Issue 3, p. 210-216.

un texte,
un mathématicien

L'école mathématique française brille de tous ses feux.

Dans ce cycle de conférences, certains des meilleurs mathématiciens présentent un aspect de leurs travaux.

Le conférencier choisit un texte mathématique classique qui l'a particulièrement influencé. À partir de ce texte, de son auteur et de son histoire, il montre comment des problématiques anciennes débouchent sur des recherches actuelles.

Quatre mercredis dans l'année à 18h30. Ce cycle est organisé par un comité animé par Marie-Claude Arnaud (Université de Paris).

Comité scientifique :

Martin Andler
Marie-Claude Arnaud
Julie Delon
Cyril Demarche
Pierre-Antoine Guihéneuf
Patrick Massot
Gilles Pagès
Pierre-Alain Sallard

Grand auditorium
Bibliothèque nationale de France
Site François-Mitterrand, 75013 Paris