LIVRES

Suites de Sturm, indice de Maslov et périodicité de Bott

J. Barge, J. Lannes

Birkhäuser Verlag, 2008. 199 p. ISBN : 978-3-7643-8709-9. 63,19 €

Comme le titre le suggère, cet ouvrage établit de nouvelles démonstrations des théorèmes de périodicité de Bott en K-théorie topologique et algébrique en utilisant la théorie des suites de Sturm et un morphisme dont la définition est inspirée par l'indice de Maslov.

Dans un article publié aux « Annals of Mathematics » en 1959, Raoul Bott calcule les groupes d'homotopie stable des espaces BU et BO. Ici et ci-dessous, U, O et Sp sont respectivement les groupes unitaire, orthogonal et symplectique infinis classiques, et B est le foncteur « espace classifiant ». Notons Ω le foncteur qui associe, à un espace topologique pointé, l'ensemble des lacets dans cet espace, muni d'une topologie convenable, et considérons les entiers relatifs $\mathbf{Z}$ comme espace topologique discret. Alors, Bott établit en particulier les équivalences d'homotopie $\Omega^2(BU \times \mathbf{Z}) \simeq BU \times \mathbf{Z}$, $\Omega^4(BO \times \mathbf{Z}) \simeq BSp \times \mathbf{Z}$ et $\Omega^4(BSp \times \mathbf{Z}) \simeq BO \times \mathbf{Z}$. Les calculs de Bott impliquent que la K-théorie complexe (resp. réelle), qui est une « théorie de cohomologie généralisée » et donc en particulier un foncteur $\mathbf{Z}$-gradué sur les espaces topologiques, est 2- (resp. 8-) périodique. La périodicité admet donc une reformulation géométrique, à savoir une comparaison des fibrés vectoriels complexes (resp. réels) sur un espace X avec les fibrés vectoriels complexes (resp. réels) sur l'espace $X \times S^2$ (resp. $X \times S^8$).

Ces théorèmes de périodicité comptent parmi les résultats les plus importants de la topologie algébrique du siècle dernier. Ils ont connu des réincarnations dans d'autres domaines mathématiques. Par exemple, en géométrie algébrique, suivant Morel et Voevodsky, la périodicité complexe correspond à un théorème de Quillen sur la K-théorie algébrique de la droite projective, tandis que les travaux de Karoubi et de l'auteur de cette note fournissent une version de la périodicité réelle en géométrie algébrique. Ces résultats algébriques sont d'ailleurs exprimés de la façon la plus nette (et la plus belle !) dans le langage de la théorie de l'homotopie motivique des schémas, établi par Morel et Voevodsky il y a quelques années.

Il y a beaucoup de démonstrations de la périodicité de Bott et de ses généralisations. Dans un article publié aux « Annales de l'ÉNS » en 1991, Latour donne une liste de quatre démonstrations différentes dans le cadre de la topologique classique, pour y ajouter une cinquième qui repose sur l'étude des lagrangiens transversaux. C'est cette démonstration de Latour qui a fortement influencé la démonstration d'un des résultats principaux du livre de Barge et Lannes, à savoir le Théorème 4.2.10 : *Soit R un anneau régulier dans lequel 2 est inversible. Alors les applications*

$$I : (\pi_0\mathcal{F})(R) \to (\pi_0\Omega\mathcal{L})(R) \quad et \quad Mas : (\pi_0\Omega\mathcal{L})(R) \to (\pi_0\mathcal{F})(R)$$

définies ci-dessous sont des isomorphismes de monoïdes abéliens inverses l'un de l'autre. Disons tout de suite que ici, π_0 et Ω ne désigneront pas les foncteurs habituels sur les espaces topologiques mais des variantes algébriques naïves définies pour les foncteurs de la catégorie des anneaux vers la catégorie des ensembles pointés. Par exemple, un élément dans $\Omega\mathcal{L}(R)$ est par définition un élément dans $\mathcal{L}(R[t])$ qui est le point de base si on l'évalue à $t = 0, 1$. Sans définir les foncteurs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{F}$, disons simplement que les foncteurs $\pi_0\Omega\mathcal{L}$ et $\pi_0\mathcal{F}$ sont essentiellement les foncteurs ${}_{-1}U_1$ et ${}_1V_0$ de Karoubi, définis explicitement à partir des formes bilinéaires (anti-)symétriques. Par exemple, ${}_1V_0(R)$ est le quotient du monoïde des classes d'isomorphie des triplets (L, q_0, q_1) avec L un R-module projectif de type fini et q_0, q_1 deux formes bilinéaires non dégénérées sur L, par la relation $(L, q_0, q_1) + (L, q_1, q_2) \sim (L, q_0, q_2)$.

Bien sûr, les isomorphismes du théorème font penser aux isomorphismes que l'on obtient en appliquant π_0 à l'équivalence $\Omega_{-1}\mathcal{U}(R) \simeq {}_1\mathcal{V}(R)$ du théorème fondamental de Karoubi sur la K-théorie hermitienne (publié également aux « Annals of Mathematics », en 1980). Chez Karoubi, la définition des morphismes est très différente, donnée par certains cup-produits. La construction très élégante de Barge et Lannes du morphisme *Mas* et l'étude de ses propriétés est un des points clé de leur livre. La terminologie fait référence à l'indice de Maslov topologique qui induit un isomorphisme $\pi_0\Omega(U/O) \cong \mathbf{Z}$, ce qui est une conséquence de la version topologique réelle du théorème 4.2.10 ci-dessus. Ce théorème est seulement un des huit isomorphismes de Bott algébriques naïfs, les sept autres étant établis dans le chapitre 6. Bien que – comme le point de vue motivique mentionné plus haut le suggère – il faille considérer deux cercles différents S^1 et $\mathbf{G}_m$ dans ce cadre algébrique, les énoncés et leurs démonstrations dans ce chapitre n'ont pas besoin de la machine motivique. La comparaison précise entre ces théorèmes de périodicité algébrique de Barge et Lannes et les théorèmes de Karoubi et motiviques est une des questions qui restent à explorer. Notons d'ailleurs que l'ouvrage de Barge et Lannes contient également des variantes topologiques (complexes et réelles) du théorème 4.2.10.

Vue la diversité des constructions et résultats dans ce livre remarquable, il nous est impossible d'en donner une liste complète. Parmi les autres théorèmes de cet ouvrage, citons seulement la description du conoyau du morphisme $H_2(EGL(R)) \to H_2(ESp(R))$ comme sous-groupe de ${}_1V_0(R)$ pour tout anneau R, ce qui donne une variante de certains résultats de Sharpe.

Quelques mots sur le rôle des suites de Sturm. Par définition, une suite de Sturm sur un R-module libre L est une suite finie, disons $\underline{q}$, de formes bilinéaires symétriques alternativement définies sur L et $L^* = Hom_R(L, R)$; à une telle suite est associé un automorphisme symplectique "élémentaire" $E(\underline{q})$ de l'espace hyperbolique $H(L)$. Les propositions cruciales 2.2.4 et 3.1.1 fournissent, explicitement en fonction de $\underline{q}$, un R-module libre L' et un lagrangien de $H(L \oplus L')$ qui est à la fois transverse à $E(\underline{q}) \cdot (L \oplus L')$ et à $L^* \oplus L'^*$. Ceci est l'ingrédient principal pour démontrer que l'indice de Maslov *Mas* est bien défini.

Ce livre agréable à lire s'adresse surtout à tous les mathématiciens qui s'intéressent à la K-théorie topologique, algébrique ou hermitienne, et plus généralement à la topologie algébrique ou aux formes hermitiennes et leurs lagrangiens. Comme il est plus ou moins « self-contained », supposant connus seulement quelques notions et résultats élémentaires d'algèbre, il peut aussi être lu et compris par les mathématiciens qui travaillent dans d'autres domaines. Ce livre contient une introduction très bien rédigée, avec d'abord une motivation générale sur la théorie de Sturm, ensuite une esquisse de la démonstration du théorème 4.2.10 ci-dessus, un plan du livre et enfin des conseils de lecture pour le lecteur pressé. On regrette toutefois l'absence d'un index.

Jens Hornbostel,
Université de Bonn

Mon cabinet de curiosités mathématiques
I. Stewart, L. Decréau et A. Truchet (Trad.)
Flammarion, 2009. 374 p. ISBN : 978-208-1225343. 63, 20 €

L'ouvrage de Ian Stewart prend la forme d'un recueil de 178 chapitres très courts (entre quelques lignes et quelques pages). Chaque chapitre traite d'un nouveau sujet, d'une nouvelle curiosité mathématique pour reprendre la terminologie de l'auteur. Ces curiosités sont largement indépendantes les unes des autres, de telle façon qu'il est possible – et même conseillé – de ne pas lire le livre linéairement, mais au contraire de l'ouvrir au hasard et d'y découvrir à chaque fois une nouvelle surprise. Vous l'aurez compris, les curiosités mathématiques que nous offre Ian Stewart sont extrêmement variées. Voici un petit éventail des richesses que l'on trouve dans ce livre.

– Des énigmes logiques ou mathématiques, certaines relativement classiques et d'autres plus originales. Par exemple, connaissez-vous le problème suivant, dit des maris jaloux : « Trois maris jaloux accompagnés de leurs femmes doivent traverser une rivière. Ils trouvent une barque qui ne peut accueillir que deux passagers à la fois. Comment s'y prendre pour que tout le monde traverse la rivière sans qu'une femme ne se retrouve jamais avec un homme hors de la présence de son mari ? ». À votre sagacité...

– Des « tours de magie » dont le but est souvent d'illustrer certaines propriétés topologiques surprenantes au premier abord. Par exemple, sauriez-vous comment vous y prendre pour retirer une ficelle (topologiquement équivalente à un cercle) enroulée (une fois) autour de votre bras sans sortir la main de la poche de votre pantalon ?

– Des explications sur certaines règles ou certaines conventions des mathématiques que, souvent les gens connaissent sans pour autant savoir d'où elles viennent : pourquoi ne peut-on pas diviser par 0 ? pourquoi moins par moins, ça fait plus ? *etc.*

– Des présentations sommaires de théories mathématiques modernes ou des conjectures encore ouvertes. Ian Stewart nous offre ainsi quelques essais sur le théorème des quatre couleurs, sur le théorème de Fermat, sur l'hypothèse de Riemann, sur le problème de la fourmi de Langton, sur les fractales et leurs applications à la construction d'antennes de téléphones portables... et encore bien d'autres choses. S'il arrive que vous vous sentiez démuni lorsque l'on vous demande « Mais à quoi ça sert ? », il est possible que ce livre vous donne quelques éléments de réponse.

– Et aussi, en vrac : des syllogismes à démêler, des blagues mathématiques à comprendre, des anecdotes concernant des mathématiciens célèbres qui contredisent souvent des préjugés classiques (comme, par exemple, le fait qu'un mathématicien est nécessairement un expert en calcul mental), de brèves explications sur la vie des mathématiciens et plus généralement de la communauté mathématique d'aujourd'hui (pourquoi n'y a-t-il pas de prix Nobel de mathématiques ? qu'est-ce que le prix Abel ?)

Malgré cette foultitude de sujets, le livre possède une forte cohérence interne qui est notamment incarnée par le retour récurrent de certaines thématiques ou de certains protagonistes. Également, lorsque cela a un sens, l'auteur n'hésite jamais à replacer le problème qu'il évoque dans un contexte historique donnant par là-même une dimension supplémentaire à son texte.

Les solutions de toutes les questions posées au fil des chapitres sont regroupées à la fin du livre. Même si vous avez résolu le problème, je ne saurais trop vous conseiller d'aller voir la solution « officielle » d'une part car elle peut évidemment être différente de la vôtre, mais d'autre part, également, car elle est parfois complétée par des remarques ou des prolongements intéressants.

En un mot, ce livre incarne une nouvelle fois le talent de Ian Stewart en matière de vulgarisation scientifique. Son style alerte et ludique traduit de façon magistrale son enthousiasme et son émerveillement à découvrir et à faire partager les mathématiques. La diversité des thèmes abordés, pourtant tous choisis méticuleusement, reflète quant à elle la vaste culture et le recul de l'auteur. Elle contribue en outre à rendre l'ouvrage passionnant pour tous les publics : les mathématiciens professionnels, de même que les écoliers, trouveront dans ces pages, j'en suis persuadé, de quoi les intéresser. À mettre sans hésiter entre toutes les mains, donc.

Xavier Caruso,
Université Indépendante de Moscou