CARNET ET ÉLOGES

Vladimir Savelievich Buslaev

(1937 – 2012)

Ludvig Faddeev, Alexander Fedotov, Alexander Its, Ari Laptev,
Alexander Sobolev, Tatyana Suslina, Vitali Tarasov, Dmitri Yafaev

Vladimir Savelievich Buslaev, un mathématicien russe exceptionnel et l'un des leaders de l'école mathématique moderne de Saint-Petersbourg est décédé subitement le 14 mars 2012 à l'âge de 74 ans.

Dès ses années d'études, Buslaev a été associé au Département de Mathématiques et de Physique mathématique de l'Université d'État de Saint-Petersbourg. Il fut élève de O.A. Ladyzhenskaya et L.D. Faddeev. V.S. Buslaev a été membre de la faculté de Physique pendant cinquante ans et à la tête du Département les 12 dernières années.

Les centres d'intérêts et la variété des résultats de Buslaev furent remarquablement étendus. Ses travaux sur la théorie mathématique de la diffraction et la propagation des ondes, sur la théorie du scattering, sur les équations non-linéaires, sur les méthodes asymptotiques semi-classiques et adiabatiques, aussi bien que sur la théorie des équations aux différences à coefficients périodiques, ont été grandement reconnus par la communauté mathématique mondiale.

Le plus important résultat de Buslaev en théorie de la diffraction a été la justification rigoureuse de l'asymptotique à haute fréquence des ondes de scattering pour un obstacle convexe deux-dimensionnel. Pour parler de ce problème on doit mentionner un papier court mais très élégant dans lequel il déduit de manière heuristique ces asymptotiques au moyen d'une intégrale de Wiener.

Les travaux de Buslaev sur le scattering à longue portée et sur le scattering à plusieurs particules sont très connus. Avec V.B. Matveev, Buslaev a introduit la notion d'opérateurs d'onde modifiés, pour le cas de potentiels décroissant plus lentement que le potentiel de Coulomb. Il a obtenu plusieurs résultats profonds en théorie analytique du scattering à plusieurs particules. Avec S.P. Mercuriev il a obtenu les formules de trace, décrit les singularités de la matrice de scattering et trouvé les asymptotiques des fonction propres pour des systèmes quantiques à plusieurs particules.

V.S. Buslaev a été coauteur des célèbres formules de trace de Buslaev-Faddeev. Plus tard, après avoir développé les difficiles techniques très non triviales d'analyse adéquate, il généralisa ce résultat au cas multidimensionnel. V.S. Buslaev réalisa des travaux pionniers en théorie des équations non-linéaires notamment concernant le comportement en temps long des solutions de systèmes intégrables non linéaires. Avec V.V.Sukhanov il a mené à bien une analyse rigoureuse pour l'équation de

Korteweg-de Vries. Aussitôt après, en collaboration avec L.D. Faddeev et L.A. Takhtajan, il acheva l'interprétation hamiltonienne de la théorie du scattering pour cette équation. De plus, avec G.S. Perelman il a obtenu une série de résultats sur le scattering non linéaire et la stabilité asymptotique des solitons pour des équations d'onde générales. V.S. Buslaev a écrit de nombreux papiers bien connus sur l'analyse asymptotique. En particulier il développa une approche originale pour l'étude des asymptotiques des solutions d'équations de Schrödinger périodiques avec des perturbations adiabatiques. À l'aide de cette approche il obtint des résultats concernant les propriétés spectrales des électrons de Bloch dans des champs externes et l'asymptotique des résonances de Stark-Wannier (avec L.A. Dimitrieva et avec A. Grigis). Avec A.A. Fedotov, il développa une version de la méthode WKB complexe pour les équations aux différences dans le plan complexe, qui fut appliquée pour étudier les propriétés semi-classiques du spectre de l'équation de Harper. En collaboration avec A.M. Budylin, V.S. Buslaev obtint une série de résultats sur l'analyse semiclassique des opérateurs pseudodifférentiels à symboles discontinus dans les deux variables duales. Ces résultats furent alors appliqués à de nombreux problèmes de l'analyse asymptotique des équations différentielles intégrables et à des problèmes de physique statistique quantique et d'hydro- et aéro-dynamique. On doit aussi mentionner le papier de Buslaev sur la définition invariante de l'opérateur canonique de Maslov.

Plusieurs fois durant sa carrière mathématique V.S. Buslaev s'est intéressé aux problèmes de la diffraction et de la propagation des ondes. Il a consacré plusieurs papiers à la propagation du son dans l'océan. Ses résultats les plus connus dans ce domaine sont les formules des quatre rayons pour le champ du son près de la surface d'une mer profonde et la description du scattering des ondes soniques à haute fréquence par des anneaux synoptiques (structures adiabatiquement inhomogènes) dans l'océan (en collaboration avec A.A. Fedotov).

Pendant une longue période V.S. Buslaev, avec A.A. Fedotov, étudia les équations aux différences à coefficients périodiques sur la droite réelle et dans le plan complexe. Il considérait la méthode de monodromisation – une méthode de renormalisation qui fut développée au cours de ce travail – et les résultats correspondants comme une des plus importantes de ses réalisations.

Les papiers de Vladimir Savelievich Buslaev, ses idées et ses méthodes sont devenus le point de départ de nombreuses directions de recherche dans la physique mathématique moderne.

Beaucoup des étudiants de Buslaev sont devenus maintenant des mathématiciens bien connus. Il apprit à ses jeunes collègues à se concentrer sur des problèmes concrets non triviaux, à chercher les caractéristiques analytiques fondamentales de ces problèmes et à considérer le travail avec des formules comme central. De son point de vue, cette manière de penser fut une caractéristique principale de l'école mathématique de Saint-Petersbourg.

Vladimir Savelievich Buslaev était une personnalité extraordinaire. Ses idées et ses résultats entreront au patrimoine de la communauté mathématique pour un long avenir, et ses élèves et ses collègues se souviendront toujours de lui comme d'un brillant scientifique et d'un homme merveilleux.

Une version anglaise de cet article a déjà paru dans IAMP News Bulletin (avril 2012) auquel la Gazette exprime ses vifs remerciements.

Éloge de Paul Malliavin

prononcé à l'Académie des Sciences le 29 mai 2012

Jean-Michel Bismut

Madame,
Mesdames et Messieurs les membres de la famille de Paul Malliavin,
Mes chers confrères,
Mesdames, Messieurs,

Paul Malliavin est décédé à Paris le 3 juin 2010 dans sa quatre-vingt-cinquième année. Un mois auparavant, il avait participé à une conférence organisée en son honneur à Pékin. Il avait donné quatre exposés pendant son séjour, dont un exposé auquel j'ai pu assister, qui était intitulé *Canonical Brownian Motion on the Space of Jordan Curves*, où il rapportait sur l'un de ses derniers résultats, obtenu avec Hélène Airault et Anton Thalmaier. Paul Malliavin est ainsi resté actif et disponible jusqu'au bout.

C'est de sa vie et de son œuvre qu'il m'appartient de vous entretenir aujourd'hui. Paul Malliavin naît le 11 septembre 1925 à Neuilly. Son père était juriste, et sa mère médecin. Un oncle polytechnicien lui donne le goût des mathématiques, en lui enseignant des rudiments de trigonométrie et de balistique. Il hésitera d'ailleurs longtemps entre mathématiques d'une part, droit et économie d'autre part. Agrégé de mathématiques à 20 ans en 1946, après avoir suivi à la Sorbonne les cours d'Émile Borel et d'Élie Cartan, il interrompt ses études scientifiques pour obtenir en deux ans une licence en droit. Ayant reconnu que les mathématiques sont sa véritable vocation, il devient professeur de lycée à Nancy, tout en poursuivant sa formation à l'université de Nancy, où il côtoie Henri Cartan, Jean Dieudonné, et Jean Leray.

Sa vocation pour l'analyse s'affirme. Szolem Mandelbrojt lui propose l'étude d'un problème posé dans une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Mandelbrojt et Wiener [2] sur l'ensemble des zéros réels d'une fonction holomorphe dans le demi-plan droit, sous des conditions de croissance sur les parallèles à l'axe imaginaire. Dans sa thèse soutenue à l'université de Paris en 1954 et intitulée « Sur quelques procédés d'extrapolation », Paul Malliavin donne une solution complète du problème par une méthode de dualité totalement nouvelle. Cette thèse paraîtra en 1955 dans la revue *Acta Mathematica* [5].

Paul Malliavin est maître de conférences puis professeur à l'université de Caen de 1955 à 1962, Professeur à Orsay de 1962 à 1966, puis professeur à l'université de Paris à partir de 1967, dans la composante qui deviendra l'université Paris 6. Il enseigne également à l'École Polytechnique. Il est élu correspondant à l'Académie des Sciences en 1977, puis membre de l'Académie en 1979.

J'évoquerai devant vous son travail de mathématicien, ses contributions à la communauté scientifique, et sa participation à la vie de l'Académie des Sciences.

Paul Malliavin mathématicien

L'œuvre scientifique de Paul Malliavin est considérable. Elle touche à l'analyse réelle et complexe, à l'analyse harmonique, à la géométrie différentielle, aux équations aux dérivées partielles, à la théorie des probabilités qu'il contribue à révolutionner. Son œuvre se déroule sur 197 articles répertoriés aux *Mathematical Reviews*. Je n'en évoquerai ici que quelques aspects.

En 1959, Paul Malliavin [7, 8] résout un problème d'analyse harmonique posé par Beurling et Gelfand [1], la démonstration de l'impossibilité de la synthèse spectrale pour les groupes abéliens localement compacts qui sont non compacts. On veut savoir si certains espaces de fonctions peuvent être reconstruits à partir de fonctions de type exponentielle de Fourier, d'où le terme de « synthèse spectrale ». Dans le cas de $\mathbf{R}^3$, Laurent Schwartz [3] avait montré que la synthèse spectrale est impossible. Le contre-exemple donné par Paul Malliavin au problème général de la synthèse spectrale est obtenu par la construction d'une fonction très irrégulière, et par l'étude de son ensemble de zéros. Dans le compte rendu de l'article [7] dans les *Mathematical Reviews*, le mathématicien Carl Herz écrivait : *The result has been ardently sought for several years for the additive group of real numbers ; no progress at all has been made until this strikingly original work*. Le théorème de Malliavin a été redémontré plusieurs fois par des méthodes différentes [6, 10, 16].

En 1960 et 1961, à Princeton, Beurling et Malliavin développent ce qui est aujourd'hui connu sous le nom de « théorie de Beurling-Malliavin » [9, 11]. Ils y caractérisent certaines fonctions entières qui sont quotients de deux fonctions de type exponentiel, bornées sur la droite réelle, et calculent le rayon de totalité d'une suite de nombres réels ou complexes, autre question difficile d'analyse harmonique. Paul Malliavin considérait que son séjour à Princeton avait été l'une des périodes les plus heureuses de sa vie mathématique.

Les résultats évoqués précédemment placent Paul Malliavin au tout premier niveau parmi les analystes au plan international.

Paul Malliavin va s'intéresser à la théorie des probabilités, qu'il révolutionne dans ses concepts, et dans ses méthodes. Comprises comme une discipline de caractère expérimental à partir de la perception sensible du hasard interprété comme une réalité physique, les probabilités deviennent une théorie mathématique à part entière, à partir des bases posées en 1933 par Kolmogorov, qui les relient à la théorie de la mesure fondée par Lebesgue. Paul Lévy [4] avait réalisé le travail prodigieux d'étude à main nue de la trajectoire très irrégulière du mouvement brownien. Dans les années quarante et cinquante, Kyoshi Itô construit l'intégrale stochastique et le calcul différentiel stochastique, qui donnent un moyen de calculer tout aussi bien le long de ces trajectoires maximalement irrégulières que le long de courbes parfaitement lisses. Itô découvre également les équations différentielles stochastiques.

Paul Malliavin aborde la théorie des probabilités avec un triple bagage d'analyste harmonicien, d'analyste complexe et de géomètre. Il découvre qu'il est possible de faire de l'analyse sur l'espace des trajectoires du mouvement brownien, comme on le fait sur $\mathbf{R}$ ou sur une variété [13]. Aux solutions d'équations différentielles stochastiques de Itô, on peut appliquer un opérateur aux dérivées partielles en dimension infinie, l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck, de la même manière qu'on applique le laplacien aux fonctions sur $\mathbf{R}$, pour en déduire des formules d'intégration par parties. Ce nouveau calcul fonctionnel est aujourd'hui universellement connu sous le nom de calcul de Malliavin. Il est le pendant fonctionnel du calcul de Itô.

Paul Malliavin applique alors cette nouvelle machine à un problème de régularité (ou d'hypoellipticité) d'opérateurs aux dérivées partielles étudiés par Hörmander [12]. Il déduit cette régularité de l'inversibilité de la matrice de covariance de Malliavin, elle-même conséquence de l'irrégularité des trajectoires du mouvement brownien : le vice au service de la vertu !

Approfondissant les travaux d'Itô et Eells-Elworthy, Paul Malliavin utilise la méthode du repère mobile d'Élie Cartan pour donner une description intrinsèque du mouvement brownien géométrique [14]. Il suffit de munir la trajectoire brownienne d'un repère orthonormé qu'elle transporte parallèlement le long d'elle-même. La difficulté évidente est que cette trajectoire n'est nulle part différentiable, que le transport parallèle n'existe pas a priori... peu importe. Le calcul de Itô est là pour remédier à cette apparente contradiction. Paul Malliavin découvre les flots stochastiques, qui étendent aux équations de Itô une propriété des équations différentielles ordinaires. Il invente un principe de comparaison entre solutions d'équations différentielles stochastiques pour comparer entre elles des variétés différentes... Je m'arrête.

Il faut bien admettre qu'à la fin des années soixante-dix, le public capable de comprendre et de s'approprier un si grand nombre d'idées et de méthodes nouvelles, convoqué par la baguette d'un chef d'orchestre qui se jouait des difficultés de lecture de sa partition, se comptait sur les doigts d'une main. Il avait inventé, pour situer en anglais la place du fameux repère mobile qui accompagnait le mouvement brownien, le terme de *upstairs*, alors que le mouvement brownien lui-même se trouvait *downstairs*. Nous étions ainsi ballottés entre deux étages desservis par un mystérieux escalier, que son propriétaire pouvait, semblait-il, escamoter à son gré.

Il n'empêche : des probabilistes aux États-Unis, au Japon, en France, travaillent sur un sujet dont ils perçoivent la richesse, aidés et encouragés par Paul Malliavin. Il y a bien longtemps que cette bataille là, a été gagnée, en France et ailleurs.

Je devrais décrire aussi ses travaux sur l'analyse harmonique sur l'espace des lacets d'un groupe de Lie [15], et sur la construction d'un mouvement brownien à valeurs dans les difféomorphismes du cercle. Des considérations de théorie des représentations l'ont poussé jusqu'à la fin de sa vie à étudier ce problème. Dans un travail mené avec Hélène Airault et Anton Thalmaier [17], il venait d'achever la construction de la diffusion correspondante, qu'on peut interpréter comme un mouvement brownien à valeurs dans les courbes de Jordan dans le plan complexe. C'est à ce résultat qu'était consacré son exposé de Pékin en mai 2010.

Je passe aussi sur les applications qu'il avait données de l'analyse de Fourier et du calcul de Malliavin. La distinction entre mathématiques pures et appliquées ne l'intéressait guère.

Sur le plan mathématique, Paul Malliavin était un radical. Il avait été proche de Jean Dieudonné, Pierre Lelong, et Jean Leray. Des liens d'une vie avaient créé entre Jean-Pierre Kahane et lui une grande complicité. Plus récemment, il s'était rapproché de mathématiciens plus jeunes, tels Pierre-Louis Lions et Cédric Villani.

Il acceptait volontiers d'autres approches que la sienne aux problèmes qu'il avait abordés, voire aux théorèmes qu'il avait démontrés. J'ai retiré le sentiment que les mathématiques l'ont immensément amusé.

Paul Malliavin professeur, éditeur et académicien

Paul Malliavin aura eu de nombreux élèves et disciples en France et à l'étranger. La richesse des thèmes qu'il avait abordés fournissait à ceux qui en avaient la volonté et la capacité des sujets de recherche sans fin. Certains de ses élèves sont d'ailleurs devenus ses collaborateurs. Il avait compris que la transmission directe était le meilleur moyen de rendre accessibles les théories difficiles qu'il avait développées. Il aura ainsi été un grand voyageur. Il se sera rendu très souvent en Chine, contribuant à la création d'une école chinoise de probabilités, formant des jeunes mathématiciens chinois, dont certains sont devenus professeurs en France. Le fait que la conférence donnée à Pékin en son honneur ait été organisée conjointement par des mathématiciens allemands et chinois ne devait rien au hasard.

Paul Malliavin aura été aussi l'éditeur d'un journal, le *Journal of Functional Analysis*, qu'il aura fait vivre de bout en bout. Ce journal fut créé en 1967 sous la direction conjointe de Paul Malliavin, Ralph Philips, et Irving Segal, trois très fortes personnalités. Ce journal est devenu une référence pour les développements majeurs des mathématiques d'aujourd'hui. Paul Malliavin en est resté éditeur en chef jusqu'à son décès. Un volume du journal lui avait été dédié en 2008. Il aura également associé son nom à deux autres journaux : le Bulletin des Sciences Mathématiques, et le Journal de Mathématiques pures et appliquées.

Paul Malliavin était membre de l'Académie des Sciences depuis 1979. C'est peu de dire qu'il en était fier. Il s'était passionné pour les comptes rendus de l'Académie, et spécifiquement pour sa série mathématique. Il exprimait ses positions sur le sujet avec passion et une extrême fermeté. Il continuait à suivre les travaux des très jeunes mathématiciens, qu'il lisait attentivement, et dont il promouvait les œuvres.

Esprit rapide et brillant, il défendait ses points de vue avec énergie, n'hésitant pas à manier une ironie souvent allègre. Quand le besoin s'en faisait sentir, il pouvait utiliser les ressources de l'ancienne éloquence, avec d'autant plus d'efficacité que rien ne permettait d'en présager l'usage, ajouterais-je, particulièrement de la part d'un mathématicien. La place de la science dans la société le passionnait. Il déplorait la perte de pouvoir des ingénieurs au profit des financiers dans les entreprises nationales.

Face à la Seine, dans la Bibliothèque Mazarine qu'il faisait visiter à Michèle Vergne [18], il citait Richelieu : « Je regretterai la beauté de ces lieux dans l'au-delà ». Dans un petit bureau de l'Institut Henri Poincaré, où il m'est arrivé de le retrouver pour quelques heures, je pouvais recommencer l'histoire que je souhaitais lui raconter exactement au point où je l'avais laissée six mois auparavant, épiant ses réactions face aux turbulences d'objets qu'il avait découverts, dans un certain silence.

Il était membre de l'Académie des Sciences de Suède, de l'*Academy of Arts and Sciences*, et de l'Académie des Technologies, et docteur honoris causa de plusieurs universités étrangères, dont la *Scuola Normale* de Pise et la *Rheinische Friedrich-Wilhelms Universität* de Bonn. Il avait été membre du comité de la médaille Fields pour le Congrès Mondial de Mathématiques de 1982, tenu en 1983 à Varsovie.

Conclusion

Chez un mathématicien, l'œuvre écrite n'exprime qu'imparfaitement la stratification des savoirs, des espoirs et des doutes, à travers laquelle s'exprime sa personnalité scientifique. Paul Malliavin était une très forte personnalité, dans les mathématiques, et dans le monde.

Il nous appartient de saluer en Paul Malliavin la mémoire d'un très grand mathématicien, qui, dans la sphère qui était la sienne, aura changé le monde.

Références

[1] I. Gelfand. Ideale und primäre Ideale in normierten Ringen. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S.*, 9 (51) :41–48, 1941.

[2] S. Mandelbrojt et N. Wiener. Sur les fonctions indéfiniment dérivables sur une demi-droite. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 225 :978–980, 1947.

[3] L. Schwartz. Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 227 :424–426, 1948.

[4] P. Lévy. *Le mouvement brownien*. Mémor. Sci. Math., n^{o} 126. Gauthier-Villars, Paris, 1954.

[5] P. Malliavin. Sur quelques procédés d'extrapolation. *Acta Math.*, 93 :179–255, 1955.

[6] J.-P. Kahane. Sur un théorème de Paul Malliavin. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 248 :2943–2944, 1959.

[7] P. Malliavin. Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1959 :85–92, 1959.

[8] P. Malliavin. Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 248 :2155–2157, 1959.

[9] A. Beurling et P. Malliavin. On Fourier transforms of measures with compact support. *Acta Math.*, 107 :291–309, 1962.

[10] N. Varopoulos. Sur un théorème de M. Paul Malliavin. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 263 :A834–A836, 1966.

[11] A. Beurling et P. Malliavin. On the closure of characters and the zeros of entire functions. *Acta Math.*, 118 :79–93, 1967.

[12] L. Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.*, 119 :147–171, 1967.

[13] P. Malliavin. Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators. In *Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations (Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Kyoto, 1976)*, pages 195–263, New York, 1978. Wiley.

[14] P. Malliavin. *Géométrie différentielle stochastique*, volume 64 of *Séminaire de Mathématiques Supérieures [Seminar on Higher Mathematics]*. Presses de l'Université de Montréal, Montreal, Que., 1978. Notes prepared by Danièle Dehen et Dominique Michel.

[15] M.-P. Malliavin et P. Malliavin. Integration on loop groups. I. Quasi invariant measures. *J. Funct. Anal.*, 93(1) :207–237, 1990.

[16] J.-P. Kahane et Y. Katznelson. Sur un théorème de Paul Malliavin. *J. Funct. Anal.*, 255(9) :2533–2544, 2008.

[17] H. Airault, P. Malliavin, et A. Thalmaier. Brownian measures on Jordan-Virasoro curves associated to the Weil-Petersson metric. *J. Funct. Anal.*, 259(12) :3037–3079, 2010.

[18] M. Vergne. Malliavin et moi. *Gaz. Math.*, (126) :111–113, 2010.

Je remercie très vivement Madame Paul Malliavin pour les informations qu'elle a bien voulu me communiquer sur la vie et l'œuvre de Paul Malliavin.

Éloge de Poincaré

Cimetière du Montparnasse, 9 juillet 2012

Alain Chenciner

Mesdames, Messieurs, membres de la famille d'Henri Poincaré, représentants d'institutions ou de sociétés savantes, mathématiciens, philosophes, physiciens, journalistes, passants, curieux, poètes ... C'est un homme encore jeune, 58 ans, un homme en pleine possession de son génie, je le vois, assis à sa table de travail, une main posée sur le rebord, l'autre étendue sur la jambe légèrement repliée, le regard tourné vers l'intérieur, derrière le lorgnon, les cheveux légèrement hérissés, les sourcils relevés, si proche et si lointain, ... Cet homme, c'est à lui que je m'adresse aujourd'hui en votre nom, avec à la fois le respect que commande son ombre immense et la familiarité que produit un long commerce avec sa pensée, dont la force et la nouveauté sont, aujourd'hui encore, intactes.

Henri Poincaré, permets que je te dise « tu » ; après tout, tu es encore bien jeune ; et n'avons-nous pas fréquenté la même école où il est d'usage de s'appeler « cher camarade » ? Prononcer ton éloge ! Autant passer en revue une grande partie de la mathématique et de la physique du 20^{e} siècle et aussi les nouvelles technologies et la philosophie des sciences. Mais aucun tableau noir ici, pas de formules, pas même de figures pour honorer le géomètre. Il me faut donc essayer avec de simples mots de faire vivre les paysages que tu nous as fait découvrir, les continents que tu nous as donnés à explorer.

Tu es né le 29 avril 1854 à Nancy, dans une famille de la grande bourgeoisie lorraine. Ton père, Léon Poincaré, est neurologue et enseigne à la faculté de médecine ; ton oncle, Antoine Poincaré, est polytechnicien, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées ; Raymond Poincaré, qui sera Président de la République de 1913 à 1920, est un cousin ; ta femme, Louise Poulain d'Andecy, que tu épouseras en 1881, est apparentée par sa mère à Etienne Geoffroy Saint-Hilaire...

À seize ans, tu es confronté à la guerre, à l'occupation, et cela te marque profondément. Tes dons se manifestent avec un tranquille éclat dès l'adolescence. Paul Appell, ton compagnon en classe préparatoire, décrira la déjà déroutante concision des solutions que tu donnes aux problèmes proposés, allant droit au but tel un voyant, sans s'embarrasser d'explications intermédiaires. Tu choisis de rentrer à l'École Polytechnique, où tu as été reçu premier.

Heureuse époque pour les mathématiques à l'Ecole Polytechnique, si différente d'aujourd'hui. La tradition de Monge, Lagrange, Poisson, Fourier, Cauchy, est bien vivante. Quoiqu'en tous points opposé à ta forme d'esprit, Hermite, l'anti-géomètre qui a remplacé Bertrand, t'influence profondément par son cours d'analyse, qui fait la part belle aux équations différentielles. Célèbre en particulier pour sa preuve de la transcendance du nombre e, il inspirera tes études des formes quadratiques et ternaires. Hadamard a parfaitement décrit l'opposition de vos deux natures :

« Face à une découverte d'Hermite, on est enclin à dire :

– Admirable qu'un être humain ait pu parvenir à une manière de penser si extraordinaire !

Mais, lisant un mémoire de Poincaré, on dit :

– Comment se fait-il que l'on ne soit pas arrivé beaucoup plus tôt à des choses aussi profondément naturelles et logiques ? »

Ta première publication date de cette époque. Trace plus anecdotique de ton passage à l'X, un superbe diagramme envoyé à ta mère, qui décrit avec une parfaite précision l'évolution de ton rhume.

Sorti second, tu entres en octobre 1875 à l'École des Mines et es nommé en 1878 ingénieur à Vesoul.

En 1879, tu soutiens une thèse intitulée « Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles ».

L'un des lemmes de ta thèse est le début de la théorie des *formes normales*, c'est-à-dire de la recherche de changements de coordonnées locales qui rendent la plus apparente possible la géométrie de la situation.

Si la commission, composée de Jean-Claude Bouquet, Pierre-Ossian Bonnet et Gaston Darboux, est impressionnée par les résultats, elle critique cependant la rédaction, parfois obscure et imprécise. Ce sera un trait constant de tes écrits : ta pensée est trop rapide, tes intérêts trop multiples. Une fois acquis le résultat, tu n'as pas le temps de revenir sur ta rédaction pour la polir. D'autres problèmes t'occupent déjà. Darboux l'exprimera bien plus tard : « une fois au sommet, il ne revenait jamais sur ses pas ». Un bel exemple se trouve dans le paragraphe 341, chapitre XXIX, du volume 3 de tes *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, paru en 1899 : *« Jusqu'ici, quand j'ai dit, telle intégrale est minimum, je me suis servi d'une façon de parler abrégée, mais incorrecte, qui ne pouvait d'ailleurs tromper personne ; je voulais dire, la variation première de cette intégrale est nulle ; cette condition est nécessaire pour qu'il y ait minimum, mais elle n'est pas suffisante ».*

Géométrie, groupe, les maîtres mots ! Tu développes la théorie des fonctions fuchsiennes, vaste généralisation des fonctions elliptiques, dans le but explicite d'intégrer les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Mais c'est la découverte du lien étroit avec la géométrie non-euclidienne qui te permet d'atteindre le but. Les fonctions fuchsiennes te conduisent naturellement au théorème d'uniformisation. Si, en 1882, tu en annonces, ainsi que Klein, une démonstration, il faudra attendre 1907 pour que tu aies enfin, en même temps que Koebe, une démonstration complète de ce théorème qui, couronnant l'œuvre de Riemann, domine les mathématiques du 19e siècle.

L'année 1881, celle de ton mariage, est décidément miraculeuse. Remplaçant l'étude analytique locale dans le champ complexe (celle de Briot et Bouquet) par une étude qualitative globale dans le champ réel, tu bouleverses la théorie des équations différentielles et crées ce qu'on appelle aujourd'hui la *théorie des systèmes dynamiques*. Y figure par exemple ton « théorème de l'indice » affirmant que, pour un champ de vecteurs sur la sphère, le nombre de nœuds et de foyers est égal au nombre de cols augmenté de 2. Te rappelles-tu l'introduction de ton mémoire *Sur les courbes définies par une équation différentielle* ? *« Prenons, par exemple, le problème des trois corps : ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment ; si la distance de deux corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites ? Ne peut-on pas se poser mille questions*

de ce genre, qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps ? Et, si l'on considère un nombre plus grand de corps, qu'est-ce que la question de l'invariabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de géométrie qualitative, puisque, faire voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites. Tel est le vaste champ de découvertes qui s'ouvre devant les géomètres... »
Voici donc le moment où, à 27 ans, tu comprends que la connaissance analytique explicite d'une solution d'une équation différentielle peut n'apporter que très peu d'information effective sur le comportement du système qu'elle décrit.

Mais bientôt, tout en faisant des apports décisifs à l'arithmétique (formes quadratiques, forme automorphes) et à la géométrie algébrique (fonctions abéliennes), tu fais les premières incursions dans le domaine inexploré des fonctions de deux variables complexes (fonctions méromorphes, domaines d'holomorphie). Et comme dans les autres domaines, tes contributions sont fondamentales et créent de nouveaux champs de recherches.

Continuons. Que ce soit pour les équations différentielles, les fonctions algébriques de deux variables, les sous-groupes finis des groupes de Lie, tu as besoin de développer les outils qui permettent l'étude qualitative. Et, comme avait fait Riemann, tu les crées de toutes pièces. Texte fondateur de la topologie algébrique, ton *Analysis situs* paraît en 1895 ; en environ 100 pages, tu y introduis les concepts d'homologie, de nombres de Betti, de groupe fondamental, la caractéristique d'Euler-Poincaré, la dualité de Poincaré (théorie de l'intersection) ; c'est l'évolution des mathématiques dans tous les domaines qui s'en trouvera affectée. Tu énonces d'abord de façon fautive ta fameuse conjecture, démontrée un siècle plus tard par Perelman, qui caractérise homotopiquement la sphère de dimension trois parmi toutes les « variétés différentiables » de dimension 3. Mais tu donnes rapidement le remarquable contre-exemple d'une sphère d'homologie dont le groupe fondamental est le groupe du dodécaèdre.

La même année 1885, tu publies un texte fondamental sur les figures d'équilibre d'une masse fluide, étudiant les « bifurcations » associées aux changements de stabilité : de l'ellipsoïde de révolution de Mac Laurin à l'ellipsoïde à trois axes inégaux de Jacobi et enfin aux figures piriformes que tu viens de découvrir, qui elles-mêmes pourraient se scinder en deux masses inégales. George Darwin, le fils de Charles, pensera en déduire un mécanisme de formation de la Lune mais Liapunov, puis Jeans et enfin Elie Cartan montreront l'instabilité d'un tel scénario.

Tout aussi importante, ta découverte, deux ans plus tard, du *balayage* qui, fournissant une distribution de charges sur la sphère ayant même potentiel à l'extérieur qu'une distribution donnée à l'intérieur de la boule, permet dans beaucoup de cas de justifier le *principe de Dirichlet* et donc de résoudre des problèmes aux limites pour l'équation de Laplace, fondamentale pour l'attraction newtonienne, mais aussi en électricité et en magnétisme.

J'en viens à l'une des parties les plus importantes de ton œuvre, celle en tout cas que j'ai le plus pratiquée, la *Mécanique céleste* et plus particulièrement le *Problème des trois corps*. Si ta première note sur le sujet date de 1883, c'est dans les trois volumes des *Nouvelles méthodes de la mécanique céleste*, parus entre 1892 et 1899, et totalisant près de 1300 pages, que culminent tes recherches. Dans cet ouvrage extraordinaire, dont Painlevé a dit qu'il était l'œuvre qui porte peut-être la marque la plus profonde de ton originalité, tu développes le mémoire *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, qui t'avait valu le prix du roi de Suède en 1889. Combien de notions trouvent là leur origine : existence et stabilité des *solutions périodiques, solutions asymptotiques, exposants caractéristiques, invariants intégraux, solutions homoclines, application de premier retour*. Tu y démontres l'existence et la divergence des *séries de Lindstedt* tout en étant conscient de la possibilité que certaines des séries à fréquences fixées convergent, ce que démontrera Kolmogorov en 1954 ; tu y présentes les *invariants intégraux* comme les ersatz infinitésimaux de ces *intégrales premières* dont tu montres qu'il ne peut y en avoir d'autres que celles classiquement déduites des symétries du problème ; tu y démontres ton célèbre *théorème de récurrence* par une manipulation virtuose de ces probabilités continues dont Joseph Bertrand avait si peur. Ce qu'on nomme aujourd'hui (bien mal à mon avis) le *chaos déterministe* vient de là et des travaux d'Hadamard sur les géodésiques des surfaces à courbure négative, si joliment décrits par Pierre Duhem qui contemple les géodésiques s'enroulant autour des deux cornes d'un taureau. Mais le problème des trois corps, plus exactement le problème restreint qui t'a surtout occupé, par exemple le cas d'une petite planète troublée par Jupiter, ressemble au problème des *géodésiques* sur une surface proche d'une sphère, donc à courbure positive, et tu sais bien que ce cas est incommensurablement plus difficile que le cas de courbure négative traité par Hadamard.

Dans le mémoire original, la question principale était celle de la *stabilité*. Ce problème, tu réussis, en introduisant l'idée d'une *surface de section*, définie par les retours au périhélie, et en utilisant les invariants intégraux, à le ramener à l'étude de l'itération d'une application conservant les aires d'un domaine du plan dans lui-même. On connaît l'histoire de ton erreur, due peut-être à une trop fine analyse qui t'avait fait prendre pour nulle une quantité dont tu savais qu'elle était nulle à tous les ordres de la théorie des perturbations (on parle aujourd'hui de *splitting exponentiellement petit des séparatrices*). Mais on sait aussi que toute la théorie moderne des systèmes dynamiques conservatifs est sortie de cette erreur, décidément fort féconde. La théorie ergodique, en particulier, précise ton théorème de récurrence qui dit que, pour presque toutes les *conditions initiales*, un système dynamique conservatif dont l'espace des phases est de volume fini va repasser au cours du temps aussi près que l'on veut de sa condition initiale, et ce de façon répétée. C'est ce que tu as appelé *Stabilité à la Poisson*, allusion à l'absence au deuxième ordre de termes purement séculaires dans les demis grands axes planétaires, pour remplacer la stabilité perdue du Mémoire.

Le dernier article que tu publies concerne les solutions périodiques, cette *« seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable »*. Tu y montres l'importance de ce qu'on appellera ton *dernier théorème géométrique*, qui sera démontré deux ans plus tard par Birkhoff et peut être considéré comme l'ancêtre de la *Topologie symplectique*.

Combien d'idées que nous tenions pour récentes se trouvent déjà dans ces trois volumes ! C'est manifestement pour toi que les oulipiens ont créé le concept de *plagiaire par anticipation*.

Avec les équations différentielles, la théorie du potentiel, le problème des trois corps, nous sommes déjà dans la physique mathématique, que tu caractérises ainsi :

« En résumé le but de la physique mathématique n'est pas seulement de faciliter au physicien le calcul numérique de certaines constantes ou l'intégration de certaines équations différentielles. Il est encore, il est surtout de lui faire connaître l'harmonie cachée des choses en les lui faisant voir d'un nouveau biais. De toutes les parties de l'analyse, ce sont les plus élevées, les plus pures, pour ainsi dire, qui seront les plus fécondes entre les mains de ceux qui savent s'en servir. » (La valeur de la science, Chapitre 5)

Dans les quelques 15 volumes qui constituent la rédaction de tes cours de la Sorbonne, tu as passé en revue, que dis-je, tu as re-pensé l'ensemble des théories physiques de ton époque : *Thermodynamique, Électricité et optique, Théorie analytique de la propagation de la chaleur, Théorie mathématique de la lumière, Calcul des probabilités, Capillarité, Tourbillons, Figures d'équilibre d'une masse fluide, Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*... Et de plus, tu enseignais à l'École supérieure des Télégraphes, tu vulgarisais la TSF dans un petit livre élémentaire, tu écrivais en postface à la Monadologie de Leibniz une note sur les principes de la mécanique dans Descartes et dans Leibniz, tu supervisais en tant que président du Bureau des longitudes l'expédition du méridien de Quito, tu participais avec Rémy Perrier et Paul Painlevé à la rédaction d'un beau livre pour les enfants intitulé *Ce que disent les choses*. Mais comment faisais-tu ?

On a beaucoup discuté pour savoir si tu avais ou non inventé avant Einstein la *théorie de la relativité*. On s'accorde aujourd'hui sur le fait que tu en avais tout l'appareil mathématique ainsi que les bases conceptuelles : impossibilité de détecter le mouvement absolu, impossibilité d'une intuition directe de la simultanéité de deux événements ayant lieu dans des endroits différents. Ce serait en quelque sorte ta tendance au nominalisme qui t'aurait empêché de faire immédiatement le pas décisif rejetant définitivement l'éther. Mais Einstein lui-même n'est-il pas revenu à une forme abstraite d'éther ? Et le *groupe de Poincaré* est bien vivant !

Et n'oublions pas la philosophie. Je ne sais si l'on peut encore dire aujourd'hui, comme Frédéric Masson lors de ta réception à l'Académie française dans le fauteuil de Sully Prudhomme, que tu as « initié aux mystères de la haute philosophie scientifique la nation entière » – il est vrai que vendre en peu de temps 16 000 exemplaires d'un livre de philosophie des sciences n'est pas chose courante – mais c'est un fait que tes quatre livres, *La science et l'hypothèse, Science et méthode, La valeur de la science, Dernières pensées*, n'ont rien perdu de leur force conceptuelle. Bien loin d'une philosophie spontanée de savant, ils forment une philosophie des sciences construite et cohérente. Le passage suivant, sur la notion de groupe des déplacements, traduction de ton article *On the foundations of geometry* paru dans *The Monist* en 1898 illustre bien ton *conventionnalisme géométrique* : *« Quand l'expérience nous apprend qu'un certain phénomène ne correspond pas du tout aux lois indiquées, nous l'effaçons de la liste des déplacements. Quand elle nous apprend qu'un certain changement ne leur obéit qu'approximativement, nous considérons ce changement, par une convention artificielle, comme la résultante de deux autres changements composants. Le premier composant est regardé comme un déplacement satisfaisant rigoureusement aux lois dont je viens de parler, tandis que le second composant, qui est petit, est regardé comme une altération qualitative. Ainsi nous disons que les solides naturels ne subissent pas* *seulement de grands changements de position, mais aussi de petites flexions et de petites dilatations thermiques. »*

et en conclusion :

« Tout comme la catégorie de l'espace représentatif, le concept général de groupe est une forme de notre entendement et le groupe des déplacements relève d'une suite de décisions conventionnelles qui adaptent, dans un équilibre réfléchi, notre expérience à la catégorie : en résumé, les lois en question ne nous sont pas imposées par la nature, mais sont imposées par nous à la nature. Mais si nous les imposons à la nature, c'est parce qu'elle nous permet de le faire. Si elle offrait trop de résistance, nous chercherions dans notre arsenal une autre forme qui serait pour elle plus acceptable. »

Comme le résume Gerhardt Heinzmann : la construction de la réalité mathématique est à effectuer à partir de l'imagination de sensations ; cette construction doit être guidée par l'expérience ; l'expérience n'est pas suffisante, mais n'est que l'occasion de prendre conscience de certaines catégories de l'esprit avec lesquelles il faut faire concorder par décision (convention) notre expérience.

Il manque un mot ici, *beauté* ou *harmonie*, mais tu ne l'oublies pas, toi qui, dans l'introduction de *La valeur de la science*, écris

« Mais ce que nous appelons la réalité objective, c'est, en dernière analyse, ce qui est commun à plusieurs êtres pensants, et pourrait être commun à tous ; cette partie commune, comme nous le verrons, ce ne peut être que l'harmonie exprimée par des lois mathématiques.

C'est donc cette harmonie qui est la seule réalité objective, la seule vérité que nous puissions atteindre ; et si j'ajoute que l'harmonie universelle du monde est la source de toute beauté, on comprendra quel prix nous devons attacher aux lents et pénibles progrès qui nous la font peu à peu mieux connaître. »

Henri Poincaré, quel meilleur salut t'offrir que les mots que tu avais toi-même adressés à Halphen :

« Le savant digne de ce nom, le géomètre surtout, éprouve en face de son œuvre la même impression que l'artiste ; sa jouissance est aussi grande et de même nature. Si je n'écrivais pas pour un public amoureux de la Science, je n'oserais pas m'exprimer ainsi ; je redouterais l'incrédulité des profanes. Mais ici, je puis dire toute ma pensée. Si nous travaillons, c'est moins pour obtenir ces résultats positifs auxquels le vulgaire nous croit uniquement attachés, que pour ressentir cette émotion esthétique et la communiquer à ceux qui sont capables de l'éprouver. »

Cet éloge a été prononcé devant la tombe de Poincaré au cimetière du Montparnasse, le 9 juillet 2012, dans le cadre de la journée d'hommage organisée à l'observatoire de Paris `http://www.imcce.fr/poincare2012/`.
Il se trouve en ligne sur le site de l'IHP `http://www.poincare.fr/`.