Quelques souvenirs sur I.M. Gelfand

(1913 – 2009)

Alain Guichardet

Il me serait impossible de parler de I.M. Gelfand sans évoquer l'atmosphère qui régnait à Moscou à la fin des années 1950. J'y débarquai un beau jour de septembre 1958, accompagné de ma femme, aussi curieuse que moi de découvrir cette mystérieuse URSS, et muni du diplôme de Russe de l'École des Langues orientales. Staline était mort 5 ans auparavant, le très révolutionnaire 20e congrès du Parti communiste soviétique avait eu lieu en 1956, Khrouchtchev régnait depuis peu ; il n'avait pas encore eu le temps d'imposer l'ouverture appelée par la suite « le dégel », et la société soviétique vivait encore extrêmement repliée sur elle-même.

L'Université d'État de Moscou (*em-gué-ou*) était une véritable forteresse – l'un des 5 immeubles hauts et pointus construits à Moscou sous Staline – où l'on ne pouvait pénétrer que dûment muni d'un laissez-passer obtenu au prix d'une longue attente. Ledit immeuble renfermait des centaines de chambres d'étudiants, des restaurants, des salles de cours et de séminaires, ainsi que des pièces servant de bureaux aux diverses chaires d'enseignement.

Celle qui me concernait s'appelait *Mekh-Mat* (i.e. Mécanique et Mathématiques) ; elle consistait en une pièce où une secrétaire s'activait avec une machine à écrire, et une antichambre avec canapé et tableau noir où s'entretenaient des personnages aussi prestigieux que I.M. Gelfand, M.A. Naïmark, V.I. Arnold, R.A. Minlos, S.V. Fomin, G.E. Chilov... Je fus admis dans l'équipe de Gelfand au titre d' « aspirant », l'aspiranture étant une sorte de 3e cycle succédant aux cinq années d'études ; j'y devins ami avec un autre aspirant, A.A. Kirillov, qui devait, quatre ans plus tard, révolutionner la théorie des représentations unitaires des groupes de Lie par sa Méthode des Orbites. Je m'entretenais volontiers avec Mark Aronovitch (Naïmark) que je trouvais plus facile d'accès que Israïl Moisseievitch (Gelfand).

Le point d'orgue de toutes ces activités était le très fameux « Séminaire Gelfand », qui se tenait le lundi soir, commençant vers 19 heures et se terminant en principe vers 22 heures, mais parfois beaucoup plus tard. L'expression « commençait vers » est tout à fait adaptée : je revois Israïl Moisseievitch marchant interminablement dans le couloir, s'entretenant avec divers collègues et, probablement, organisant à ce moment-là le programme du séminaire. C'était un séminaire hautement pluridisciplinaire, dont l'intitulé de « Analyse fonctionnelle » reflétait mal la variété des sujets exposés. Lesquels sujets planaient en général très haut au dessus de ma tête ; je me souviens en particulier d'un exposé fait par Malgrange, de passage à Moscou, auquel je pus cependant servir convenablement d'interprète.

Trois ans plus tard, de retour à Moscou à l'occasion de l'exposition universelle qui comportait une section « mathématiques », je fus convié à faire un exposé au séminaire Gelfand ; ma thèse était assez avancée, et mon bagage mathématique un peu moins mince ; j'attendais avec appréhension le moment, non précisé à l'avance, de mon intervention ; Israïl Moisseievitch interrompait fréquemment la séance en priant les jeunes auditeurs d'expliquer certains passages des exposés qu'ils avaient entendus ; à un moment donné, il demanda aussi à Sacha (Kirillov) d'expliquer ce qu'étaient une catégorie et un foncteur... Après la fin de mon exposé, Israïl Moisseievitch me posa une question à laquelle je ne sus pas répondre, ce qui m'attira un cinglant *« vous ne savez pas de mathématiques »* .

Il n'en reste pas moins que mes conversations avec Israïl Moisseievitch et Mark Aronovitch m'ont été fort utiles ; alors que mes connaissances à l'époque se bornaient aux algèbres d'opérateurs dans les espaces hilbertiens, ils m'ont suggéré d'étudier les représentations unitaires des groupes, et en particulier celles d'un certain groupe discret – les groupes de cette espèce sont souvent les plus coriaces ! – qui, dans leur esprit, devaient conduire à des algèbres d'opérateurs plutôt exotiques – et y ont effectivement conduit.

Par la suite, j'ai revu Israïl Moisseievitch à plusieurs reprises, en particulier lors d'un séjour à Paris en 1975 (le « dégel » était passé par là !) durant lequel il fut nommé *doctor honoris causa* à l'Université Paris VI ; je le revis ensuite à Moscou lors d'un mien séjour en 1976 . Voici deux anecdotes qui montrent assez bien sa position vis à vis du régime soviétique : je lui avais proposé en 1975 de lui offrir le roman « Le docteur Jivago » de Pasternak alors introuvable en URSS pour des raisons idéologiques, proposition refusée très sèchement : *« Si je suis pris avec ce livre, je ne pourrai plus jamais aller à l'étranger »* . L'année suivante, son refus s'était changé en des regrets, regrets vite oubliés puisque je pus lui offrir Jivago que j'avais dans mes bagages. Ou encore, passant à pied devant l'Institut Steklov, haut lieu s'il en fut des mathématiques soviétiques et mondiales, il me dit : *« C'est un établissement fasciste »* ...

Après avoir évoqué mes rencontres avec l'homme I.M. Gelfand, je voudrais parler de mes rencontres avec une petite, malheureusement très petite, partie de son œuvre mathématique, que je diviserai en un petit nombre de rubriques.

Algèbres de Banach commutatives - Références [1] à [5]

Dans cette théorie, le résultat clef est le théorème dit de Gelfand-Mazur (Gelfand écrit qu'il a été démontré antérieurement par Mazur, par une méthode différente) : si une algèbre de Banach commutative complexe à unité est un corps, c'est le corps des complexes. Suivent toute une série de résultats et/ou de concepts très importants :

– Tout idéal maximal d'une telle algèbre A est le noyau d'un caractère, ou morphisme de A dans le corps des complexes.

– Le « spectre de Gelfand » de A est l'ensemble $\hat{A}$ des caractères de A, espace que l'on munit de la topologie de la convergence simple et qui est compact si A est à unité, localement compact en général.

– La « transformation de Gelfand » est l'application qui à tout a de A associe la fonction $\hat{a}$ sur $\hat{A}$: $\hat{a}(x) = x(a)$. On comprend maintenant que le modèle auquel on tente de ramener l'étude des algèbres de Banach commutatives à unité est l'espace des fonctions continues sur un espace topologique compact.

– Calcul fonctionnel holomorphe : pour une fonction holomorphe f, on définit $f(a)$ à l'aide de la formule de Cauchy adaptée à cette situation.

– Nouvelle démonstration d'un théorème de N.Wiener sur les séries trigonométriques : si une fonction périodique f qui ne s'annule pas est développable en une série trigonométrique absolument convergente, la fonction $1/f$ l'est aussi.

– Nouvel éclairage sur la théorie des groupes topologiques localement compacts commutatifs, en associant à un tel groupe l'algèbre des fonctions intégrables munie du produit de convolution ; l'objet dual d'un groupe G est ici l'espace $\hat{G}'$ des caractères de G, ou morphismes continus de G dans le tore S^1. Précisons que le théorème de dualité de Pontriagin date de 1934.

– Théorème de Gelfand et Naïmark (inclus dans la référence [8]) : si A admet une involution satisfaisant $||xx^*|| = ||x||^2$, la transformation de Gelfand est un isomorphisme. Ces algèbres ont été appelées « algèbres de Gelfand-Naïmark », puis C^*-algèbres (commutatives). On peut dire aussi que la catégorie des C^*-algèbres commutatives à unité est équivalente à celle des espaces topologiques compacts – idée que A.Connes met souvent au début de ses exposés : en abandonnant la condition de commutativité, on obtient la notion de « espaces topologiques non commutatifs ».

Algèbres de Banach (non nécessairement commutatives) Références [7], [8]

Ici le modèle auquel on essaie de comparer une algèbre de Banach quelconque est celui des algèbres d'opérateurs dans des espaces hilbertiens. On note $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés dans un espace hilbertien complexe $\mathcal{H}$, muni de l'involution qui transforme chaque opérateur A en son adjoint A^* ; on considère ensuite les sous-algèbres involutives de $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ fermées pour une certaine topologie, et c'est là qu'apparaissent des différences essentielles. Dès 1936, Murray et von Neumann, mus par des considérations de Physique Quantique, avaient établi une théorie très poussée des algèbres, dites « de von Neumann », fermées pour la topologie faible.

Celles, beaucoup plus générales, qui interviennent dans les travaux de Gelfand et Naïmark sont supposées seulement fermées pour la topologie de la norme des opérateurs ; on les a appelées « algèbres de Gelfand-Naïmark », puis C^*-algèbres. Le théorème fondamental de ces auteurs affirme qu'une algèbre de Banach munie d'une involution satisfaisant la condition $||xx^*|| = ||x||^2$, est isomorphe à une C^*-algèbre d'opérateurs. Ce résultat s'accompagne d'une étude des représentations des algèbres de Banach involutives (représentations irréductibles, formes linéaires positives,...), ainsi que de celles des groupes localement compacts généraux, fournissant une nouvelle preuve d'un résultat de Gelfand et Raïkov (cf .[6]) : tout groupe localement compact admet suffisamment de représentations unitaires irréductibles.

Représentations des groupes de Lie - Références [9] à [15]

La théorie des groupes localement compacts commutatifs étant désormais bien comprise, Gelfand et ses collaborateurs s'attaquent à celle des groupes de Lie non nécessairement commutatifs, l'objet dual d'un tel groupe G étant maintenant l'ensemble $\hat{G}$ des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de G, et le problème fondamental consistant à décrire ce dual le plus précisément possible. Ce problème avait été résolu dès 1931 (théorème de Stone et von Neumann) pour le groupe de Heisenberg qui joue un rôle fondamental en Physique quantique.

Gelfand et Naïmark commencent par examiner le plus petit groupe de Lie non commutatif : le groupe affine de R, dit aussi « groupe des transformations $ax+b$ » ;

c'est un groupe résoluble ; Gelfand et Naïmark décrivent entièrement l'ensemble $\hat{G}$ et ajoutent, un peu hâtivement, que « leurs méthodes peuvent aussi être appliquées, avec quelque modifications, à tous les groupes résolubles » ; en réalité, il aura fallu plus de vingt ans d'efforts (L. Pukanszky, M. Duflo et son école) pour obtenir une théorie satisfaisante des duaux des groupes résolubles.

Le cas nettement plus simple des groupes nilpotents, moins « noncommutatifs » que les groupes résolubles, a été résolu, non pas directement par Gelfand *et alii*, mais – et avec quel succès ! – par A.A. Kirillov, autre brillant mathématicien issu de l'équipe Gelfand, dont la « méthode des orbites » a suscité d'innombrables recherches ultérieures.

Une autre série de travaux, eux aussi promis à un bel avenir, concerne les groupes semi-simples non compacts, la théorie des groupes compacts étant connue depuis une vingtaine d'années (H.Weyl, E.Wigner). Gelfand et Naïmark commencent par le groupe $SL(2, C)$, assimilé dans [10] au groupe de Lorentz à 4 dimensions d'espace-temps, qui lui est localement isomorphe. On voit apparaître dans cette étude un grand nombre de notions qui allaient jouer des rôles essentiels pendant les années à venir (mentionnons, pour ne citer qu'eux, les travaux d'Harish-Chandra) : diverses décompositions d'un groupe G en produits de sous-groupes (décompositions de Gelfand-Naïmark, de Bruhat,...), séries principales et complémentaires de représentations avec leurs caractères, décomposition de la représentation régulière en représentations irréductibles, *alias* formule de Plancherel,...

Après $SL(2, C)$, Gelfand et Naïmark passent à $SL(n, C)$, mais, là, leur liste de représentations unitaires irréductibles est incomplète ; vingt ans plus tard E. Stein proposera une liste élargie dont D.Vogan montrera en 1986 qu'elle est complète. Ils examinent ensuite les groupes complexes classiques, puis Gelfand et Graev étudient les groupes de Lie semi-simples réels $SL(n, R)$; ce cas est nettement plus compliqué que celui des groupes complexes, comportant notamment des séries de représentations qui n'apparaissent pas dans le cas complexe ; précisons que le groupe $SL(2, R)$ avait été traité en 1947 par V. Bargmann (c'est aussi un groupe de Lorentz à isomorphisme local près !). Là encore Vogan a apporté une solution . Ajoutons que la description du dual des groupes de Lie semi-simples complexes a été achevée par D.P. Jelobenko, autre collaborateur de I.M. Gelfand, mais que le cas des groupes de Lie semi-simples réels n'est pas encore complètement résolu (en 2009).

Représentations de G^X - Références [16], [17]

Je voudrais terminer cette notice sur I.M. Gelfand en parlant d'un sujet qui m'avait intéressé au point que j'en avais tiré une courte note parue dans la *Gazette des mathématiciens*, n° 4 en 1975, ainsi qu'un exposé au *Séminaire Bourbaki*, n° 486.

Verchik, Gelfand et Graev étudient ici les représentations d'un type très particulier de groupes de dimension infinie : disons, pour fixer les idées, le groupe G^X des applications boréliennes d'un espace borélien X dans un groupe localement compact G ; ils construisent des représentations irréductibles de G^X par une méthode qui s'applique en particulier au cas où G est l'un des groupes de Lie $SO_0(n, 1)$, $SU(n, 1)$; leur construction a pour point de départ une représentation irréductible

U de G et un 1-cocycle de G à valeurs dans l'espace hilbertien de U. P. Delorme a rédigé une démonstration complète de l'irréductibilité de la représentation de G^X ; elle repose essentiellement sur le fait que le 1-cocycle de départ n'est pas un cobord, ce qui suppose évidemment que le groupe de cohomologie $H^1(G, U)$ est non nul. Or P. Delorme a démontré que les groupes $SO_0(n, 1)$, $SU(n, 1)$ sont les seuls groupes de Lie simples (à isomorphisme local près) admettant une représentation unitaire irréductible U avec $H^1(G, U)$ non nul. Delorme et moi avons alors pensé que Gelfand pressentait ce résultat, mais il nous a dit qu'il l'ignorait...

J'ajouterai que l'une des raisons qui confèrent un très grand intérêt à la construction de Verchik, Gelfand et Graev est qu'on peut la rattacher à la notion de « produit tensoriel continu » d'espaces hilbertiens – la représentation de G^X est en un certain sens un produit tensoriel continu de représentations de G –, notion dont les propriétés fondamentales ont été établies par H. Araki et E.J. Woods dans leur article Complete boolean algebras of type 1 factors (1966). Verchik, Gelfand, Graev ont par la suite construit des représentations unitaires irréductibles de G^X lorsque G est un groupe semi-simple compact, cas où la construction précédente ne s'applique pas puisque ici $H^1(G, U)$ est toujours nul (références [18], [19]).

J'arrête ici cette courte liste de rencontres avec I.M. Gelfand et son œuvre mathématique ; faute de compétence, je ne peux qu'espérer que d'autres que moi souhaiteront exposer des sujets tout aussi importants que ceux abordés ici : équations différentielles et physique mathématique, représentations de longueur finie de groupes de Lie, algèbres enveloppantes, cohomologie de diverses algèbres, ou de variétés, construction explicite de bases (dites « à la Gelfand-Tsetlin ») pour les représentations de dimension finie des groupes classiques, etc, etc. Et, pour conclure, je ne pourrais mieux faire que citer le bel hommage rendu à Gelfand par B. Kostant à la fin du dernier tome des œuvres complètes : *« It seems to me to be a correct assessment to say that I.M. Gelfand has produced seminal papers in more areas of mathematics than any other mathematician, certainly in the latter half of this century »* .

Bibliographie sélective de I.M. Gelfand

Les références qui suivent sont tirées des œuvres complètes de I.M. Gelfand (Springer Verlag, 1987).

[1] *On normed rings*. Dokl. Akad. Nauk, 23, (1939), 430-432.

[2] *To the theory of normed rings II*. Dokl. Akad. Nauk, 25, (1939), 570- 572.

[3] *On the theory of characters of commutative topological groups* (avec D.A. Raïkov). Dokl. Akad. Nauk, 28, (1940), 195-198.

[4] *Normierte Ringe*. Mat. Sb., 9(51), (1941), 3-23.

[5] *Commutative normed rings* (avec D.A. Raïkov et G.E. Chilov), Usp. Mat. Nauk, 1 (2), (1946), 48-146.

[6] *Irreducible unitary representations of locally bicompact groups* (avec D.A. Raïkov), Mat. Sb., 13 (55), (1942), 301-316.

[7] *On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space* (avec M.A. Naïmark). Mat. Sb., 12 (54), (1942), 197-213.

[8] *Normed rings with an involution and their representations* (avec M.A. Naïmark). Izv. Akad. Nauk, 12, (1948), 445-480.

[9] *Unitary representations of the group of linear transformations of the straight line* (avec M.A. Naïmark). Dokl. Akad. Nauk, 55, (1947), 567-570.
[10] *Unitary representations of the Lorentz group* (avec M.A. Naïmark). Izv. Akad. Nauk, 11, (1947), 411-504.
[11] *On unitary representations of the complex unimodular group* (avec M.A. Naïmark). Dokl. Akad. Nauk, 54, (1946), 195-198.
[12] *Complementary and degenerate series of representations of the complex unimodular group* (avec M.A. Naïmark). Dokl. Akad. Nauk, 58, (1946), 1577-1580.
[13] *The principal series of irreducible representations of the complex unimodular group* (avec M.A. Naïmark). Dokl. Akad. Nauk, 56, (1947), 3-4.
[14] *Unitary representations of classical groups* (avec M.A. Naïmark). Tr. Mat. Inst. Steklov, 36, (1950), 1-288.
[15] *Unitary representations of real unimodular group* (Principal non-degene rate series) (avec M.I. Graev). Izv. Akad. Nauk, 17, (1952), 189-249.
[16] *Irreducible representations of the group G^X and cohomologies* (avec A.M. Verchik et M.I. Graev). Funkt. Anal. Priloj., 8(2), (1974), 67-69.
[17] *Representations of the group $SL(2, R)$ where R is a ring of functions* (avec A.M. Verchik et M.I. Graev).Usp.Mat. Nauk, 28(5), (1973), 82-128.
[18] *Representations of the group of smooth mappings of a manifold into a compact Lie group* (avec A.M. Verchik et M.I. Graev). Compos. Math., 35 (1977), 299-334.
[19] *Representations of the group of functions taking values in a compact Lie group* (avec A.M. Verchik et M.I. Graev). Compos. Math., 42, (1981), 217- 243.

Photographie prise lors d'un repas chez A.Guichardet, en 1975.
De gauche à droite : Mme Schwartz, Laurent Schwartz, Hélène Guichardet (12 ans), I.M.Gelfand en train de poser une colle à Hélène, Jacques Dixmier, Mme Guichardet (debout).