MATHÉMATIQUES

Les développements asymptotiques après Poincaré : continuité et... divergences

Jean-Pierre Ramis[1]

1. Introduction

Cet article est la suite de *Poincaré et les développements asymptotiques (Première partie)*, paru dans le précédent numéro de la *Gazette*. Dans cette seconde partie, je vais décrire l'évolution des recherches sur les développements asymptotiques à partir de la toute fin du XIX^{e} siècle jusqu'à aujourd'hui. Il s'est passé (et se passe encore) beaucoup de choses et le sujet connaît actuellement un développement assez « explosif », je me suis donc limité à essayer de dégager les lignes de force et je serai nécessairement assez bref sur chaque sujet, en marquant les jalons essentiels et en donnant quelques repères bibliographiques. On me pardonnera de n'avoir pas pu (ou su...) parler de tout[2]. Mon propos étant essentiellement historique j'ai évité au maximum les détails techniques, le lecteur intéressé se reportera aux articles originaux.

Je terminerai l'article par un point, selon moi, essentiel : l'utilisation des développements asymptotiques *divergents* pour modéliser les discontinuités et la réduction des théories en physique, dans la ligne du travail de Stokes sur les caustiques[3]. Je suis entré en contact avec cet aspect du sujet en 1980 par un heureux hasard comme je le raconterai plus loin (*cf.* 10.2).

2. Séries divergentes.

Les travaux de Poincaré et Stieltjes ont remis à l'honneur les séries divergentes, quasiment proscrites chez les mathématiciens après Cauchy et Weierstrass. Ainsi, à la toute fin du XIX^{e} siècle, en 1898, l'Académie des Sciences de Paris proposait pour le *Grand Prix des sciences mathématiques* le thème : *« Chercher à étendre le rôle que peuvent jouer en analyse les séries divergentes »*. Le prix fut obtenu par Émile Borel pour un mémoire contenant, entre autres, ce que l'on appelle aujourd'hui la *sommation de Borel* [14]. Un peu plus tard Borel publia une présentation

[1] Institut de France (Académie des Sciences) et Institut de Mathématiques, CNRS UMR 5219, équipe Émile Picard, U.F.R. M.I.G., université Paul Sabatier (Toulouse 3), 31062 Toulouse Cedex 9.

[2] Comme par exemple des récentes versions *discrètes* des développements asymptotiques et des q-analogues [68]

[3] Cf. la première partie de cet article.

des connaissances de l'époque sur les séries divergentes [15]. Le point de vue de Borel est assez différent de celui de Poincaré (il est plutôt dans la continuité des travaux de Stieltjes sur les fractions continues), il renoue avec Euler : certaines séries divergentes ont une « somme » et dans le cas des séries formelles celle-ci correspond à un développement asymptotique *exact* (cf. 5 ci-dessous).

En 1949 paraît le traité posthume de G. H. Hardy *Divergent Series* [43], édité par L. S. Bosanquet et préfacé par J. E. Littlewood. C'est *la* somme sur le sujet, tout au moins en ce qui concerne les mathématiques pures et les aspects historiques[4] et l'exposé est d'une précision parfaite. Par contre, Hardy se désintéresse totalement de toute application en dehors des mathématiques pures, on est aux antipodes de l'approche de Poincaré...

Voici un extrait de la préface de [43] :

« All his books gave him some degree of pleasure, but this one, his last, was his favourite. ... The title hold curious echoes of the past and of Hardy's past. Abel wrote in 1828 [5] 'Divergent series are the invention of the devil, and it is shameful to base on them any demonstration whatsoever'. *In the ensuing period of critical revision they were simply rejected. Then came a time when it was found that something after all could be done about them. This is now a matter of course, but in the early years of the century the subject, while in no way mystical and unrigorous,* was *regarded as sensational, and about the present title, now colourless, there hung an aroma of paradox and audacity. »* .

3. Le théorème fondamental des développements asymptotiques

Voici d'abord une citation extraite de [37], donnant la description du *théorème fondamental des développements asymptotiques* par un physicien[6].

The present talk will be solely concerned with the formal expansions used in the analysis of asymptotic phenomena. The idea of giving validity to these formal series is classical : essentially it goes back to Poincaré. Poincaré advanced this idea in his work on ordinary differential equations in 1886*. Before that time many formal series solutions of such equations had been developed and it was found that they did not converge in general. Poincaré proved that these formal series solutions represent* asymptotic expansions of actual solutions. *Thus it became clear in which way formal series solutions may be regarded as "valid".*

Je reviens donc sur la question posée par Poincaré dans son article fondateur sur les développements asymptotiques [64] : *étant donnée une solution série formelle d'une équation différentielle ordinaire algébrique (dans le champ complexe), est-elle le développement asymptotique d'une vraie solution ?*

Nous avons vu que Poincaré répondait positivement dans le cas des équations *linéaires* « générique », en exprimant un doute pour le cas général (où les solutions formelles sont ramifiées[7]). En fait son résultat est toujours vrai (et même pour des équations linéaires à coefficients analytiques), mais la preuve est assez délicate

[4] Avec en particulier une interprétation remarquable de la pensée d'Euler.

[5] Dans une lettre à Holmboe datée du 16 janvier 1826 et non 1828 comme l'écrit Littlewood. Notons que l'on trouve un peu plus loin dans la même lettre une réserve : « La plupart des choses sont exactes : cela est vrai ; et c'est extraordinairement surprenant. Je m'efforce d'en chercher la raison. »

[6] Je reviendrai ci-dessous, dans la partie 10, sur ce très intéressant article.

[7] On dit aussi aujourd'hui à pentes non entières en référence au polygone de Newton [66].

et a nécessité de longues années et les efforts de plusieurs mathématiciens[8], on la trouvera dans le livre de Wasow [79]. (Elle a été longtemps ignorée en dehors d'un étroit cercle de spécialistes...) Plus généralement, on peut poser la question pour des équations *non-linéaires* analytiques. La réponse est encore positive, c'est *le théorème fondamental des développements asymptotiques* sous sa forme définitive. Des réponses partielles ont été données par plusieurs auteurs (Horn (1899), Birkhoff, Malmquist (1940), Hukuhara, Iwano...) et la preuve complète, dans le cas le plus général, se trouve dans [70], un peu plus d'un siècle après l'article [64] de Poincaré. On peut en fait dire (beaucoup...) plus, comme on le verra dans les deux paragraphes suivants.

Il est je crois intéressant de signaler qu'après Poincaré le regard des mathématiciens sur les développements asymptotiques a changé au cours du temps et que le regain d'intérêt pour le sujet est assez récent. Quand j'ai commencé à travailler sur ce thème, à la toute fin des années 70, le sujet de l'article fondateur de Poincaré [64], c'est-à-dire le *théorème fondamental des développements asymptotiques* pour les EDO linéaires était bien oublié. L'article [70], qui règle définitivement une difficile et importante conjecture vieille de cent ans, a été plusieurs fois refusé pour publication[9]. Heureusement certains étaient plus lucides, comme le montre cet extrait d'une lettre de P. Deligne à B. Malgrange, en août 1977 [32] (page 21) : *« Le théorème fondamental des développements asymptotiques est extraordinaire »*.[10]

4. Développements asymptotiques Gevrey

On a constaté très vite que la définition des développements asymptotiques par Poincaré est *trop générale* : deux fonctions ayant le même développement diffèrent par une fonction infiniment plate à l'origine (ou l'infini...) et il y a « trop » de telles fonctions. Au début du XX^e siècle le mathématicien anglais George Watson a proposé de remédier à ce défaut en introduisant une nouvelle notion de développement asymptotique. Ignorant les travaux de Watson, j'ai retrouvé bien plus tard cette notion et ai appelé *« développements asymptotiques Gevrey »* [11] les développements correspondants. Les travaux de Watson (jeune mathématicien à l'époque) semblent avoir étés fort mal reçus et, sans doute découragé, il a rapidement abandonné cette voie. Une très forte opposition aux idées de Watson s'est maintenue jusque dans les années 70, on la trouve dans certains des meilleurs livres sur les développements asymptotiques (cf. [66], pages 31–32). Frank W. J. Olver, par exemple, écrit [61] : *« The theory is then largely unnecessary »* . En retrouvant les idées de Watson, j'ai connu un accueil assez similaire[12], mais j'avais montré que le domaine d'application des développements asymptotiques Gevrey était très large[13] (il n'a fait que s'élargir par la suite, bien au-delà de ce que je pouvais croire, avec aujourd'hui plusieurs centaines de papiers...). Par ailleurs, j'ai eu la chance de

[8] J. Horn, G. D. Birkhoff...
[9] Au prétexte qu'il s'agissait d'une question très technique et très marginale...
[10] Il s'agit ici du cas linéaire.
[11] En hommage aux travaux de Maurice Gevrey sur les EDP paraboliques, postérieurs aux articles de Watson...
[12] Je le raconte dans [32], page 10.
[13] Ce qui disqualifiait une partie des critiques faites à Watson : on lui reprochait l'extrême étroitesse – supposée à tort par ses détracteurs – du champ d'application de sa théorie.

convaincre rapidement Bernard Malgrange et Yasutaka Sibuya et je suis têtu, ainsi je n'ai pas abandonné...

Les motivations « expérimentales » de l'introduction de la notion de développement asymptotique Gevrey sont les suivantes (cf. [66], 2.1, page 28).

a) On constate que « presque toutes » [14] les séries formelles *divergentes*

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$

que l'on rencontre dans les *applications* vérifient des estimations, dites Gevrey :

$$|a_n| < CA^n(n!)^s$$

(pour $C,\ A > 0, s = \frac{1}{k} > 0$ convenables).

b) On constate très souvent que si deux fonctions différentes solutions d'un même problème « concret » ont le même développement asymptotique, alors elles diffèrent d'une fonction (au plus) à décroissance exponentielle d'un certain ordre $k > 0$.

c) On constate très souvent que si la fonction f, solution d'un problème « concret », admet la série formelle $\hat{f} = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ comme développement asymptotique, $\hat{f}$ satisfaisant la condition a), alors il existe $b > 0$ tel que, pour tout x, la somme finie $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ (où N est la partie entière de b/x^k) donne une « excellente approximation » de $f(x)$[15].

On peut montrer que les conditions a), b), c) convenablement reformulées sont équivalentes [69].

Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 4.1. *Soient V un secteur ouvert de sommet* 0 *du plan complexe, f une fonction holomorphe sur V et $\hat{f} := \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. On dit que f est* asymptotique Gevrey *d'ordre $s = 1/k$ à $\hat{f}$ (ou que $\hat{f}$ est le développement asymptotique Gevrey d'ordre $s = 1/k$ de f) sur V si, pour tout sous-secteur strict $W \subset V$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $C_W > 0$ et $A_W > 0$ tels que :*

$$\forall\, z \in W, \quad |z|^{-n}|f(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p| < C_W (n!)^s A_W^n.$$

Pour des secteurs « suffisamment petits » (i.e. d'ouverture $< s\pi$), les développements asymptotiques Gevrey d'ordre $s > 0$ ont essentiellement les mêmes propriétés que les développements classiques (les preuves étant différentes). En particulier on a pour les EDO analytiques des variantes Gevrey du théorème fondamental des développements asymptotiques [70, 75] (et donc une amélioration des résultats de Poincaré dans [64]). Mais l'avantage n'est pas seulement d'obtenir des résultats plus précis, il y a un phénomène nouveau et remarquable : sur les « grands secteurs » (i.e. d'ouverture $> s\pi$) la situation se rigidifie et donne naissance à une notion de sommabilité que j'ai appelée k-sommabilité ($k := 1/s$)

[14] Pas toutes... : les solutions formelles d'équations aux q-différences vérifient des estimations différentes dites q-Gevrey [66] 3.4, page 54, [68].

[15] C'est la quasi-sommation au plus petit terme

et à des développements asymptotiques *exacts* : si une série formelle $\hat{f}$ est le développement asymptotique Gevrey d'ordre $1/k$ d'une fonction f holomorphe sur un tel secteur, f est *unique*[16], c'est la k-somme de $\hat{f}$. Ceci avait déjà été remarqué par Watson (avec ce que l'on appelle maintenant *le lemme de Watson*). Pour les solutions formelles d'un système différentiel « générique », l'ordre $1/k$ est lié à ce que l'on appelle le *rang de Poincaré* de ce système, c'est-à-dire l'entier k minimal tel qu'il puisse s'écrire $x^{k+1}dY/dx = \Phi(x, Y)$, avec Φ holomorphe.

Pour des détails et une bibliographie (qu'il faudrait compléter par la grande quantité d'articles parus depuis sur le sujet, en particulier dans le domaine des EDP), je renvoie le lecteur à [66]. Pour les preuves on pourra consulter [7] et les appendices de [75].

5. Resommation et résurgence

5.1. k-sommabilité et multisommabilité

Pour $s = k = 1$, on montre que la rigidification de la notion de développement asymptotique Gevrey 1 sur les secteurs d'ouverture strictement plus grande que π, c'est-à-dire la 1-sommabilité est essentiellement équivalente à la sommabilité de Borel [14, 15], ce qui fournit une formule intégrale pour la somme. Plus généralement la k-sommabilité est essentiellement équivalente à la généralisation de la sommation de Borel introduite par Leroy et étudiée par R. Nevanlinna [66, 75, 7] et l'on a encore des formules intégrales pour la somme.

Génériquement, les solutions séries formelles d'EDO analytiques sont k-sommables [66, 75] (ce qui généralise les résultats de Poincaré [64]), mais pas toujours[17], ce qui a motivé l'introduction de la notion de multisommabilité par Martinet et Ramis[18] [54]. On a pu alors montrer que *toutes* les solutions séries formelles de *toutes* les EDO analytiques sont multisommables (cf. [66], [7], pour plus de détails et des références). On a ainsi une théorie des *développements asymptotiques exacts* (la multisomme d'une série solution est une vraie solution), ceci précise et étend au cadre le plus général les résultats de Poincaré dans [64] et unifie les approches d'Euler, Stokes, Poincaré et Stieltjes.

5.2. Résurgence

Dans de nombreux cas *suffisamment génériques*[19] (séries formelles solutions d'EDO ou apparaissant dans des réductions à forme normale ou certains problèmes de perturbations singulières [33, 31, 47, 52, 39, 72, 73]...) les séries formelles ont une propriété bien plus précise que la 1-sommabilité, elles sont *résurgentes*[20], ce qui permet de définir sur des algèbres de telles fonctions de nouvelles dérivations, les dérivées étrangères. Cette théorie créée par J. Écalle au début des années 80 a connu depuis un grand développement avec de nombreuses applications aux

[16] À prolongement analytique près...
[17] On trouvera un contre-exemple dans [70].
[18] Basée sur la notion d'accélération de Jean Écalle.
[19] Et avec rang de Poincaré égal à 1 ou une condition similaire.
[20] Une propriété se lisant sur les singularités du prolongement analytique de leur transformée de Borel sur le revêtement universel du plan de Borel privé d'un réseau convenable.

systèmes dynamiques. On peut dire que le traitement du pendule forcé par Poincaré, tel que je l'ai décrit dans la première partie de cet article (partie 3.3), est d'esprit « *présurgent* » . Si l'on revient une fois de plus à l'article fondateur de Poincaré [64], on peut montrer que les solutions séries formelles des équations différentielles (de rang de Poincaré un « génériques ») étudiées par Poincaré, sont résurgentes [47].

6. Petits diviseurs et grands multiplicateurs

Si l'on a un système dynamique analytique lent-rapide à *une seule* phase rapide, on peut, en utilisant un processus de moyennisation itérée, éliminer cette phase par un changement de variables *formel*. En général les séries divergent mais sont de type Gevrey [69] : la divergence est due *aux grands multiplicateurs*. Si l'on a plusieurs phases les estimations Gevrey peuvent être « érodées » par un phénomène diophantien [74] : la divergence est due à la fois *aux grands multiplicateurs* et *aux petits diviseurs*.

Un phénomène similaire est décrit dans [17] pour le cas des formes normales. On devrait dans le futur rencontrer cette situation dans de nombreux problèmes et la question mérite d'être approfondie.

7. Perturbations singulières. Développements asymptotiques composés

7.1. Perturbations singulières et développements asymptotiques

Les développements asymptotiques Gevrey ont été introduits pour étudier les solutions des EDO analytiques au voisinage d'un point singulier, dans le prolongement des idées de Poincaré [64]. A posteriori ils se sont révélés un instrument précieux (et même exactement l'instrument qui manquait)[21] pour étudier les perturbations singulières et certains problèmes de moyennisation. Le point de départ est la preuve par Mireille Canalis-Durand, en 1990, du caractère Gevrey du développement en série (commun) des *valeurs à canard* de l'équation de van der Pol forcée, un résultat que j'avais conjecturé une dizaine d'années auparavant[22]. Je ne peux citer tous les très nombreux résultats qui ont suivi, cf. par exemple [25] et la preuve d'une difficile conjecture de W. Wasow sur les *points tournants* (*turning points*) qu'en a déduit C. Stenger [77] ou les beaux travaux d' A. Fruchard et R. Schäfke sur le problème de la résonance d'Ackerberg-O'Malley (cf. la bibliographie de [38]).

7.2. Développements asymptotiques composés

Pour l'étude d'un système singulièrement perturbé de la forme :

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Phi(x, y, \varepsilon)$$

au voisinage d'un *point tournant* ($\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, 0) = 0$), les développements asympto-

[21] Cf. par exemple [76].

[22] À partir de résultats de F. Diener et E. Benoit obtenus par l'analyse non standard.

tiques « du style de Poincaré » ne suffisent plus. Dans l'abondante littérature sur le sujet on définit des développements dits respectivement *intérieur* et *extérieur* et une technique de comparaison essentiellement heuristique (*matching*). Récemment A. Fruchard et R. Schäfke ont introduit une nouvelle notion de développement asymptotique [38] : les *développements asymptotiques composés* (DACs), avec des versions Gevrey délicates. Ils permettent un traitement rigoureux des problèmes avec beaucoup d'applications. Les DACs devraient en particulier permettre de prouver des résultats de résurgence dans un certain nombre de cas où les approches connues échouent, comme le problème de Voros [39] où la résurgence de la série des valeurs à canard de l'équation de van der Pol forcée [40].

Contrairement au cas des développements de Poincaré (où il n'y a qu'un point singulier) les DACs se greffent sur une géométrie *globale*, avec en particulier une situation d'éclatement. Dans ce cadre une approche « à la Poincaré » avec une *symbiose* de la géométrie et des divergences me semble pouvoir être mise en place avec profit. Pour dire les choses autrement, il faut bien sûr traiter les équations différentielles comme des objets géométriques, mais en *inventant* la géométrie adéquate, qui est une géométrie « à plusieurs échelles de grandeur », une géométrie « sauvage » [23] [32], greffée sur la géométrie ordinaire[24].

Je termine par une citation de [37] sur les relations des techniques évoquées ci-dessus (éclatements mêlant la variable indépendante et le paramètre) et les idées de Poincaré :

« Although the scope of the method of stretching is rather limited, the general idea of employing appropriate transformations of the independent variable, depending on the parameter, seems to be very fruitful. The importance of this idea, which occurs already in Poincaré's work,... That is, one desires an approximation which is uniformly valid on the boundary and off the boundary in a problem of the boundary layer type, or on the Stokes line and off the Stokes line when a Stokes phenomenon is involved. »

8. Les développements asymptotiques aujourd'hui

Nous pouvons maintenant tenter un bilan de l'évolution du concept de développement asymptotique depuis Euler et ses contemporains. Au départ il y a la donnée d'une suite de nombres $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (au début réels) engendrée par un *algorithme* (par exemple de nature combinatoire) ou, de façon souvent équivalente, d'une série formelle $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n x^n$ solution formelle d'une équation fonctionnelle ou obtenue par le développement d'une « expression » (fonction, fraction continue...).

Dès le XVIII^{e} siècle, il y a apparemment un accord général sur le cas convergent (même si la notion n'est pas formalisée à cette époque), tout le monde sait qu'il y a dans ce cas un parfait dictionnaire entre les séries et les fonctions qui sont leurs sommes (compatible avec les opérations usuelles, la dérivation...) et que toute solution formelle d'une équation fonctionnelle analytique représente de façon unique (localement) une vraie solution. Le cas divergent est par contre le sujet de plusieurs controverses, Euler, par exemple pense que toute série divergente a une somme

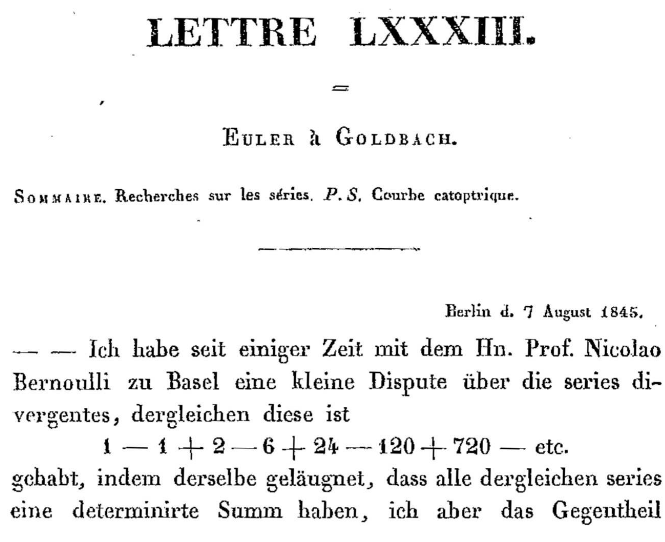
[23] En relation avec la *Geometric singular perturbation theory* de Fenichel [36] et ses variantes Gevrey [50, 51].
[24] Comme le dit très bien M. Berry : *« The aim is to sew the quantum flesh on classical bones »* [44].

et même mieux une somme *unique* tandis que Nicolas Bernoulli s'interroge et conjecture aussi la possibilité d'une non-unicité de la somme.

Citons, pour étayer le point de vue d'Euler sur l'existence d'une « somme », Émile Borel [14] :

« Le paradoxe disparaît si l'on songe à la différence profonde, sur laquelle nous avons insisté plus haut, entre les séries naturelles, auxquelles conduisent des problèmes simples, et les séries fabriquées artificiellement. Ces dernières, lorsqu'elles sont convergentes, ont sans doute une valeur numérique (...) ; lorsqu'elles sont divergentes, on n'en peut absolument rien dire. On conçoit qu'il puisse en être tout autrement des séries naturelles. »

et sur un épisode de la *« kleine Dispute über die series divergentes » entre L. Euler et N. Bernoulli »* une lettre d'Euler à Goldbach [35] (on notera l'apparition de la série de Wallis) :



LETTRE LXXXIII.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Recherches sur les séries. *P. S.* Courbe catoptrique.

Berlin d. 7 August 1845.

— — Ich habe seit einiger Zeit mit dem Hn. Prof. Nicolao Bernoulli zu Basel eine kleine Dispute über die series divergentes, dergleichen diese ist

$$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \text{etc.}$$

gehabt, indem derselbe geläugnet, dass alle dergleichen series eine determinirte Summ haben, ich aber das Gegentheil

Fig. 1. Controverse sur la somme d'une série divergente

C'est finalement N. Bernoulli qui avait raison[25]. Bien plus tard, Hardy écrit [43] :

« Different methods may sum the same series to Different sums... »

Il relie en particulier le phénomène de multiplicité des sommes à des questions de *prolongement analytique* (il appelle $\mathfrak{S}$ *method* une famille de procédés de sommation par prolongement analytique, cf. [66], 1.5) :

« ... then we call s the $\mathfrak{S}$ sum of $\sum a_n$. The value of s may naturally depend of the region chosen. »

Hardy relie cette approche aux idées d'Euler :

[25] D'une certaine façon car si l'on reste strictement dans le cadre réel, dans lequel pensait Euler, la question est plus subtile ! La série (1) ci-dessous ne semble pas pouvoir avoir de somme *réelle* raisonnable, par contre la série d'Euler a une somme réelle pour $x = -1$, la sommation de Borel conduit à deux sommes complexes distinctes pour cette même valeur de x [66] (page 25), et il y a en fait une *infinité* de sommes...

« It's impossible to state Euler's principle accurately without clear ideas about functions of a complex variable and analytic continuation. »

Voici un exemple simple [66] (page 58). La $\mathfrak{S}$ *method*[26] permet d'attribuer à la série :

$$(1) \qquad 1+\frac{1}{2}(-2)+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-2)^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2))}{3!}(-2)^3+\cdots$$

les *deux sommes distinctes* i et $-i$. Nous avons cité plus haut un autre exemple à propos du phénomène de Stokes : une série formelle de rayon de convergence nul peut avoir deux sommes distinctes. De toute façon, comme l'explique Poincaré, une telle série est nécessairement le développement asymptotique d'au moins deux fonctions distinctes, sinon elle serait convergente.

Revenons maintenant à l'exemple du traitement du pendule forcé par Poincaré (cf. la première partie de cet article). Nous avons d'un côté un objet *formel* : un développement divergent en $\sqrt{\mu}$ (une série formelle dont les coefficients sont des fonctions) et de l'autre un objet *géométrique* : une paire de variétés $\mathcal{W}^+$ (stable) et $\mathcal{W}^-$ (instable) infiniment (exponentiellement) proches :

$$\hat{S}(\varepsilon,\sqrt{\mu})=S_0(\varepsilon)+S_1'(\varepsilon)\sqrt{\mu}+S_2'(\varepsilon)\mu+\cdots=(\sum T_p\,\mu^{p/2})\varepsilon+\cdots\longleftrightarrow(\mathcal{W}^+,\mathcal{W}^-).$$

On retrouve plus tard une situation similaire chez G. Birkhoff dans un cas plus simple[27] [12]. Il considère des germes de systèmes différentiels linéaires méromorphes $\frac{dY}{dx}=\frac{A(x)}{x^{k+1}}Y$ (je me ramène à l'origine), dans une situation « générique », et associe à une solution fondamentale formelle [28] $\hat{F}=\hat{H}(x)x^Le^{Q(1/x)}$ une collection finie de vraies solutions $(F_i=H_i(x)x^Le^{Q(1/x)})_{i\in I}$ holomorphes sur des secteurs ouverts de sommet l'origine. Les H_i sont *bornées*, maximales en un certain sens, et leurs différences deux à deux sont infiniment proches (exponentiellement proches à l'ordre k) :

$$\hat{F}\quad\longleftrightarrow\quad(F_i)_{i\in I}.$$

La description des deux exemples ci-dessus admet une très large généralisation, surtout du point de vue des applications (cf. par exemple [52], l'Appendice de [75], [70], [22] pour des cas typiques). La situation « modèle » est la suivante (en simplifiant quelque peu pour éviter les détails trop techniques...) :

(1) on a une collection $(F_i)_{i\in I}$ (dite 0-cocycle) de « solutions privilégiées » *holomorphes bornées*, intéressantes du point de vue géométrique ou dynamique[29] d'un problème analytique (P) ;

(2) les adhérences des domaines des F_i ont un point commun a et les F_i sont infiniment proches en a ;

(3) il y a une série formelle divergente $\hat{F}$ (scalaire, vectorielle,...) qui est *développement asymptotique commun* des solutions F_i et solution formelle du problème (P).

[26] Appliquée à $\sqrt{1+x}$ et $x=-2$.
[27] Proche de celle de la deuxième partie de [64].
[28] Avec C matrice constante, $\hat{H}$ matrice formelle inversible et $Q(1/x)=\mathrm{Diag}\,(\lambda_i/x^k)$.
[29] Souvent maximales *au sens holomorphes et bornées dans le domaine complexe*.

L'objet naturel du point de vue *calculatoire* (à la main ou à l'ordinateur) est la série $\hat{F}$ mais l'objet naturel du point de vue géométrique ou dynamique est le 0-cocycle $(F_i)_{i\in I}$.

On peut maintenant faire *l'observation cruciale* suivante. Étant donnée la série divergente $\hat{F}$ il est le plus souvent très difficile de prouver directement certains résultats sur elle : estimations Gevrey, k-sommabilité, résurgence ou propriétés des divers développements asymptotiques associés [30]. Ceci devient « beaucoup plus facile », si $\hat{F}$ est solution formelle d'un problème analytique (P), en raisonnant « géométriquement ». On construit une collection de solutions privilégiées comme ci-dessus[31], puis l'on estime le 1-cocycle infiniment plat $F_i - F_j$ (ou $F_i \circ F_j^{-1}$ pour une opération de groupe convenable)[32]. On termine en utilisant un « dictionnaire » entre les développements asymptotiques (modulo développements convergents) et les 1-cocycles.

Dans les « bons cas » les estimations sur les 1-cocycles sont d'origine géométrique (ordres de contact...) et l'on en déduit des estimations Gevrey sur les séries (via le théorème dit de Ramis-Sibuya [75]). Ce bel ordonnancement (grands multiplicateurs) peut être partiellement ou totalement détruit par des phénomènes diophantiens (petits dénominateurs).

L'exemple le plus simple de la situation décrite dans ce paragraphe est donné par la série d'Euler (cf. la première partie de cet article) : $\hat{F} := \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n n!\, x^{n+1}$ qui est, nous l'avons vu, une solution formelle de l'équation différentielle d'Euler $x^2y' + y = x$. Notons d_α la demi-droite issue de l'origine du plan complexe, d'argument $\alpha \in\,]0, 2\pi[$. Les fonctions $f_\alpha : x \mapsto \int_{d_\alpha} \frac{e^{-t/x}}{1+t} dt$ $(\alpha \neq \pi)$ sont solutions de l'équation différentielle d'Euler et se recollent, par prolongement analytique, en deux solutions F_1 et F_2 holomorphes *bornées* (au voisinage de 0) définies respectivement sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^- i$ et $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+ i$, en faisant varier α dans $]0, \pi[$ et $]\pi, 2\pi[$. Le 0-cocycle est (F_1, F_2), le 1-cocycle associé est $F_{12} := F_2 - F_1$, il est holomorphe sur $(\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^- i) \cap (\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+ i) = \{\Re x > 0\} \cup \{\Re x < 0\}$. On a, par un calcul de résidu, $F_{12}(x) = 2i\pi\, e^{-1/x}$ si $\Re x < 0$ et $F_{12}(x) = 0$ si $\Re x > 0$, en effet, si $\Re x > 0$, $F_1(x) = F_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x}}{1+t} dt$ (cf. [55] : 5, page 163 ou [66]).

9. Preuves de non intégrabilité

L'introduction de [49] commence par *« The fundamental problem in Hamiltonian mechanics is to decide whether a given system is integrable »*. Il s'agit d'intégrabilité au sens classique, ou de Liouville : n étant le nombre de degrés de liberté, il existe n intégrales premières indépendantes (presque partout) en involution (au sens symplectique) (cf. par exemple [5]).

Notons un problème important de définition : tout dépend de la *régularité* exigée pour les intégrales premières. Traditionnellement on s'intéresse à des systèmes algébriques ou analytiques réels et l'on cherche des intégrales premières polynomiales ou rationnelles (dans un cadre où ceci a un sens), ou plus généralement

[30] En 1900 Mittag-Leffler avait en ce sens critiqué sévèrement la théorie de la sommabilité de Borel.

[31] Généralement par une méthode de point fixe et un prolongement analytique ad-hoc conservant la propriété des solutions d'être bornées.

[32] Une telle estimation est souvent aisée car ce problème se *linéarise*.

analytiques (ou méromorphes). Mais, avec la vogue actuelle des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, on peut évidement présenter la mécanique hamiltonienne dans le cadre $\mathcal{C}^\infty$ et s'intéresser à des intégrales premières $\mathcal{C}^\infty$. Il me semble toutefois que l'intégrabilité $\mathcal{C}^\infty$ (au sens de Liouville) n'apporte pas toujours une information dynamique significative (*cf.* par exemple [13]). Je cite A. Chenciner, parlant de la méthode de Morales-Ramis décrite au paragraphe suivant et de la restriction au cadre des *intégrales premières méromorphes* qu'elle suppose :

« ...pourvu qu'on se restreigne au monde des intégrales méromorphes. Une telle restriction n'est pas, comme on pourrait le croire, arbitraire. C'est au contraire le monde différentiable qui est trop souple pour qu'une notion de non-intégrabilité seulement différentiable soit fortement liée à des propriétés géométriques d'un système » .

Je me limiterai donc implicitement aux cas des systèmes *analytiques* et de l'intégrabilité *méromorphe*[33].

9.1. Non-integrabilité du problème des trois corps

La première preuve de la non-intégrabilité du problème des trois corps est due à Bruns [20], il se limite à des intégrales premières *algébriques* en les positions et les moments[34]. La méthode de Bruns a été généralisée par Painlevé (algébricité en les moments seuls) et Husson. Dans le tome I de [65] Poincaré donne une preuve de la non-intégrabilité mais c'est une version « faible » (il y a une condition d'analyticité en un paramètre de masses). Enfin Poincaré donne dans le tome III de [65] une autre preuve en relation avec la divergence des séries.

Nous allons décrire ci-dessous une autre approche de la preuve de non-intégrabilité d'un système hamiltonien. Elle conduit à d'autres démonstrations, assez simples, de la non-intégrabilité de nombreux problèmes à n corps. Elle permet aussi d'éclairer la relation entre divergence de séries et non-intégrabilité.

9.2. Les théories de Ziglin et de Morales-Ramis

Les théories de Ziglin et Morales-Ramis donnent des critères efficaces pour montrer la non-intégrabilité d'un système Hamiltonien (analytique).

Le point de départ de la théorie de Ziglin [82, 83] est le choix d'une *intégrale particulière* et le calcul de l'équation variationnelle de Poincaré le long de cette solution. C'est tout à fait dans la ligne de Poincaré attaquant le problème des trois corps à partir de solutions périodiques, mais, et c'est ce qui est nouveau, Ziglin reprend la démarche de Sophie Kowalevski en passant en *temps complexe*. Il cherche alors des obstructions à l'intégrabilité dans la *monodromie* de l'équation variationnelle (une connexion symplectique que l'on interprète comme un système différentiel linéaire sur une surface de Riemann). La théorie de Ziglin a de nombreuses applications, en particulier la solution du vieux problème des cas d'intégrabilité du solide mobile autour d'un point fixe dans le champ de pesanteur terrestre (Ziglin montre que les seuls cas d'intégrabilité sont les cas connus : cas d'Euler-Poinsot, de Lagrange, de Kowalevski). Toutefois, en pratique, la théorie de Ziglin n'est plus guère applicable si l'on a plus de deux degrés de liberté.

---

[33] Poincaré ne s'intéressait qu'à l'intégrabilité rationnelle ou, plus généralement analytique.

[34] Il y a des erreurs dans la preuve de Bruns, pour une version corrigée et généralisée, cf. [45].

Morales et Ramis ont repris la démarche de Ziglin, en remplaçant la monodromie (qui est généralement transcendante) par le *groupe de Galois différentiel* (qui est purement algébrique). L'idée de départ, fort simple, est que l'intégrabilité d'un système est reflétée par l'intégrabilité (au sens de Picard-Vessiot ou Liouvillien) de son équation variationnelle le long de toute solution (non stationnaire). Le critère d'intégrabilité de Morales et Ramis est que l'algèbre de Lie du groupe de Galois différentiel de toute équation variationnelle doit être *abélienne*[35]. Je renvoie à [5, 56, 58, 59] pour la présentation de la théorie et des applications. Ensuite la théorie a été étendue aux (linéarisées des) variationnelles d'ordre supérieur [60].

Il y a un très grand nombre d'applications, en particulier à de nombreux problèmes à n corps (et à des problèmes réduits : Sitnikov, Hill, satellites). Je renvoie à [59] pour une bibliographie et des analyses de divers cas.

La théorie de Morales-Ramis permet aussi de comprendre la relation entre non-intégrabilité et divergence sur des exemples beaucoup plus élémentaires que ceux de Poincaré (cf. [56] : pages 92-94, ou l'exemple de système de Hénon-Heiles de [60]). L'un des plus simples est dû à M. Audin ([5] : p. 84). La variété symplectique complexe est $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2$ et le hamiltonien $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - q_2^2(A + q_1)$. Le plan $\{q_2 = p_2 = 0\}$ est invariant et les trajectoires contenues dans ce plan sont des droites. On choisit comme trajectoire privilégiée la droite $\Gamma : t \mapsto \big(q_1(t) = \frac{1}{2}t - A, q_2(t) = 0, p_1(t) = \frac{1}{2}, p_2(t) = 0\big)$ paramétrée par le temps complexe $t \in \mathbf{C}$. L'équation variationnelle normale se ramène à l'équation d'Airy : $\xi'' - t\xi = 0$ (que nous avons rencontrée dans la première partie de cet article). La divergence des solutions à l'infini est, nous l'avons vu, une traduction du phénomène de Stokes. Les multiplicateurs de Stokes sont $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$, l'adhérence de Zariski du sous-groupe engendré dans $GL_2(\mathbf{C})$ est $SL_2(\mathbf{C})$ (cf. [55] : 3.5, page 198). On en déduit que le groupe de Galois différentiel (sur le corps des fractions rationnelles $\mathbf{C}(t)$) de l'équation normale variationnelle (qui est conservative) est $SL_2(\mathbf{C})$. Ce groupe connexe n'étant pas abélien, d'après le critère de Morales-Ramis, le système n'est pas intégrable.

9.3. Le système de Lorenz

En 1963 un météorologue E. N. Lorenz (re)découvre la notion de *sensibilité aux conditions initiales* d'un système dynamique [48]. Cette question avait été soulevée au XIX$^{\text{e}}$ siècle par Poincaré, puis Hadamard[36] :

« Un des problèmes fondamentaux de la Mécanique Céleste, celui de la stabilité du système solaire, rentre peut-être dans la catégorie des questions mal posées. Si, en effet, on substitue à la recherche de la stabilité du système solaire la question analogue relative aux géodésiques d'une surface à courbure négative, on voit que toute trajectoire stable peut être transformée, par un changement infiniment petit dans les données initiales, dans une trajectoire complètement instable se perdant à l'infini. Or, dans les problèmes astronomiques, les données initiales ne sont jamais

[35] Ce critère algébrique permet de mettre en œuvre divers algorithmes et d'utiliser le calcul formel.
[36] Pour plus de détails, en particulier sur l'avis de Poincaré sur le travail d'Hadamard, on pourra se reporter à [41].

connues qu'avec une certaine erreur. Si petite soit-elle, cette erreur pourrait amener une perturbation totale et absolue dans le résultat cherché. » [42]

« *Tout changement, si minime qu'il soit, apporté à la direction d'une géodésique qui reste à distance finie suffit pour amener une variation absolument quelconque dans l'allure finale de la courbe* ». (1898)

En fait, pour rencontrer la sensibilité aux conditions initiales, il n'est pas besoin de recourir à des systèmes bien compliqués, il suffit pour le voir de tracer avec un ordinateur les solutions de $y' - y = 0$, de l'équation d'Euler $x^2y' + y - x = 0$, ou de nombreuses EDO algébriques simples (on en trouvera de nombreux exemples dans [4, 9] : les phénomènes de *fleuves*).

Contrairement à ce qui est souvent affirmé, la sensibilité aux conditions initiales n'a rien d'incompatible avec un certain type d'intégrabilité (par exemple par quadratures, comme dans l'équation d'Euler). Ce qui est incompatible avec l'intégrabilité est le concept plus restrictif de *chaos*.

Le système de Lorenz (modélisant un problème de convection atmosphérique) est le système dynamique réel (avec $\sigma,\ \rho\ ,\beta \in \mathbf{R}$) :

$$\begin{cases} \dot{x} = & \sigma(y-x) \\ \dot{y} = & x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = & xy - \beta z. \end{cases}$$

Il existe plusieurs preuves assistées par ordinateur du caractère chaotique de ce système (l'un des 18 problèmes posés par S. Smale en 2000). Considérons le problème plus simple de l'intégrabilité du système de Lorenz (ou plutôt du système Hamiltonien relevé sur le cotangent [6]). On peut le résoudre en utilisant le théorème de Morales-Ramis [24][37], [26]. Si $\beta \neq 0$, l'axe des z est *invariant*, l'équation normale variationnelle correspondante se ramène à une équation de Whittaker dont le groupe de Galois est $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ [55]. Le système n'est donc pas intégrable.

On peut penser à partir de là, dans l'esprit de Poincaré, à une preuve rigoureuse d'un certain caractère chaotique du système localement au voisinage (*complexe*) de l'axe des z, par exemple en utilisant deux dérivées étrangères[38] dont les linéarisées sont les multiplicateurs de Stokes de l'équation de Whittaker (comparer à l'exemple du pendule forcé de Poincaré décrit dans la première partie de cet article et à l'approche de [72]). Cf. aussi [57].

10. Développements asymptotiques et physique

10.1. Développements asymptotiques et réduction des théories physiques

Les développements asymptotiques *divergents* ont toujours joué un rôle important en physique, d'abord de façon informulée, comme nous l'avons vu chez Stokes, puis plus tard en accord avec la définition donnée par Poincaré (et Stieltjes).

[37] Résultat trouvé au coeur de la baie d'Halong...

[38] Cf. 5.2.

Contrairement à ce qui s'est passé en mathématiques après Cauchy et Weierstrass[39], l'utilisation de ces développements n'a jamais été abandonnée en physique et la pratique de la sommation au plus petit terme (ou « des astronomes ») s'est toujours maintenue :

« Those who employ mathematics as a tool have rarely been inhibited by the fear of divergence ; they have always been confident that, somehow or other, formal procedures are valid » [37].

Les raisons fondamentales de l'importance des développements asymptotiques *divergents* en physique ont été très bien dégagées et étudiées par le physicien anglais Michael Berry[40]. Je vais essayer d'en donner brièvement l'idée centrale. Je connais malheureusement fort mal les œuvres de Poincaré en relation avec la physique et je ne sais pas si l'on peut y trouver des rapports directs avec les idées de Berry.

Voici d'abord deux citations extraites d'une interview de M. Berry [44] :

« If you can't solve a problem in physics exactly then you try to represent it mathematically as an infinite series, hoping that it will converge. In fact almost all series describing physics diverge ».

« The best mathematical work I have done has been to develop some technologies for dealing with divergent series ».

Berry s'intéresse au problème de la *réduction* des théories physiques [10, 11] et montre que dans ce contexte apparaissent naturellement des développements asymptotiques qui sont presque toujours divergents[41].

Berry considère la situation où une théorie « générale » est paramétrée par $\delta > 0$ (un petit paramètre *sans dimension*) et, en un certain sens (compliqué...), « tend vers » une théorie « moins générale » quand $\delta \to 0$. C'est ce qu'il appelle *reduction*.

Il donne les exemples suivants (je renvoie à [11] pour les notations et des détails).

(1) relativité restreinte $\to$ mécanique newtonienne ($\delta = \nu/c$) ;
(2) relativité générale $\to$ relativité restreinte ($\delta = Gm/c^2a$) ;
(3) mécanique statistique $\to$ thermodynamique ($\delta = 1/N$) ;
(4) fluide visqueux (Navier-Stokes) $\to$ fluide non visqueux (Euler), $\delta = 1/\mathrm{Re}$;
(5) optique ondulatoire $\to$ optique géométrique ($\delta = \lambda/a$) ;
(6) mécanique quantique $\to$ mécanique classique ($\delta = \hbar/S$).

Le premier exemple est exceptionnellement simple, les autres limites sont « très singulières » et donnent naissance à des *développements asymptotiques divergents* (cf. [67] pour une analyse du cas 5 en relation avec les développements asymptotiques divergents de Stokes et l'abondante littérature *semi-classique* pour le cas 6).

On rencontre aussi des idées voisines de celles de Berry dans un très intéressant article de Friedrichs [37], que j'ai déjà cité plus haut (Friedrichs connaît bien le travail de Poincaré en asymptotique) :

« The problems concern what may be called asymptotic phenomena. Instead of explaining in general terms what I mean by asymptotic phenomena, I prefer to single out at first one class of such phenomena : discontinuities. A typical discontinuity of the kind I have in mind is the boundary of the shadow which

---

[39] Nous avons dit ailleurs (...) comment les mathématiciens du XIX^{e} siècle, lassés de ce formalisme sans frein et sans fondement, ramènent l'Analyse dans les voies de la rigueur [16], page 283.

[40] Le lecteur intéressé trouvera sur sa page web de très nombreuses publications sur le sujet, en plus des deux que je signale, en particulie48.219(p)9.738(h)-1.935(e)5.25645(m)-0.15005.97758Tf10.848(n-6.1264(X)a)-1.9145(s)

e pa738(h)-1.93sage de la relativité resreinte à la *appears when a light wave passes an object. ... Nevertheless, it is remarkable enough that the differential equations of wave motion have solutions which involve such quick transitions – in fact, most differential equations of physics possess such solutions – and it is an interesting task to study those features of these equations which make such quick transitions possible. Discontinuities and quick transitions occur in various branches of physics. ... In such a systematic approach one may develop an appropriate quantity with respect to powers of a parameter, ε. This expansion is to be set up in such a way that the quantity is continuous for $\varepsilon > 0$ but discontinuous for $\varepsilon = 0$. Naturally, a series expansion with this character must have peculiar properties. A most remarkable property is that in general these series do not converge. No doubt, divergent series are very useful ; it has even been said that they are more useful than convergent ones. However this may be, if a divergent series is useful it must be meaningful.* »

10.2. Électrodynamique quantique

Voici encore une citation extraite de [37] :

« *It would have been tempting to speak about the quantum theory of fields. Here physicists have developed formal series expansions with great ingenuity. These series, to say the least, do not converge, and yet, to an amazing degree, they make sense physically.* »

Un certain nombre de séries perturbatives de l'électrodynamique quantique, obtenues *après renormalisation*[42], sont (conjecturalement) divergentes, de type Gevrey et (conjecturalement) asymptotiques à des fonctions (que l'on ne sait pas définir...)[43]. En tout cas, ce qui me permet de conclure sur un point d'orgue..., l'heuristique d'Euler, Stokes, Poincaré... fonctionne *fabuleusement bien* si l'on compare avec les données expérimentales. La problématique impulsée par Poincaré est donc toujours d'actualité avec de très difficiles problèmes ouverts. Pour illustrer ce propos je vais dire quelques mots du cas du *moment magnétique anomal de l'électron* (pour plus de détails et des résultats théoriques et expérimentaux « récents », on pourra se reporter, par exemple, à [46]).

Dans le moment magnétique de spin d'une particule intervient un nombre (sans dimension), le facteur de Landé g. L'équation de Dirac prédit pour l'électron la valeur $g = 2$ mais la valeur expérimentale (2005) est voisine de $2,0023193043737$[44]. On définit *l'anomalie* a par $a := \frac{g-2}{2}$, la théorie quantique des champs permet de la « calculer » en un sens formel (on dit *perturbatif*), plus précisément comme *série formelle* en la *constante de structure fine*[45] α ($1/\alpha \approx 137,035999070$). On utilise plutôt $\alpha_1 := \alpha/\pi$ et la série perturbative pour l'anomalie est donc de la forme :

$$a = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_1^2 + c_3\alpha_1^3 + c_4\alpha_1^4 + \cdots$$

On sait montrer que cette série est Gevrey, on *conjecture* sa divergence[46].

---

[42] Les coefficients des séries perturbatives initiales sont des sommes d'intégrales de Feynmann *divergentes*, ce qui nécessite une renormalisation.

[43] Dans le cas des théories *super-renormalisables* les séries sont Borel-sommables et leurs sommes correspondent aux fonctions de la théorie qui, dans ce cas, existe !

[44] L'écart a été découvert en 1947 dans la structure hyperfine des raies spectrales de l'hydrogène.

[45] Qui n'est pas constante [28]...

[46] La divergence est « expérimentalement évidente » d'après ce qui suit et il en existe une « preuve physique » due à F. Dyson.

La série est obtenue après un processus appelé *renormalisation* [28]. On obtient successivement les termes en utilisant des *diagrammes de Feynmann* (1 pour c_1, 7 pour c_2, 72 pour c_3, 891 pour c_4). Dans les années 50 le calcul *numérique* de c_2 a pris plusieurs années avec les plus gros ordinateurs de l'époque. Aujourd'hui on a des expressions *exactes* pour c_1, c_2, c_3 ne faisant intervenir que des *nombres rationnels* et des *« périodes »* [47]. Il en est sans doute de même pour c_4 mais seule une valeur numérique est connue (Kinoshita 2006).

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 1/2 \quad \text{(Schwinger 1948)} \\
c_2 &= \frac{197}{144} + \Big(\frac{1}{2} - (3 - \log 2)\Big)\zeta(2) + \frac{3}{4}\zeta(3) \\
c_3 &= \frac{82}{72}\pi^2\zeta(3) - \frac{215}{24}\zeta(5) + \frac{100}{3}\Big(Li_4(\frac{1}{2}) + \frac{1}{24}\pi^2(\log 2)^2\Big) \\
&\quad - \frac{239}{2160}\pi^4 + \frac{139}{18}\zeta(3) - \frac{298}{9}\pi^2\log 2 + \frac{17101}{810}\pi^2 + \frac{28259}{5184} \\
c_4 &\approx -1,7283(35).
\end{aligned}
$$

La somme des *trois* premiers termes de la série est $\approx 0,00115965246$. C'est cette somme que R. Feynmann appelait (en 1985) *valeur théorique* de a (sic !). La valeur *expérimentale* à cette époque était $0,00115965221$. La précision relative (pour $1 + a$) est de l'ordre de l'épaisseur d'un cheveu comparée à la distance de New-York à Los-Angeles !

Aujourd'hui on peut, au lieu de sommer 3 termes, en sommer 4, on obtient une valeur encore plus proche de la valeur expérimentale. Mais du point de vue de la théorie quantique des champs ceci revient à augmenter l'énergie, il y a alors la possibilité de création-annihilation de *nouvelles particules* et il faut passer de l'électrodynamique quantique au *modèle standard*. Je renvoie le lecteur à [46] pour la suite de l'histoire, on obtient finalement des résultats encore meilleurs, soit, pour valeur théorique de a :

$$a_{th} \approx 0,0011596521535$$

tandis qu'une valeur expérimentale récente (2005) est :

$$a_{exp} \approx 0,00115965218085.$$

On notera que, faute de savoir calculer plus de 3 ou 4 termes, on se contente d'arrêter là la sommation au lieu de sommer au plus petit terme comme Euler et ses successeurs. On peut toutefois conjecturer que la différence est très faible : si l'on admet que la série est le développement asymptotique au sens de Poincaré (ou mieux Gevrey) de l'anomalie et qu'elle est *Gevrey générique*, alors il y a autour du plus petit terme[48] un phénomène de « long plateau » (cf. la première partie de cet article, figure 26) sur lequel c_n varie très très peu en valeur absolue et avec des signes alternés.

Ce dernier exemple confirme donc de façon on ne peut plus spectaculaire les convictions d'Euler, Cauchy, Stokes et Poincaré : les calculs sont beaucoup plus rapides et précis si, au lieu de séries convergentes, on utilise (intelligemment...) des

[47] Des nombres transcendants « que l'on trouve dans les œuvres d'Euler » ... [2], [18, 19].
[48] Qui pourrait être vers c_{100}.

séries divergentes. Les méthodes analytiques (au bon sens du terme) n'ont donc pas du tout dit leur dernier mot !

Dans [2], Y. André écrit : « *La divergence, plus importune encore en physique qu'en mathématique, infeste la physique des champs quantiques.* » . On peut être plus optimiste et, comme Poincaré, voir plutôt la divergence comme un « plus » : c'est ce que font A. Connes et M. Marcolli [29] en interprétant les divergences des intégrales comme la manifestation d'un groupe de Galois, dit cosmique[49]. Au delà, il faudrait, au niveau *non perturbatif*, interpréter les divergences des séries renormalisées comme la manifestation d'un groupe de Galois, sans doute lié à des phénomènes de Stokes et à des développements asymptotiques (cf. [38] pour une version semi-classique).

Pour finir, voici une anecdote personnelle sur mon premier contact avec le sujet (*cf.* [32], page 9, [71]). En 1980 j'étais responsable à Strasbourg de la RCP 25 [50]. J'avais invité le physicien américain A. S. Wightman, qui après sa conférence, devant un demi et un bretzel au café en face de l'IRMA, m'a appris les bases de la sommation de Borel, totalement oubliée à l'époque par presque tous les mathématiciens[51], ce qui est immédiatement « entré en résonance » avec mes recherches de l'époque sur les développements asymptotiques Gevrey (cf. la partie 4).

11. Conclusion

Je ne vois pas comment mieux terminer cet article que par une citation de S. Ulam [30][52] :

« *... why are asymptotic theorems so much simpler than finite approximations ? Infinity does-not correspond to the popular image. It is a guiding light, a star that draws us to finite ways of thinking. God knows why.* »

12. Références

[1] **N.H. Abel, 1826** Lettre à Holmboe, 16 janvier 1926, Correspondance d'Abel, Kristiana 1902.
[2] **Y. André, 2007** Idées galoisiennes (théorie de l'ambiguïté), ircam 2006-2007.
[3] **Y. André, 2012** Idées galoisiennes, journées x-ups 2011.
[4] **M. Artigues, V. Gautheron, 1983** Systèmes différentiels : étude graphique, *CEDIC*.
[5] **M. Audin, 2001** Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité, *Cours Spécialisés, Société Mathématique de France* 8.
[6] **M. Ayoul, N. T. Zung, 2009** Galoisian obstruction to non-Hamiltonian integrability, *Comptes Rendus Mathématiques, Acad. Sc. Paris*, Vol. 348, 23, 1323–1326.
[7] **W. Balser, 1994** From Divergent Power Series to Analytic Functions, *Lecture Notes in Mathematics* Vol. 1582, Springer.
[8] **J. Barrow-Green, 1077** Poincaré and the three-body problem, *AMS-LMS History of mathematics*, Vol. 11.
[9] **C. Bender, S. A. Orszag, 1978** Advanced Mathematical Methods for Scientists an Engineers, *Mc Graw Hill*
[10] **M. Berry, 1991** Some Quantum-to-Classical Asymptotics, Course 4, *Chaos and Quantum Physics, Les Houches*, M. J. Giannoni, A. Voros, J. Zinn-Justin, eds., 252–303.

49 *cf.* aussi la conclusion de [3].
50 Une structure du CNRS, créée en 1965, destinée à mettre en contact mathématiciens et physiciens théoriciens par des réunions bi-annuelles, qui existe toujours.
51 À l'exception de J. Ecalle...
52 Trouvée chez M. Berry.

[11] **M. Berry, 1994** Asymptotics, singularities and the reduction of theories, *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, IX, D. Prawitz, B. Skyrms, D. Westerstah eds., Elsevier Science B. V., 597–607.
[12] **Birkhoff, 1909** Singular points of linear differential equations, *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, 10, 436-470.
[13] **A.V. Bolsinov, I.A Taimanov, 2000** Bolsinov, A.V. and Taimanov, I.A. : Integrable geodesic flows with positive topological entropy. *Invent Math.*, 140, 3, 639–650.
[14] **E. Borel, 1899** Mémoire sur les séries divergentes, *Annales Scientifiques de l'E.N.S.*, 3e série, tome 16, 9–131.
[15] **E. Borel, 1928** Leçons sur les séries divergentes, *Gauthier-Villars*, 2-Éd. Paris.
[16] **N. Bourbaki, 1960** Éléments d'histoire des mathématiques, *Hermann, Paris.*
[17] **B. Braaksma, L. Stolovitch, 2007** Small divisors and large multipliers (Petits diviseurs et grands multiplicateurs), *Annales de l'institut Fourier*, 57, n° 2, 603–628.
[18] **F. Brown, 2010** On the periods of some Feynman integrals *arXiv :0910.0114v2.*
[19] **F. Brown, 2012** Amplitudes in φ^4 *Conference, DESY Hamburg, 6 march 2012.*
[20] **H. Bruns, 1887** Über die Integrale des Vielkörper Problems, *Acta Math.*, 11, 25–96.
[21] **J.L. Callot, 1981** Les canards ont la vie brève, *Collactenea Mathematica*, Vol. 32, 2, 99–119.
[22] **J.L. Callot, 1992** Sur la piste des canards imaginaires, *Technical report, Mulhouse.*
[23] **M. Canalis-Durand, 1991** Formal expansion of van der Pol equation canard solutions are Gevrey, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1493, 29–39.
[24] **M. Canalis-Durand, J.-P. Ramis, P. Rouchon, J.-A. Weil, 2001** Calculations on the Lorenz system : Variational equation, Bessel dynamics *MAPLE worksheet*, disponible à `http://perso.univ-rennes1.fr/-guy.casale/ANR/ANR\_html/publications.html`.
[25] **M. Canalis-Durand, J.-P. Ramis, R. Schäfke, Y. Sibuya, 2000** Gevrey solutions of singularly perturbed differential equations, *J. Reine Angew. Math.*, 518, 95–129.
[26] **G. Casale, 2009** Morales-Ramis Theorems via Malgrange pseudogroup *Annales de l'Institut Fourier*, Vol. 59, Vol. 7, 2593–2610.
[27] **A. Chenciner, 1991** Séries divergentes de la Mécanique Céleste (problèmes planétaires), Journées x-ups 1991.
[28] **A. Connes, 2002** Symétries Galoisiennes et Renormalisation *Séminaire Poincaré*, 2, .
[29] **A. Connes, M. Marcolli, 2008** Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives *American Mathematical Society Colloquium Publications*, Vol. 55.
[30] **N. G. Cooper ed., 1989** From Cardinals to Chaos. Reflexions on the Life and Legacy of Stanislaw Ulam, *Cambridge University Press*, 311.
[31] **E. Delabaere, 1994** Introduction to the Écalle theory, in *Computer algebra and differential equations*, London Math. Soc. Lecture Note Series 193, 59–101.
[32] **P. Deligne, B. Malgrange, J. P. Ramis, 2007** Singularités irrégulières : correspondance et documents *Documents Mathématiques, Société Mathèmatique de France*, 5.
[33] **J. Ecalle, 1981** Les fonctions résurgentes (en trois parties), *Publications Mathématiques d'Orsay*, 81-05.
[34] **L. Euler, 1760** De seriebus divergentibus, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 5, 205-237.
[35] **L. Euler, 1745** Lettre LXXXIII à Goldbach, Berlin d. 7 august 1745.
[36] **N. Fenichel, 1979** Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, *J. Diff. Eq.*, 31, 53–98.
[37] **K. O. Friedrichs, 1955** Asymptotic Phenomena in Mathematical Physics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 61, 485–504.
[38] **A. Fruchard, R. Schäfke, 2012** Composite asymptotic expansions and turning points of singularly perturbed ordinary differential equations, à paraître dans *Springer Lecture Notes in Mathématics.*
[39] **A. Fruchard, R. Schäfke, 2012** On the parametric resurgence for a certain singularly perturbed linear differential equation of second order, dans *Asymptotics in Dynamics, Geometry and PDEs ; Generalized Borel Summation, Vol. II, CRM Series*, 12, O. Costin, F. Fauvet, F. Menous, D. Sauzin eds., 213–243.
[40] **A. Fruchard, E. Matzinger, R. Schäfke, 2011** On the resurgence of the formal canard solution of the forced van der Pol equation, *preprint.*

[41] **E. Ghys, 2010** Géodésiques sur les surfaces à courbure négative, in *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui, Le sel et le fer, Cassini*, Vol. 4, 339-365.

[42] **J. Hadamard, 1901** Notice sur les travaux scientifiques de M. Jacques Hadamard, *Gauthiers-Villars, Paris*.

[43] **Hardy, 1949** Divergent Series, *Oxford at the Clarendon Press*.

[44] **N. Hall, 1997** Interview of Sir Michael Berry by Nina Hall : Caustics, catastrophes and quantum chaos, *Nexus News*.

[45] **E. Julliard-Tosel, 2000** Bruns' Theorem : The Proof and Some Generalizations *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 76, No 4 (2000), 241–281.

[46] **M. Knecht, 2002** The Anomalous Magnetic Moment of the Electron and the Muon, *Séminaire Poincaré*, 2, 93–125.

[47] **M. Loday, Remy, 2011** Resurgence, Stokes phenomenon and alien derivatives for level-one linear differential systems, *Journal of Differential Equations*, Vol. 250, no 3, 159–1630.

[48] **E.N. Lorenz, 1963** Deterministic Nonperiodic Flow, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, 130–141.

[49] **A. J. Maciejewski, M. Przybylska, H. Yoshida, 2012** Necessary conditions for partial and super-integrability of Hamiltonian systems with homogeneous potential, *Nonlinearity*, 25, 2.

[50] **P. De Maesschalck, 2003** Geometry and Gevrey asymptotics of two dimensional turning points, PhD thesis, Faculteit Wetenschappen, Limburgs universitair centrum.

[51] **P. De Maesschalck, 2005** Gevrey properties of real planar singularly perturbed systems, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. I, 340.

[52] **B. Malgrange, 1982** Travaux d'Ecalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques *Séminaire N. Bourbaki 1981-82, exp. 582*, 59–73.

[53] **B. Malgrange, 1991** Équations différentielles à coefficients polynomiaux, *Birkhäuser, Progress in Mathematics*, 96.

[54] **J. Martinet, J.P. Ramis, 1991** Elementary Acceleration and Multisummability *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique*, 54, 1.

[55] **J. Martinet, J.P. Ramis, 1989** Théorie de Galois différentielle et resommation, *Computer Algebra and Dif- ferential Equations*, E. Tournier Ed., Academic Press, London, 117–214.

[56] **J. J. Morales-Ruiz, 1999** Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems, *Birkhaüser*, Vol. 179.

[57] **J. J. Morales-Ruiz, J.M. Peris, 2001** On the Dynamical meaning of the Picard-Vessiot Theory, *Regular and Chaotic Dynamics*, 6, 277–290.

[58] **J. J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis, 2001** Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems I & II, *Methods Appl. Anal.*, 8, n° 1, 33–111.

[59] **J. J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis, 2010** Integrability of Dynamical Systems through Differential Galois Theory : a practical guide, *Differential algebra, complex analysis and orthogonal polynomials, Contemp. Math.*, 509, P. B. Acosta-Humánez, F. Marcellán eds., Amer. Math. Soc., Providence, 143–220.

[60] **J. J. Morales-Ruiz, J.P. Ramis, C. Simó, 2001** Integrability of Hamiltonian systems and differential Galois groups of higher variational equations, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 4, 40, n° 6, 845–884. (2007)

[61] **F. W. J. Olver, 1974** Asymptotics and Special Functions, *Academic Press*.

[62] **H. Poincaré, 1883** Sur les groupes des équations linéaires, *Comptes Rendus acad. des Sciences, Paris*, T. 96, 691–696.

[63] **H. Poincaré, 1885** Sur les Équations Linéaires aux Différentielles ordinaires et aux Différences finies *American Journal of Mathematics. Baltimore*, 7, 203–258.

[64] **H. Poincaré, 1886** Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires *Acta mathematica*, t. 8, 295–344.

[65] **H. Poincaré, 1892** Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, tomes I, II, III, *Gauthier-Villars, Paris*.

[66] **J.P. Ramis, 1993** Séries divergentes et théories asymptotiques, *Panoramas et Synthèse*, 0, Société Mathématique de France.

[67] **J.P. Ramis, 2009** Leonhard Euler, ou l'art de donner un sens à ce qui n'en avait pas, Conférence donnée dans le cadre du cycle « Un texte, un mathématicien », organisée par la Société Mathématique de France, la Bibliothèque nationale de France, et

Animath. Réalisation : BnF, Paris, http://smf.emath.fr/VieSociete/Rencontres/BNF/2009/Ramis.html.

[68] **Ramis J.-P., Sauloy J. et Zhang C., 2007.** Local analytic classification of irregular q-difference equations, *Astérisque, S.M.F.*, à paraitre (arXiv :0903.0853v3).

[69] **J.P. Ramis, R. Schäfke, 1996** Gevrey separation of fast and slow variables, *Nonlinearity*, 9, 353–384.

[70] **J.P. Ramis, Y. Sibuya, 1989** Hukuhara domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type, *Asymptotic Analysis*, 2, 39–94.

[71] **RCP 25, 1980** Vingt-sixième reunion de la R.C.P. 25 : Exposés de V. Rivasseau, A. S. Wightman, B. Malgrange, H. Araki, Vol. 28, IRMA Strasbourg.

[72] **D. Sauzin, 1995** Résurgence paramétrique et exponentielle petitesse de l'écart des séparatrices du pendule rapidement forcé, *Annales de l'institut Fourier*, 45, n° 2, 453–511.

[73] **D. Sauzin, 2009** Mould expansions for the saddle-node and resurgence monomials *Renormalization and Galois Theories*, Connes, Fauvet, Ramis (eds), IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, 15, European Mathematical Society, 83–163.

[74] **C. Simó, 1994** Averaging under fast quasiperiodic forcing. In *Hamiltonian mechanics (Torún 1993)*, volume 331 of NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., Plenum, 13–34.

[75] **Y. Sibuya, 1990** Linear Differential equations in the Complex Domain : Problems of Analytic Continuation, *Transl. Math. Monographs*, 82, Amer. Math. Soc. Providence, R. I..

[76] **Y. Sibuya, 2000** The Gevrey Asymptotics in the Case of Singular Perturbations, *Journal of Differential equations*, Vol. 165, 2, 255–314.

[77] **C. Stenger, 1999** Sur une conjecture de Wolfgang Wasow en théorie des points tournants, *Comptes Rendus Acad. Sc., Paris, Series I, Math.*, Vol. 325, no 1, 27–32.

[78] **T. J. Stieltjes, 1886** Recherches sur quelques séries semi-convergentes, *Annales Scientifiques de l'E.N.S.*, 3e série, tome 3, 201–258.

[79] **W. Wasow, 1966** Asymptotic expansions for ordinary differential equation *John Wiley and Sons Inc*, New York-London-Sydney.

[80] **G. Watson, 1911** A theory of asymptotic series, *Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A, 211, 279–313.

[81] **E. T. Whittaker, G. Watson, 1902** A Course of Modern Analysis, *Cambridge University Press.*

[82] **S. L. Ziglin, 1982** Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanics I, *Funct. Anal. Appl.*, 16, 181–189.

[83] **S. L. Ziglin, 1983** Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanics II *Funct. Anal. Appl.*, 17, 6–17.