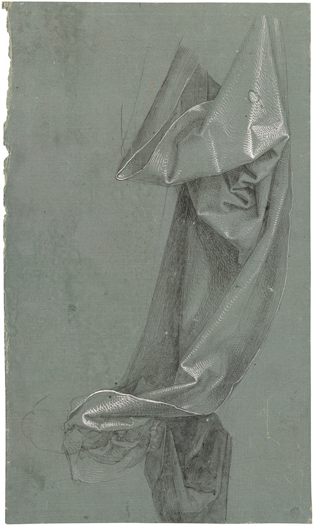
René Thom
et le dynamisme des formes instables

Patrick Popescu-Pampu

Professeur de Mathématique
Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille

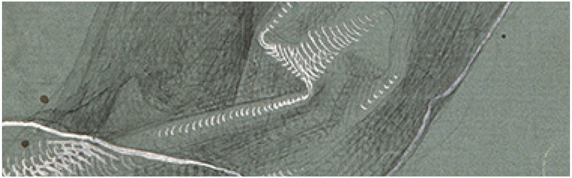
Cycle "Un texte, un mathématicien"
Bibliothèque Nationale de France, Paris, Mercredi 17 Mars 2021

Une étude de draperie par Dürer (1508)

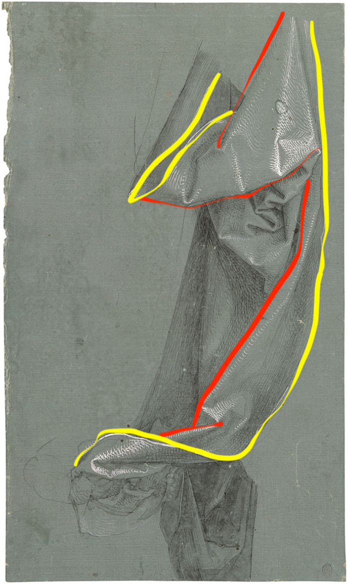


Wikimedia Commons. Provenance : Musée des Beaux-Arts de Lyon.

Un détail



Quelques lignes de plis et quelques lignes de bord

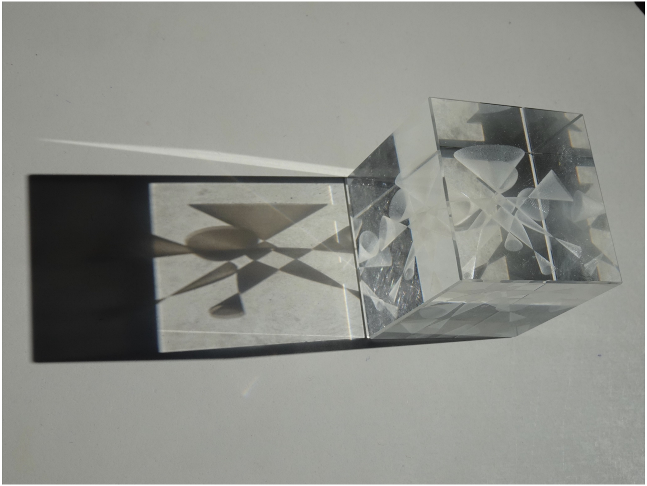


Savez-vous **multiplier** ?

De grandes baigneuses de Cézanne (1906)

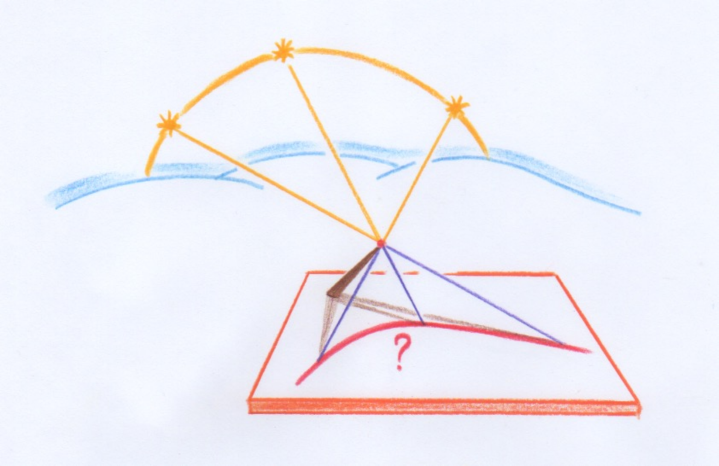
Wikimedia Commons. Provenance : Philadelphia Museum of Art.

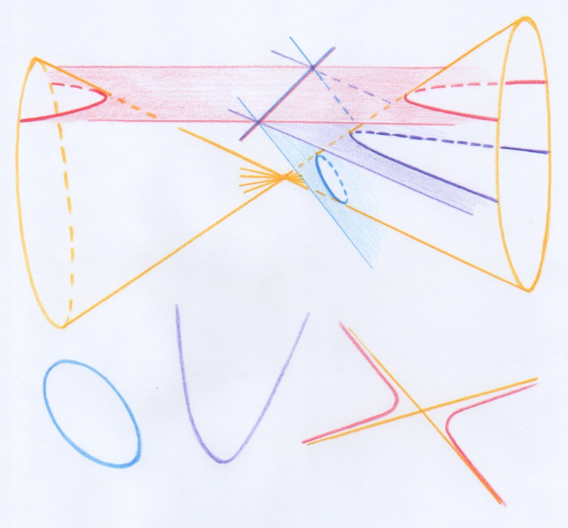
De quoi est-ce une ombre ?



Quintique de Togliatti gravée au laser par Oliver Labs.

Que trace l'ombre du bout du bâton ?





Ellipses, paraboles, hyperboles et leurs asymptotes.

Une équation cartésienne

322 LA GEOMETRIE.

tipliant la ſeconde par la troiſieſme on produit $\frac{ab}{c}y$ -- ab, qui eſt eſgale à $xy + \frac{b}{c}yy$ -- by qui ſe produit en multipliant la premiere par la derniere. & ainſi l'equation qu'il falloit trouuer eſt.

$$yy \infty cy -- \frac{cx}{b}y + ay -- ac.$$

de laquelle on connoiſt que la ligne E C eſt du premier genre, comme en effect elle n'eſt autre qu'vne Hyperbole.

René Descartes, *Géométrie*, 1637.

Par exemple, si a = b = c =1 :

$$y^2 = y - xy + y - 1,$$

ce qui revient à dire que :

$$y^2 + (x-2)y + 1 = 0.$$

$$\mathbf{y}^2 + (x-2)\mathbf{y} + 1 = 0.$$

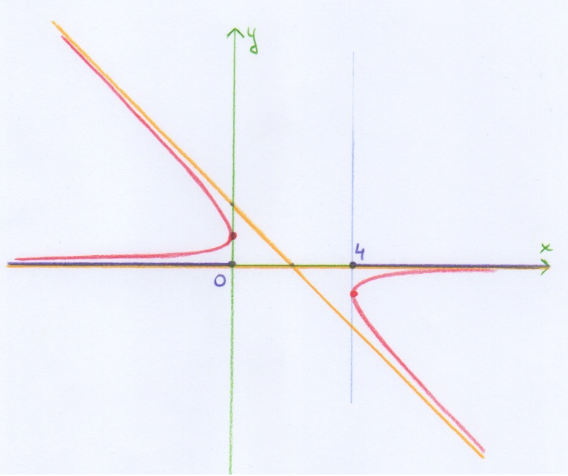
Projetons sur l'axe des x **dans la direction de l'axe des y**.

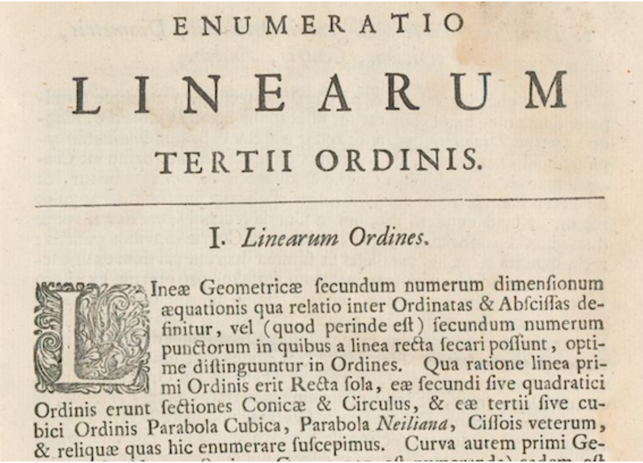
Quelle est **l'image de notre courbe** par cette projection ?
C'est l'ensemble des x pour lesquels l'équation d'inconnue y admet des solutions réelles.

$$\boldsymbol{\Delta} = (x-2)^2 - 4 = x^2 - 4x = \mathbf{x(x-4)}.$$

Donc $\Delta \geq 0$ si et seulement si $x \in \ ]-\infty, \mathbf{0}] \cup [\mathbf{4}, +\infty[$.

$$y^2 + (x-2)y + 1 = 0.$$
$$\Delta = x(x-4).$$




ENUMERATIO

LINEARUM

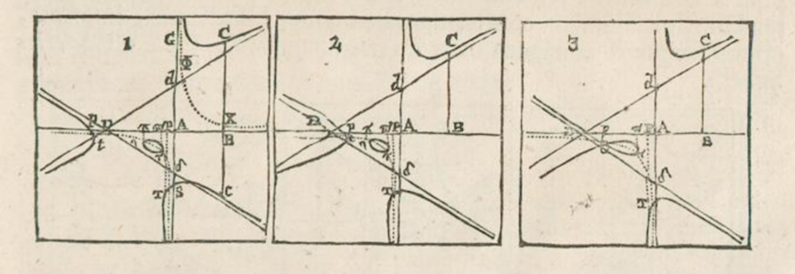
TERTII ORDINIS.

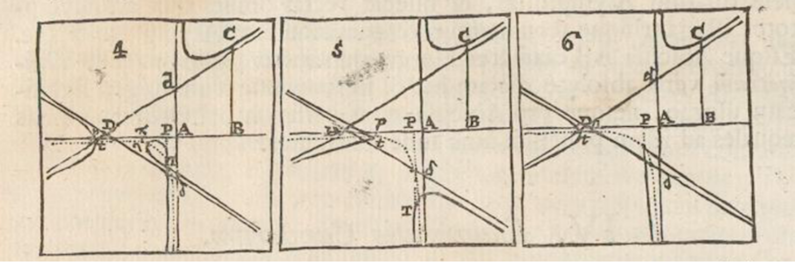
I. *Linearum Ordines.*

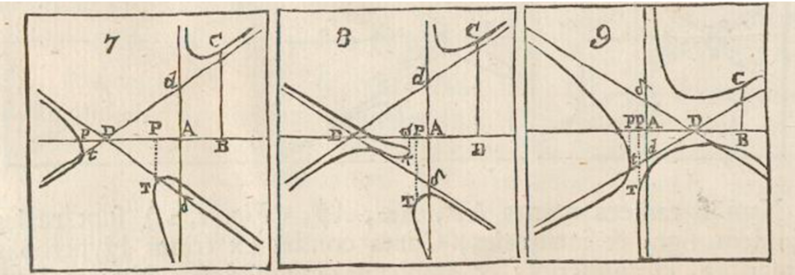
Lineæ Geometricæ ſecundum numerum dimenſionum æquationis qua relatio inter Ordinatas & Abſciſſas definitur, vel (quod perinde eſt) ſecundum numerum punctorum in quibus a linea recta ſecari poſſunt, optime diſtinguuntur in Ordines. Qua ratione linea primi Ordinis erit Recta ſola, eæ ſecundi ſive quadratici Ordinis erunt ſectiones Conicæ & Circulus, & eæ tertii ſive cubici Ordinis Parabola Cubica, Parabola *Neiliana*, Ciſſois veterum, & reliquæ quas hic enumerare ſuſcepimus. Curva autem primi Ge-

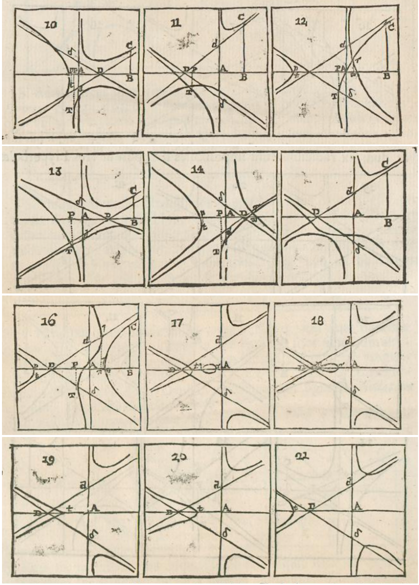
« [...] la **parabole cubique**, la **parabole neiléenne**, la **cissoïde** des anciens et les restantes que nous énumérons ici. »

L'« *Enumeratio linearum tertii ordinis* » de Newton (suite)

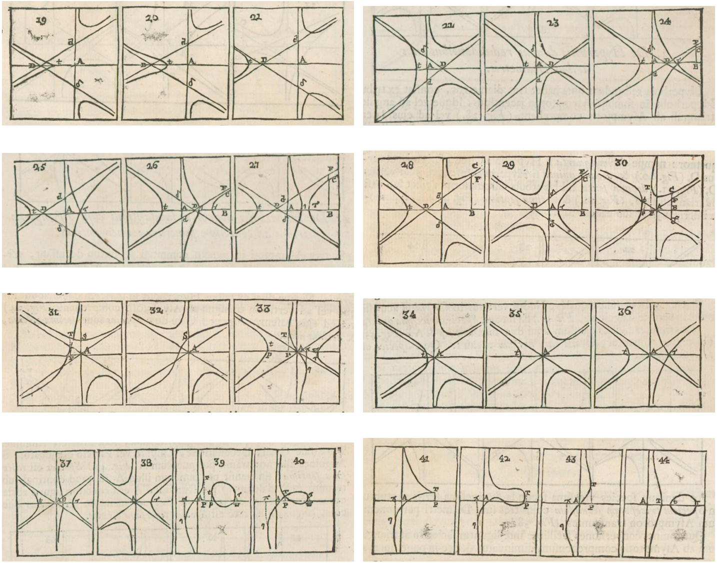



4
5
6

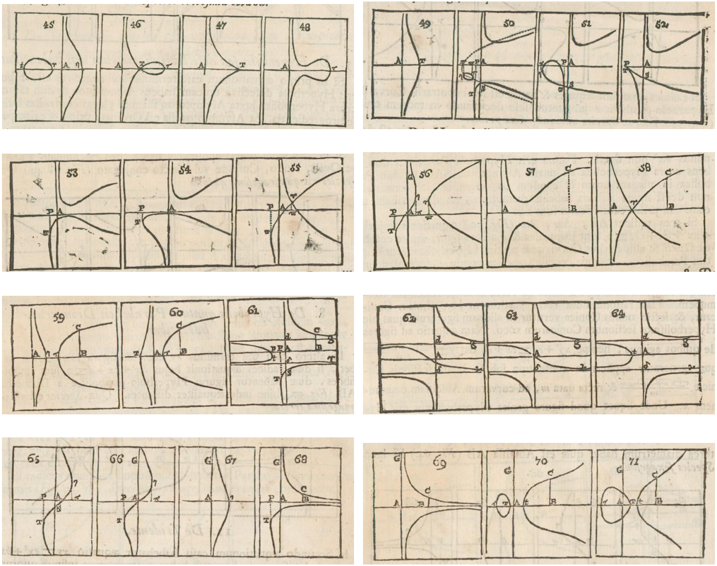

7
8
9

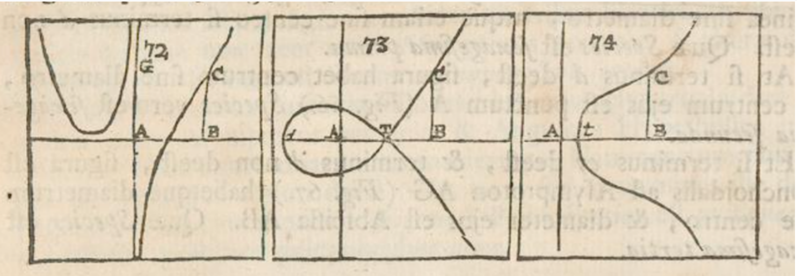

10
11
12
13
14
16
17
18
19
20
21

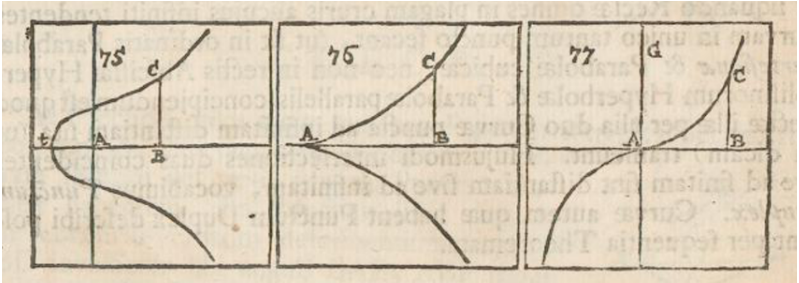
L'« *Enumeratio linearum tertii ordinis* » de Newton (suite)



L'« *Enumeratio linearum tertii ordinis* » de Newton (suite)




72
G
C
A
B
73
C
A
T
B
74
C
A
t
B


75
C
t
A
B
76
C
A
B
77
G
C
A
B

La naissance du terme “topologie” (1847)

Vorstudien zur Topologie.

Von

Johann Benedict Listing.

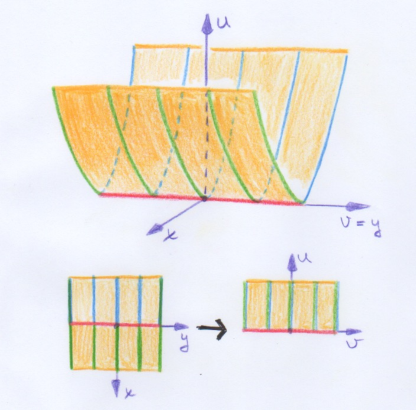
(Mit eingedruckten Holzschnitten.)

La première conférence internationale de topologie, Moscou (1935)

Wikimedia Commons. Provenance : ETH-Bibliothek Zürich, Bildarchiv

Un détail : Hassler Whitney à 28 ans

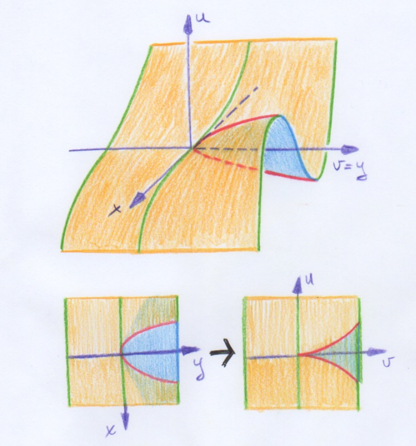
$$\begin{cases} u = x^2 \\ v = y \end{cases}$$



Hassler Whitney : *On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane.*

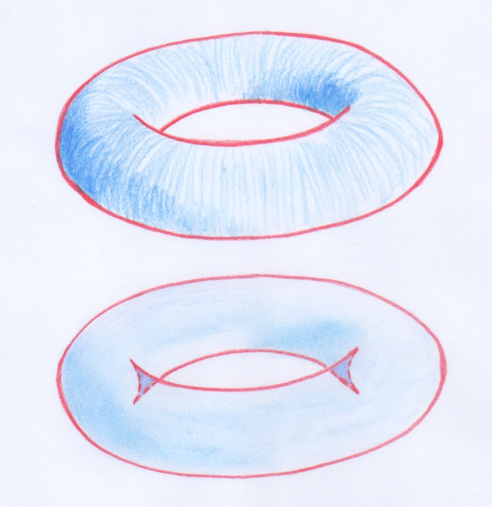
Annals of Mathematics 62 No. 3 (1955), 374–410.

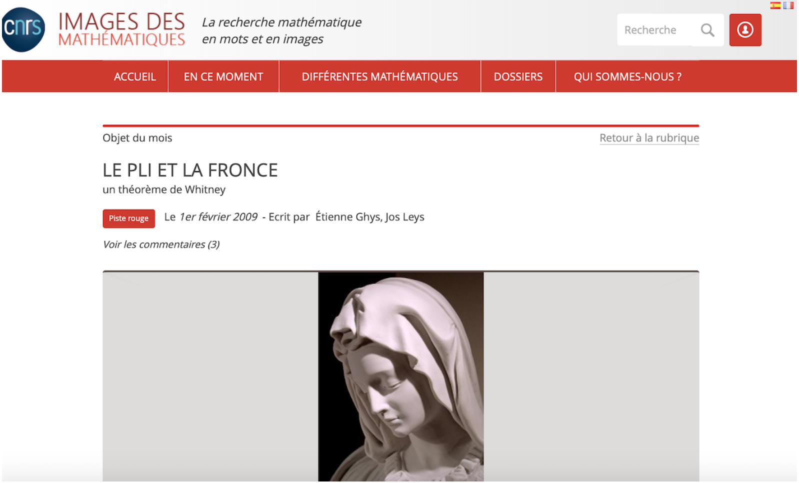
$$\begin{cases} u = xy - x^3 \\ v = y \end{cases}$$



Le **contour apparent à la source** est lisse, mais celui **au but** a un point de rebroussement.

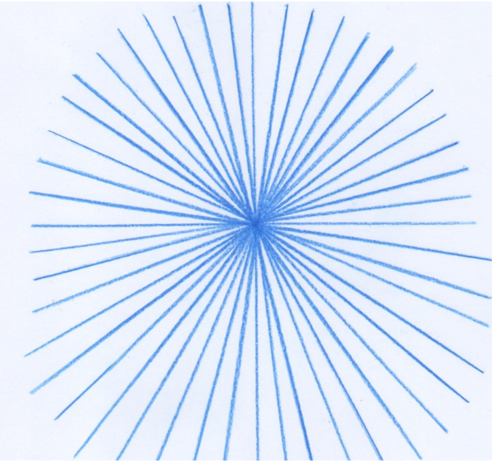
Opacité et transparence




IMAGES DES MATHÉMATIQUES
La recherche mathématique
en mots et en images
Recherche
ACCUEIL
EN CE MOMENT
DIFFÉRENTES MATHÉMATIQUES
DOSSIERS
QUI SOMMES-NOUS ?
Objet du mois
Retour à la rubrique
LE PLI ET LA FRONCE
un théorème de Whitney
Piste rouge
Le 1er février 2009 - Ecrit par Étienne Ghys, Jos Leys
Voir les commentaires (3)

Questions ...

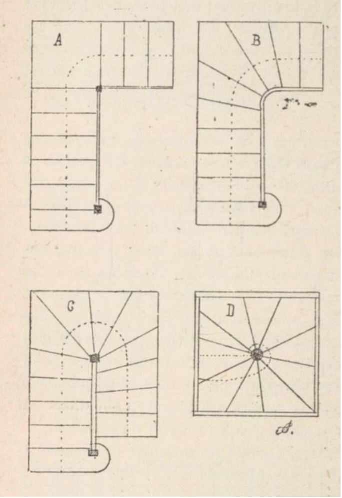
Les rayons cachent une surface



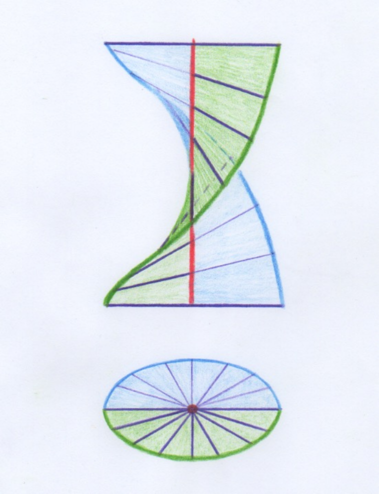
Vue latérale d'un escalier hélicoïdal

Vue du dessus d'un escalier hélicoïdal

Plusieurs sortes d'escaliers



Wikimedia Commons. Image du livre *Constructions rurales* de Jacques Danguy, 1913.



La droite du haut est la même que celle du bas !

Quelle surface obtient-on en les recollant ?

La bande de Möbius

IMAGES DES MATHÉMATIQUES
La recherche mathématique en mots et en images

Recherche

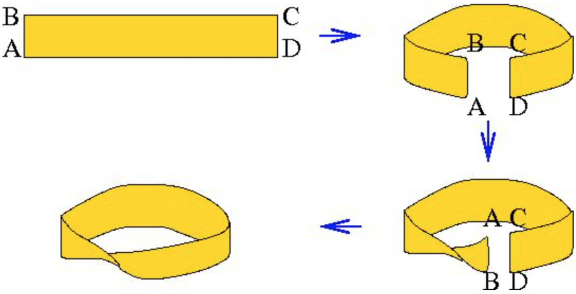
ACCUEIL | EN CE MOMENT | DIFFÉRENTES MATHÉMATIQUES | DOSSIERS | QUI SOMMES-NOUS ?

Objet du mois   Retour à la rubrique

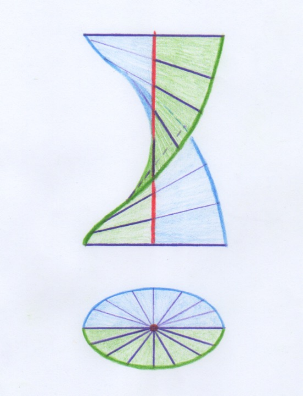
LA BANDE QUE « TOUT LE MONDE CONNAÎT »

Piste rouge   Le *4 juin 2010* - Ecrit par Patrick Popescu-Pampu

Voir les commentaires (2)

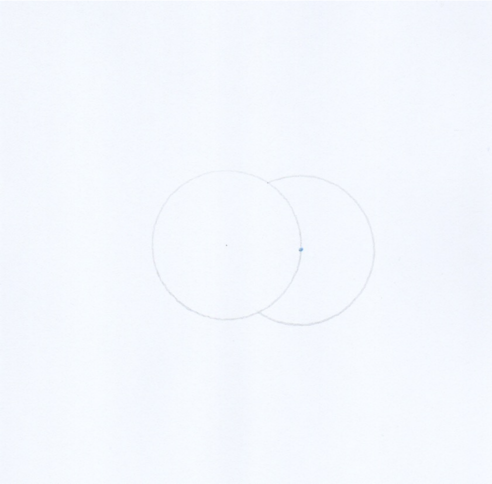


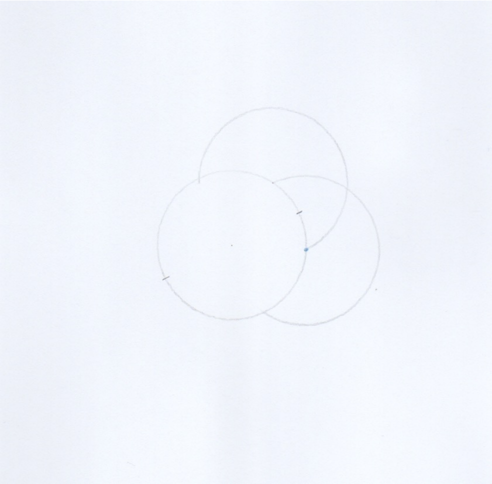
Revenons à l'application d'**éclatement** d'un point :

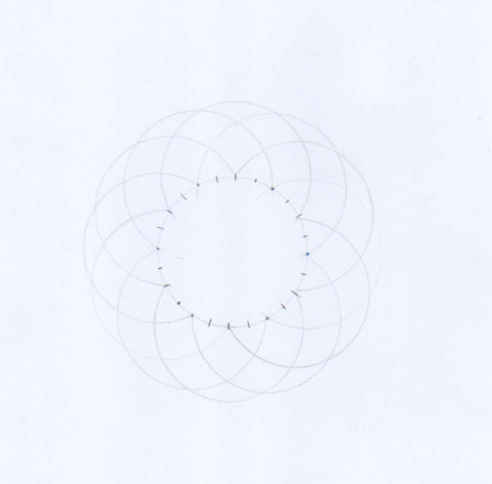


Whitney affirme que l'on peut déformer très peu cette application pour qu'il n'y ait plus que des plis et des fronces. Comment est-ce possible ?

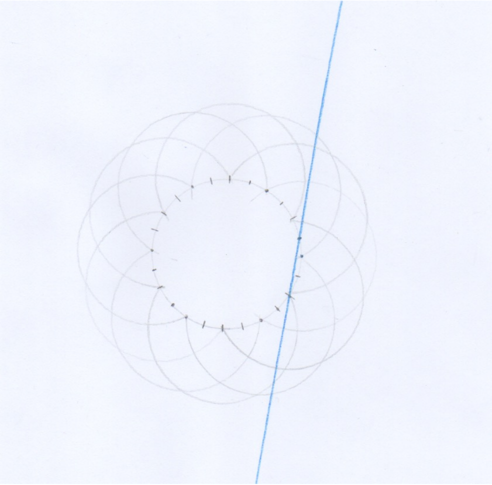
Dessin au compas à ouverture fixe

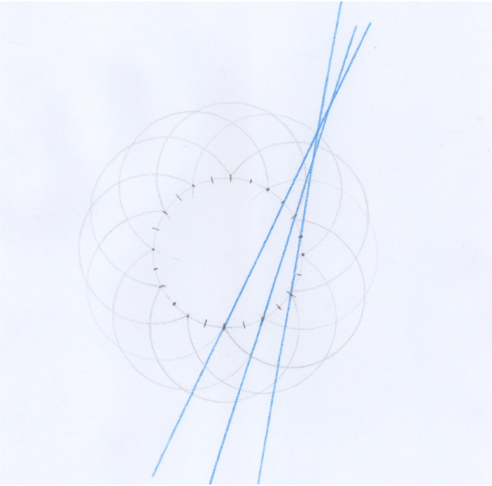




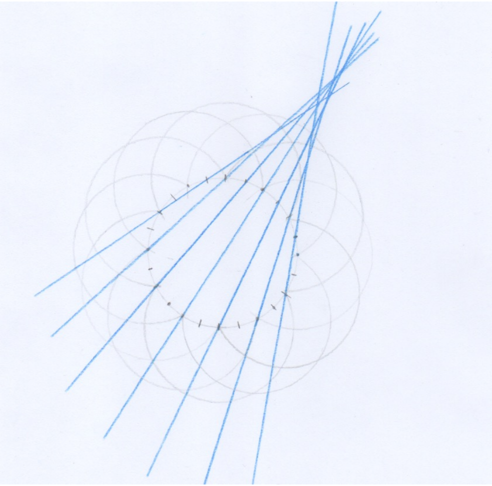


Vitesse double et sens contraire

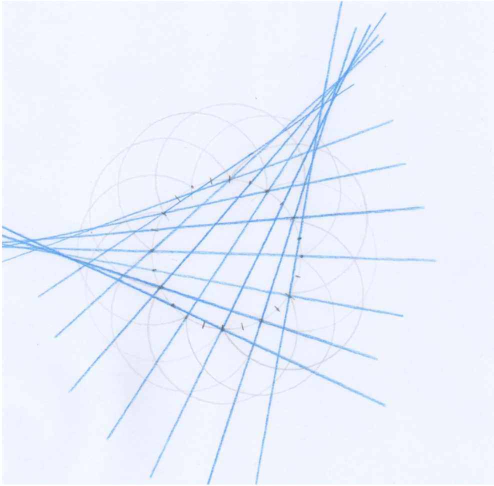




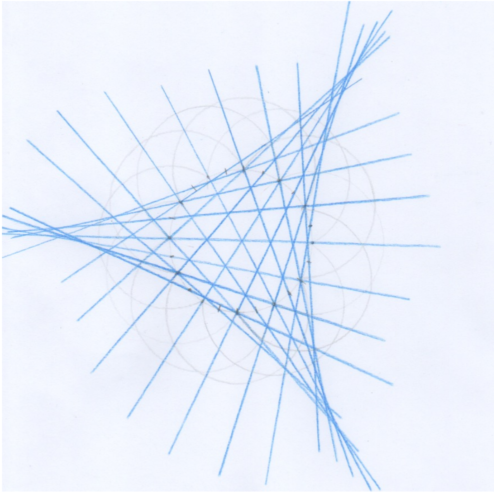
Vitesse double et sens contraire (suite)

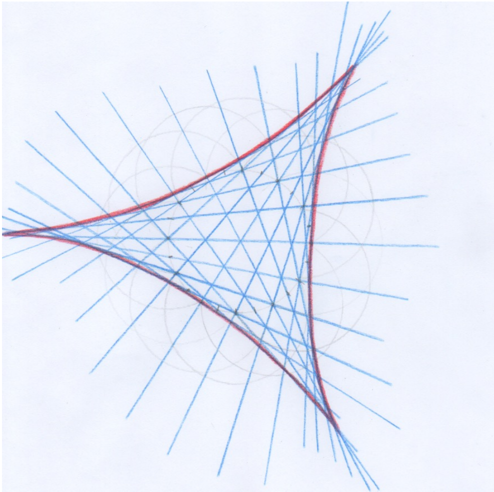


Vitesse double et sens contraire (suite)



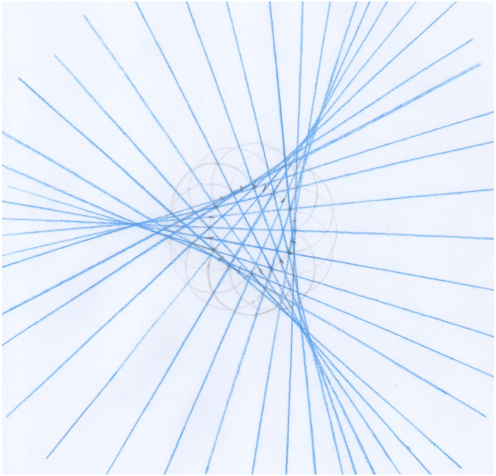
Vitesse double et sens contraire (suite)

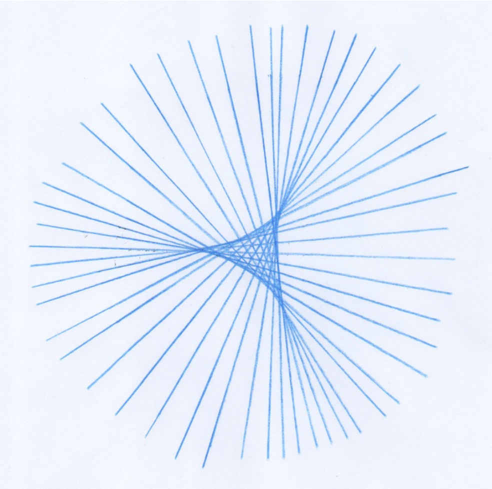




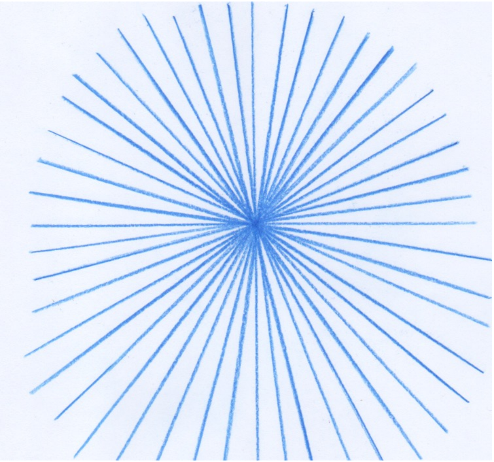
Le **contour apparent au but**.

Rétrécissement

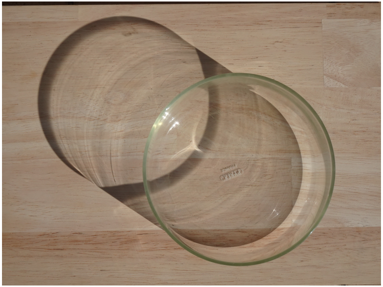




Et à la limite ...



Quand les droites sont des rayons de lumière



Questions ...

René Thom en 1949 et 1970

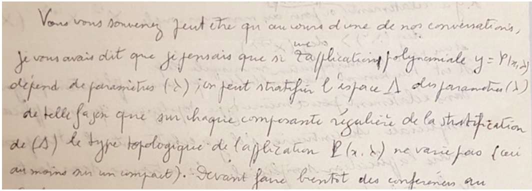
Wikimedia Commons. Provenance : Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach.

LA STABILITÉ TOPOLOGIQUE DES APPLICATIONS POLYNOMIALES[1]

par René Thom

Soient E, E' deux espaces euclidiens de dimension n, p respectivement, $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ deux systèmes de coordonnées pour E et E'. Une application F de E dans E' sera dite *polynomiale*, si elle s'exprime à l'aide d'équations de la forme: $y_j = P_j(x_i)$, $i \leqq n$, $j \leqq p$ où les P_j sont des polynômes en les variables x_i. L'espace E sera dit la *source*, E' le *but* de l'application F.

L'Enseignement Mathématique (2) 8 (1962), 24–3. Repris dans le Vol. II des *Œuvres mathématiques*, pp. 117–126.


Vous vous souvenez peut être qu'au cours d'une de nos conversations,
je vous avais dit que je pensais que si une application polynomiale $y = P(x,\lambda)$
dépend de paramètres (λ) ; on peut stratifier l'espace Λ des paramètres (λ)
de telle façon que sur chaque composante régulière de la stratification
de (Λ) le type topologique de l'application $P(x,\lambda)$ ne varie pas (ceci
au moins sur un compact). Devant faire bientôt des conférences au

"*[...]* **je pensais que si une application polynomiale dépend de paramètres, on peut stratifier l'espace des paramètres de telle façon que sur chaque composante régulière de la stratification le type topologique de l'application ne varie pas** *[...]*."

$$\begin{gathered}\mathbf{a}\,x^3 + \mathbf{b}\,x^2y + \mathbf{c}\,xy^2 + \mathbf{d}\,y^3 \\ +\mathbf{e}\,x^2 + \mathbf{f}\,xy + \mathbf{g}\,y^2 \\ +\mathbf{h}\,x + \mathbf{i}\,y \\ +\mathbf{j} \\ = 0.\end{gathered}$$

*"Il m'est apparu – **à ma grande surprise** – qu'une application polynomiale dépendant de paramètres peut très bien ne pas avoir de stabilité topologique sur chacune des composantes de la stratification associée de l'espace des paramètres."*

Ceci définit entre applications de E dans E' une relation d’équivalence; on sait peu de choses sur l’ensemble des classes d’équivalence ainsi définies; le but essentiel de ce papier est de donner l’exemple d’une application polynomiale P de E dans E', dépendant algébriquement d’un paramètre k, dont le type topologique *varie continuement* avec le paramètre k; par là j’entends que deux applications correspondant à des valeurs différentes du paramètre t ne sont pas de même type topologique.

$$\begin{cases} U = [x\,(x^2+y^2-a^2) - 2a\,z\,y]^2 \cdot \\ \quad [(\mathbf{k}y+x)\,(x^2+y^2-a^2) - 2a\,z\,(y-\mathbf{k}x)]^2, \\ V = x^2+y^2-a^2, \\ W = z \end{cases}$$

On voit que l'image de l'application est contenue dans le demi-espace défini par :

$$U \geq 0.$$

Le bord de ce demi-espace est le plan d'équation :

$$U = 0.$$

La portion de l'image de l'application contenue dans ce bord fait partie du **contour apparent au but**.

$$\begin{cases} U = [x\,(x^2+y^2-a^2) - 2a\,z\,y]^2 \cdot \\ \quad [(ky+x)\,(x^2+y^2-a^2) - 2a\,z\,(y-kx)]^2, \\ V = x^2+y^2-a^2, \\ W = z \end{cases}$$

Regardons l'image réciproque de cette partie du contour apparent au but. Elle est définie par l'équation :

$$U(x,y,z) = 0.$$

C'est **une union de deux surfaces**, définies par les équations :

$$x\,(x^2+y^2-a^2) - 2a\,z\,y = 0,$$

$$(ky+x)\,(x^2+y^2-a^2) - 2a\,z\,(y-kx) = 0.$$

Elles forment une partie du **contour apparent à la source**.

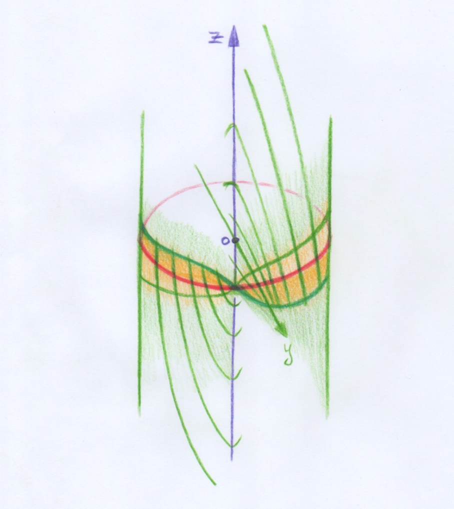
Pour $k \neq 0$, les deux surfaces s'intersectent le long du cercle d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0, \\ x^2 + y^2 - a^2 = 0 \end{array} \right. .$$

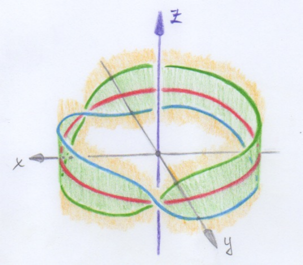
La seconde surface s'obtient **en faisant tourner la première surface autour de ce cercle, d'un angle qui dépend de k**.

Examinons d'abord la forme de la première surface.

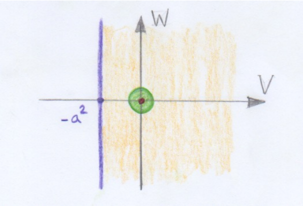
Concentrons-nous sur une bande centrale



$$x\,(x^2 + y^2 - a^2) = 2a\,y\,z.$$

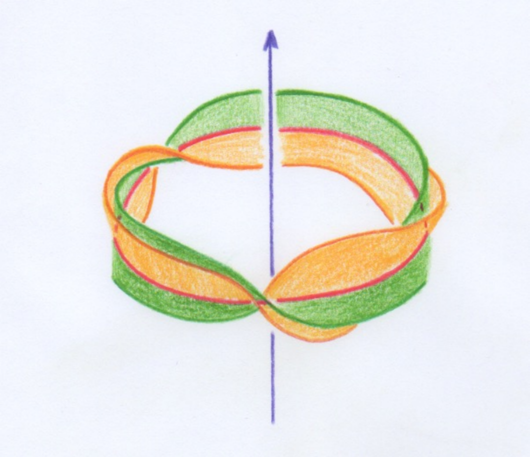


$$\begin{cases} V = x^2 + y^2 - a^2 \\ W = z \end{cases}$$

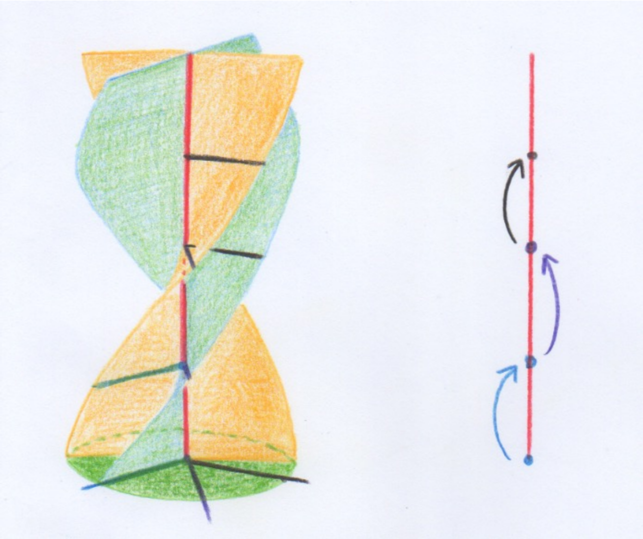


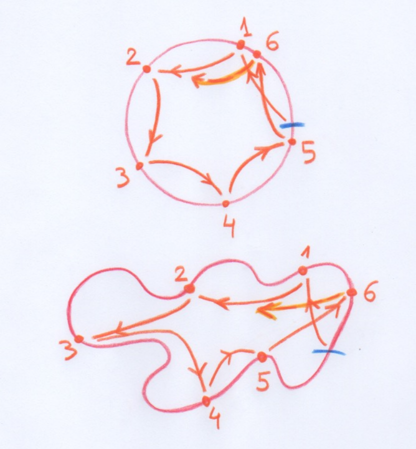
Questions ...

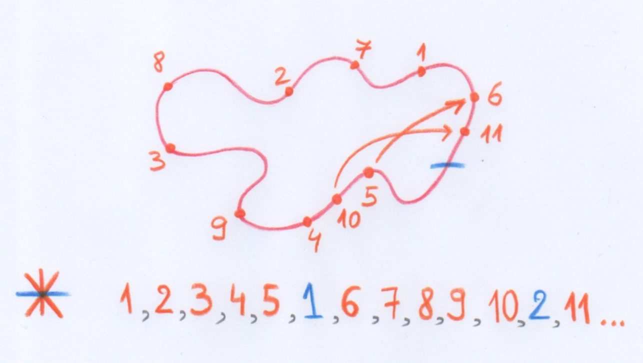
Regardons les deux bandes centrales simultanément



Un fragment de double bande centrale et son image

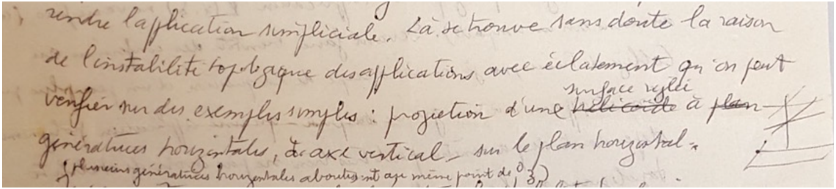



1
6
2
5
3
4
1
2
6
3
5
4

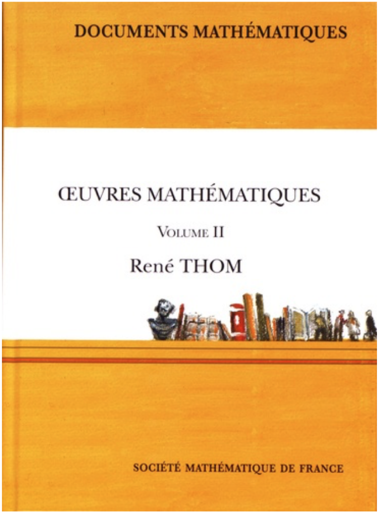


Cette suite bicolore a un sens topologique.
Elle permet de retrouver l'angle de rotation !

"[...] **l'instabilité topologique des applications avec éclatement** *[peut se vérifier] sur des exemples simples : projection d'une surface réglée à génératrices horizontales, d'axe vertical, sur le plan horizontal (***plusieurs génératrices horizontales aboutissant au même point de** *Oz).*"


entre l'application simpliciale. Là se trouve sans doute la raison
de l'instabilité topologique des applications avec éclatement qu'on peut
vérifier sur des exemples simples : projection d'une ~~hélicoïde~~ surface réglée à ~~plan~~
génératrices horizontales, d'axe vertical, sur le plan horizontal.
(plusieurs génératrices horizontales aboutissant au même point de Oz)

Questions ...




André Haefliger


Marc Chaperon


Alain Chenciner


Jean Lannes

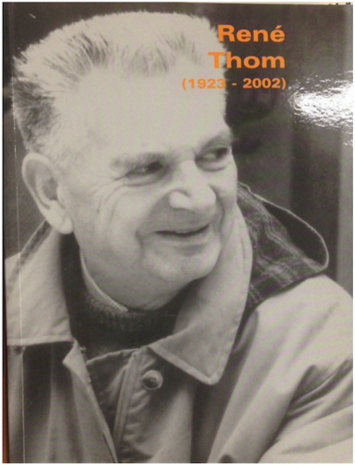

François Laudenbach

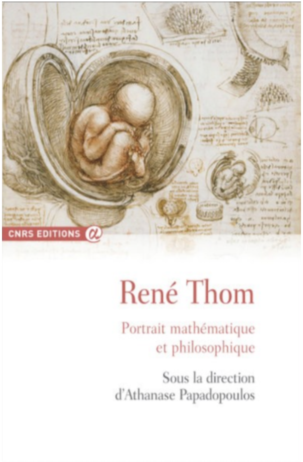

Jean Petitot


Bernard Teissier

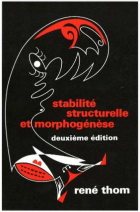

David Trotman

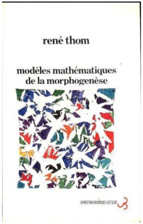

Pierre Vogel

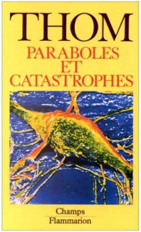

René
Thom
(1923 - 2002)

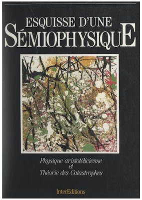

CNRS EDITIONS
René Thom
Portrait mathématique
et philosophique
Sous la direction
d'Athanase Papadopoulos

Les livres de René Thom









Le film *René Thom ou la théorie des catastrophes* (1992)

René Thom & Emile Noel la théorie des catastrophes

“Pensons au mythe platonicien de la caverne : comme les prisonniers dans la caverne, nous ne voyons que les reflets des choses et pour passer du reflet à la chose proprement dite, il faut augmenter la dimension de l’espace et avoir une source lumineuse qui dans le cas de Platon est le feu, le feu qui éclaire. *La théorie des catastrophes suppose justement que les choses que nous voyons sont seulement des reflets et que pour arriver à l’être lui-même il faut multiplier l’espace substrat par un espace auxiliaire et définir dans cet espace produit l’être le plus simple qui donne par projection son origine à la morphologie observée.”*

René Thom : *Paraboles et catastrophes*. Flammarion, 1983. Chap. 2.

Ne réduisons pas la science à un ensemble de recettes

"Je dis simplement que si l'on réduit la science à n'être qu'un ensemble de recettes qui marchent, on n'est pas intellectuellement dans une situation supérieure à celle du rat qui sait que lorsqu'il appuie sur un levier, la nourriture va tomber dans son écuelle. La théorie pragmatiste de la science nous ramène à la situation du rat dans sa cage."

René Thom : *Prédire n'est pas expliquer*. Entretiens avec Émile Noël. Flammarion, 1993. Chap. 3.