LIVRES

Polyhedral and Semidefinite Programming Methods in Combinatorial Optimization
LEVENT TUNÇEL,
American Mathematical Society, et The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, 2010, 219 p., ISBN 978-0-8218-3352-0, \$77

L'ouvrage commence par rappeler les notions de *programmation linéaire* et *programmation semidéfinie*. (Rappelons que, dans ce contexte, la « programmation » ne se rapporte pas à l'écriture de logiciels, mais à la résolution de problèmes d'optimisation.)

La programmation linéaire est bien connue depuis les années 1950 : il s'agit, étant donnés une matrice A et un vecteur b réels (ou rationnels), de maximiser une forme linéaire $c^T x$ sur l'ensemble des solutions de $Ax \leqslant b$ (un polyèdre convexe), et de calculer le x^* optimal. Ce problème admet une dualité convexe forte (garantie par le lemme de Farkas) : à un problème primal de la forme « minimiser $c^T x$ sous contrainte $Ax = b \wedge x \geqslant 0$ » correspond un problème dual de la forme « maximiser $b^T y$ sous contrainte $A^T y + s = c \wedge s \geqslant 0$ », et si le premier a une solution optimale x^*, alors le second également (notée y^*) et leurs valeurs $c^T x^*$ et $b^T y^*$ coïncident. Certaines méthodes numériques de résolution exploitent cette dualité, par exemple en maintenant à la fois une sur-approximation $c^T x$ de l'optimum et une sous-approximation $b^T y$; de plus, formuler un problème sous l'une ou l'autre forme peut être plus économique. On connaît depuis longtemps l'*algorithme du simplexe*, qui explore les sommets du polyèdre $Ax \leqslant b$ en suivant les arêtes à la recherche du sommet optimal ; si cet algorithme est dans la pratique très efficace (on en a aujourd'hui des versions très optimisées tant en calculs flottants qu'en calculs rationnels exacts), son nombre d'opérations est dans le pire cas exponentiel en le nombre de contraintes du problème d'origine (le nombre de lignes de A).

L'existence d'un algorithme polynomial – c'est-à-dire tel qu'il existe un polynôme P tel que le nombre d'opérations élémentaires de l'algorithme est borné par $P(|x|)$ où $|x|$ est le nombre de bits de l'écriture en binaire de l'entrée, le triplet (A, b, c) – n'a été établie qu'en 1979, avec la *méthode de l'ellipsoïde* de Khachiyan (chapitre 3 de l'ouvrage). Celle-ci n'est pas efficace en pratique, mais elle permet d'établir des résultats théoriques de complexité algorithmique, notamment par l'usage de problèmes décrits par un oracle de séparation (au lieu de contraintes explicites $Ax \leqslant b$).

La programmation semidéfinie est en revanche moins connue. Reprenons la formulation de la programmation linéaire vue ci-dessus : « minimiser $c^T x$ sous contrainte $Ax = b \wedge x \geqslant 0$ », autrement dit minimiser « $c^T x$ dans l'intersection de l'espace affine des solutions d'$Ax = b$ et du cône convexe des vecteurs à coefficients positifs ». Il existe une théorie générale de l'optimisation par rapport à des cônes convexes, avec des notions adaptées de dualité (voir par exemple Boyd &

Vandenberghe, *Convex optimization*) ; la programmation semidéfinie en est l'instance où les vecteurs sont des matrices symétriques réelles et où le cône considéré est celui des matrices M semidéfinies positives (noté $M \succeq 0$), autrement dit celles n'ayant aucune valeur propre négative. On calcule donc

$$\inf \left\{ c^T x \mid -F_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i F_i \succeq 0 \right\} \tag{1}$$

où $-F_0 + \mathrm{vect}(F_1, \ldots, F_n)$ est l'espace affine considéré (c'est sous cette forme que la plupart des outils numériques prennent ce problème). Il existe là aussi une formulation duale $\sup\{\ldots\}$, mais ici il peut exister un strict *écart de dualité* ($\sup\{\ldots\} < \inf\{\ldots\}$). Outre son utilisation en optimisation combinatoire, la programmation semidéfinie sert notamment à trouver des expressions de polynômes en sommes de carrés, ou en quotient de sommes de carrés, pour montrer leur positivité.

Les problèmes de programmation linéaire et semidéfinie peuvent se résoudre par des méthodes de *points intérieurs*. Rappelons que l'on cherche un optimum dans un convexe K (l'intersection du cône avec l'espace affine) ; voici maintenant l'idée de la méthode (chapitre 4). On choisit une fonction f strictement concave et suffisamment régulière, valant $-\infty$ sur le bord de K et des valeurs finies dans son intérieur ; les surfaces de niveau forment donc des « couches d'oignon » donnant, à la limite, la forme de K. Par optimisation numérique on trouve le maximum de f dans K (le « centre » de K). On s'intéresse ensuite aux « tranches d'oignon », c'est-à-dire aux intersections de K avec les plans $c^T x = \alpha$ où α varie ; on suit le chemin central, c'est-à-dire les centres des tranches, en faisant diminuer α. On arrive à l'optimum.

La programmation linéaire a depuis longtemps été appliquée à l'optimisation combinatoire. Un exemple classique est le *problème du voyageur de commerce* : on se donne un graphe dirigé où chaque arête (i, j) porte un coût c_{ij} (on peut prendre $c_{ij} = \infty$ pour les arêtes absentes) et on cherche un circuit de coût total minimal passant par tous les sommets (le problème tient son nom du cas où les sommets sont des villes et les coûts des temps de trajet, le voyageur de commerce souhaitant minimiser le temps nécessaire à visiter toutes les villes). Ce problème est NP-complet, même si l'on se restreint à des sommets placés dans un plan et à c_{ij} la distance euclidienne entre les sommets i et j ; on conjecture donc qu'il n'existe aucun algorithme polynomial pour le résoudre (la définition précise de problème NP-complet nous entraînerait trop loin ; il suffit de noter que la question de prouver qu'il n'existe pas d'algorithme polynomial pour eux est un des problèmes du millénaire de l'Institut Clay). Pourtant, en pratique, on le résout assez bien à l'aide de programmation linéaire en nombres entiers. On se donne des variables entières $0 \leqslant a_{ij} \leqslant 1$ signifiant si une arête est présente (1) ou non (0) dans le circuit, avec la contrainte que pour chaque nœud i_0, $\sum_j a_{i_0 j} = \sum_j a_{j i_0} = 1$ (le circuit rentre et sort une fois de chaque sommet), et on minimise $\sum_{i,j} a_{ij} c_{ij}$. Si la solution fournie est fractionnaire, on exclut celle-ci à l'aide de *coupes de Gomory-Chvátal*, c'est-à-dire des inégalités forcément satisfaites par toute solution entière. Il peut aussi arriver qu'on obtienne une solution entière définissant non pas un circuit, mais une union de circuits disjoints, auquel cas on rajoute une contrainte obligeant le circuit à franchir une des disjonctions rencontrées.

Ceci illustre bien certaines des techniques utilisées en optimisation combinatoire : on *relaxe* le problème discret, combinatoire, vers un problème d'optimisation en grandeurs continues, et même polyédrique (programmation linéaire) ; on résout celui-ci ; on rajoute au besoin des contraintes excluant des solutions parasites ; on impose que certaines variables soient entières à l'aide de coupes ou d'autres méthodes. L'ouvrage présente des méthodes de relaxation et d'approximation pour divers problèmes.

Un même problème peut se formuler de différentes façons, dont certaines peuvent produire un nombre très élevé de contraintes ; il est souvent rentable de rajouter des variables supplémentaires si cela permet de diminuer le nombre de contraintes. Il s'agit ici en quelque sorte d'inverser la projection d'un polyèdre (projeter un polyèdre peut résulter en un polyèdre avec un nombre de faces bien supérieur, exponentiel en le nombre de dimensions projetées). Les chapitres 7 et 8 discutent de méthodes systématiques, dites *lift and project*, pour obtenir ce genre de formulations en tirant partie du fait que certaines variables sont $\{0, 1\}$.

L'ouvrage de L. Tunçel balaie des sujets assez divers (méthodes de résolution de problèmes en programmation linéaire et semidéfinie, complexité algorithmique, formulation de certains problèmes de graphes, *lift and project*, représentation de certains problèmes comme sous-problèmes de la programmation semidéfinie...), le tout dans un format assez restreint. Autant dire qu'il n'a guère le temps de s'étendre didactiquement sur chaque sujet ; il s'agit d'un ouvrage destiné à un public déjà très averti.

David Monniaux,
CNRS (Laboratoire VERIMAG)

An Introduction to Measure Theory
TERENCE TAO,
American Mathematical Society, 2011, 206 p., ISBN 978-0-8218-6919-2, $53

Le livre de Terence Tao « An Introduction to Measure Theory » se compose de deux chapitres : l'un, très long (172 pages) sur la théorie générale de la mesure, l'autre nettement plus court contenant des compléments, essentiellement le théorème de Rademacher sur la différentiabilité presque partout des fonctions lipschitziennes et le théorème d'extension de Kolmogorov qui permet de construire des produits infinis d'espaces de probabilités et des processus stochastiques de lois prescrites.

On retrouve dans cet ouvrage le style, les qualités et les préoccupations pédagogiques, de T. Tao : les choses sont racontées et répétées, les fils conducteurs des preuves suivis jusqu'au bout, sans obsession de la brièveté, et la vision du sujet est *panoramique* et trahit l'envergure scientifique de l'auteur. La présentation (influencée par les ouvrages récents de Stein et Shakarchi, comme le dit lui-même T. Tao) est *géométrique.* Elle fait aussi constamment référence à un autre ouvrage de l'auteur (*An epsilon of Room, Vol.I*) qu'il vaut mieux avoir entre les mains si l'on veut lire cette introduction à la théorie de la mesure avec le maximum d'efficacité. En particulier, le lecteur est renvoyé à *An epsilon of Room, Vol.I* pour le théorème de représentation de Riesz (comparaison entre les points de vue ensembliste et fonctionnel).

Décrivons maintenant le contenu du nouvel ouvrage plus en détail :

1) Le très long « chapitre 1 » commence par poser le problème de la notion de mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$, avec comme point de départ les *ensembles élémentaires*, les unions finies de pavés, puis la mesure de Jordan d'une partie bornée quelconque, avec son caractère finiment additif et son lien avec la Riemann-intégrabilité. Les limitations de cette procédure conduisent naturellement à la « vraie » mesure de Lebesgue, et la différence fondamentale entre recouvrements finis et recouvrements dénombrables est bien amenée et commentée. On passe ensuite à la construction de l'intégrale et aux trois principes de Littlewood, illustrés notamment par les théorèmes d'Egoroff (toute convergence simple est uniforme à epsilon près) et de Lusin (toute fonction mesurable est continue à epsilon près). Á ce stade (nous en sommes au milieu du chapitre), T. Tao fait le bilan de ce qui précède, pour motiver l'introduction des algèbres de Boole et des mesure finiment additives (qui correspondent à Jordan) puis des sigma-algèbres et des mesures (qui correspondent à Lebesgue). Cela conduit inévitablement à un certain nombre de répétitions, assumées par l'auteur, et bien supportées par le lecteur. Les théorèmes fondamentaux (Beppo Levi, Fatou, Lebesgue) sont prouvés, ainsi que le théorème de Vitali sur la convergence en norme L^1 des suites de fonctions équiintégrables qui convergent en mesure. Le *point fort* de la suite est le traitement en quarante pages de la différentiation, avec les deux grands théorèmes de Lebesgue de dérivation des intégrales et d'intégration des dérivées (on se passerait d'une redémonstration des théorèmes de Rolle et des accroissements finis). La question est traitée à fond dans les méthodes (lemme du soleil levant, fonction maximale de Hardy-Littlewood, lemmes de recouvrement de Vitali et Besicovitch, lemme de Cousin) et dans les énoncés (fonctions monotones, à variation bornée, lipschitziennes, absolument continues, à plusieurs variables,...). Les preuves, par exemple celle de la formule fondamentale

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

si F est *partout* dérivable à dérivée Lebesgue-intégrable, ne sont délibérément pas toujours les plus courtes, au profit d'un « désossage » souvent plus instructif qu'un minimalisme glacé. Ce chapitre finit par une nouvelle conceptualisation : avec une trentaine de pages sur les prémesures, les mesures extérieures (et le théorème de prolongement de Carathéodory), les mesures produits finis et les théorèmes de Fubini.

2) Le chapitre 2 est nettement plus court. Il commence par une douzaine de pages « Problem Solving Strategies » (qui m'ont paru d'un intérêt discutable), et se poursuit avec le théorème de différentiation de Rademacher, très bien expliqué avec le théorème de Fubini et la formule d'intégration par parties

$$\int_{\mathbb{R}^d} D_v f(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) D_{-v} g(x) dx.$$

Enfin, l'auteur conclut par le théorème de compatibilité de Kolmogorov (avec une hypothèse topologique) qui contient la construction d'un produit infini d'espaces de probabilité.

Cet ouvrage sera lu avec grand profit par les étudiants à partir du L3, les agrégatifs, et les enseignants-chercheurs. Un point de forme m'a un peu chagriné, le mélange des genres entre exercices (sans doute trop nombreux, et parfois aussi dérangeants dans la lecture qu'une publicité télévisée pendant un bon film) et le cours. Certains de ces exercices m'ont paru moyennement intéressants (toute fonction lipschitzienne est uniformément continue mais la réciproque est fausse), d'autres (comme les lemmes de Besicovitch qui permet une inégalité maximale pour des mesures non-doublantes, et de Cousin, qui est la pierre de touche de l'intégrale de Kurwzweil-Henstock) très intéressants. Et Besicovitch en dimension un est facile à établir. Mais même si le lecteur est capable de « faire » ces exercices sur Besicovitch et Cousin, dommage que ces résultats fondamentaux ne figurent pas dans le cours, où ils sont utilisés ! J'aurais pour ma part préféré leur regroupement à la fin d'un paragraphe ou d'un chapitre, et qu'un certain nombre de propriétés dont la preuve est sans grand intérêt (comme les propriétés de la mesure de Jordan dans l'exercice 1.1.16) soient simplement énoncées comme des faits, dont la vérification est laissée au lecteur. Cette petite réserve de forme mise à part, on ne peut que recommander chaleureusement la lecture et l' achat du livre « An Introduction to Measure Theory » de Terence Tao !

Hervé Queffélec,
Université Lille 1

Le Théorème de Travolta
Olivier Courcelle,
Amazon, 2012 (Plon, 2002), 274 p., ISBN 978-2954222509, 4.99€(électr.), 11.99€(papier)

Cet ouvrage est une réédition électronique et papier (impression à la demande) du roman paru chez Plon en 2002 et qui était depuis longtemps épuisé. L'occasion, pour ceux qui ne l'avaient pas encore lu de se détendre en suivant le héros de l'histoire, Faroud, mathématicien raté (quoi que... !) au Congrès International des Mathématiciens à Genève. Il y rencontrera d'autres comparses, dont Jean-Jacques, qui tente de faire carrière dans le cobordisme homologique en dimension impaire, et le journaliste Uriel Muller, qui veut désespérément écrire un guide technique sur les mathématiques ! Mais grâce à l'intervention de Donovan, vieux routier des mathématiques, qui prend sous son aile Faroud, tout finira par s'arranger. Une lecture à recommander à tous ceux qui cherchent un moment de détente, après avoir trop fait de (vraies) maths !

Jean-Paul Truc