Sur la dynamique des solitons : stabilité, collision et explosion

Yvan Martel[1] et Pierre Raphaël[2]

Les solitons sont au cœur de la modélisation de nombreux phénomènes physiques : propagation d'ondes en mécanique des fluides, formation de faisceaux lasers en optique non-linéaire, dynamique des galaxies en astrophysique, etc. La compréhension mathématique de ces objets et de leur rôle dans la description des dynamiques d'ondes non-linéaires est depuis les années 60 un sujet de recherche extrêmement actif qui met en œuvre des points de vue très divers : théorie classique des équations aux dérivées partielles (théorie des EDP elliptiques et de l'intégrabilité complète), analyse fonctionnelle et analyse harmonique, théorie des systèmes dynamiques (théorie des perturbations, fonctionnelles de Liapounov), des ingrédients classiques de la physique mathématique (analyse spectrale), ainsi que des contributions importantes de l'analyse numérique.

L'objectif de ce texte est de présenter un aperçu de certaines problématiques modernes liées à l'étude des solitons allant de résultats classiques d'existence et de stabilité à des résultats plus récents de stabilité asymptotique, collision et explosion, issus principalement de travaux récents des deux auteurs en collaboration avec Frank Merle (Université de Cergy-Pontoise et IHÉS).

1. Solitons et propagation d'ondes non-linéaires

1.1. Solitons et équation de Schrödinger non-linéaire

Les solitons ou ondes solitaires sont au centre de la description de la propagation d'ondes non-linéaires et ont surgi historiquement dans des domaines de la physique très divers allant de la mécanique des fluides à l'optique non-linéaire et la physique des plasmas en passant par l'astrophysique. Ils correspondent à des objets non-linéaires exceptionnels pour lesquels se compensent exactement deux processus physiques génériques : la dispersion et la concentration.

Prenons par exemple la propagation d'un faisceau laser dans un milieu non-linéaire, typiquement une fibre optique supposée transporter un signal électromagnétique sur de longues distances. Deux phénomènes dominants entrent en jeu : la dispersion, c'est-à-dire de façon schématique la propension du faisceau à s'étaler en espace comme il le ferait dans le vide, et la concentration, conséquence de l'interaction du milieu et de l'onde qui tend à focaliser les rayons. La dispersion permet la propagation du faisceau, la focalisation permet de confiner cette propagation au centre de la fibre optique. Partant des équations de Maxwell, la recherche de solutions de type onde plane se propageant dans une direction donnée aboutit

[1] Université de Versailles-Saint-Quentin-en-Yvelines et Institut Universitaire de France
[2] Université Paul Sabatier Toulouse

dans certains régimes au modèle simplifié de Schrödinger non-linéaire gouvernant l'équation de l'enveloppe de l'onde, [37] :

$$(1) \qquad \text{(NLS)} \quad \begin{cases} i\partial_t\psi + \Delta\psi + \psi|\psi|^2 = 0, \\ \psi(0,x) = \psi_0(x), \end{cases} \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \quad \psi(t,x) \in \mathbb{C},$$

où typiquement $N = 1, 2, 3$ dépendant de la modélisation physique. La variable de « temps » t correspond en réalité dans la modélisation physique à la direction de propagation de l'onde. D'un point de vue mathématique, la dispersion est associée à l'équation de Schrödinger linéaire :

$$(2) \qquad \text{(LS)} \quad i\partial_t\psi + \Delta\psi = 0,$$

qui conserve la masse totale de l'onde :

$$\forall t \geqslant 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\psi(t,x)|^2 dx = \int |\psi_0(x)|^2 dx,$$

mais disperse le paquet d'ondes, ce que l'on peut mesurer par exemple via la décroissance locale de la masse :

$$\forall R > 0, \quad \int_{|x|\leqslant R} |\psi(t,x)|^2 dx \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to +\infty.$$

Contrairement à (2) le système *non-linéaire* complet (1) admet des solutions exceptionnelles pour lesquelles dispersion et concentration se compensent exactement et qui se propagent *sans aucune déformation* : ce sont les solitons ou ondes solitaires. Dans le cas de (1), ce sont en fait des solutions périodiques en temps de la forme

$$\psi(t,x) = e^{it} Q(x)$$

où le profil Q doit résoudre l'EDP elliptique non-linéaire :

$$(3) \qquad \Delta Q - Q + Q|Q|^2 = 0.$$

Le phénomène de compensation entre dispersion et concentration apparaît naturellement dans des modélisations physiques diverses, notamment en mécanique des fluides et en physique des plasmas où la modélisation des phénomènes dominants par des ondes solitaires s'est avérée extrêmement pertinente, voir [37] pour une plus ample introduction.

1.2. L'équation de Korteweg-de-Vries : un cas complètement intégrable

Une des plus anciennes découvertes d'ondes solitaires est due à Korteweg et de Vries [15], qui ont modélisé des ondes exceptionnelles se propageant à la surface de l'eau sur de très longues distances sans déformation. Une réduction aujourd'hui classique et qui revêt un caractère universel, [31], permet de modéliser la dynamique complexe de la surface libre de l'eau dans certains régimes par le modèle simplifié qui décrit *la dynamique d'enveloppe* dite de Korteweg-de Vries (KdV) :

$$(4) \qquad \text{(KdV)} \quad \partial_t u + \partial_x(\partial_x^2 u + u^2) = 0 \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad u(t,x) \in \mathbb{R}.$$

Ici $u(t,x)$ mesure la hauteur de la surface de l'eau par rapport à un niveau de référence plat. L'onde solitaire correspond alors à une onde progressive – une vague – se propageant sans déformation à la vitesse $c>0$, soit :

$$u(t,x) = Q_c(x-ct).$$

Ceci nous conduit à résoudre l'EDP non-linéaire $(Q_c'' + Q_c^2 - cQ_c)' = 0$ qui en une dimension d'espace se résout explicitement avec conditions nulles à l'infini :

$$Q_c(x) = Q_c(x) = cQ(\sqrt{c}x) \quad \text{où} \quad Q(x) = \tfrac{3}{2}\cosh^{-2}\left(\tfrac{x}{2}\right).$$

D'un point de vue mathématique, le modèle de (KdV) possède une structure exceptionnelle d'*intégrabilité complète*. Cette notion a constitué une découverte majeure de l'analyse des années 60-70 et a nourri jusqu'à aujourd'hui une littérature considérable. Sans rentrer dans le détail de la définition des paires de Lax ([20]), contentons-nous de dire qu'une structure extrêmement rigide du flot de (KdV) permet via une transformation explicite – le scattering inverse – de ramener le problème non-linéaire sur un problème *linéaire*. Une manifestation de cette ridigité du flot est par exemple l'existence d'une *infinité* de lois de conservation.

L'intégrabilité complète permet d'obtenir plusieurs résultats qualitatifs fins :

(i) *Comportement en temps long des solutions de (KdV)* : un premier résultat spectaculaire est la description en temps long du flot de (KdV) (voir [7] pour une démarche rigoureuse) : toute solution dont la donnée initiale est régulière et suffisamment décroissante en espace admet une décomposition :

$$(5) \quad u(t,x) = \Sigma_{k=1}^N Q_{c_j}(x - x_k - c_k t) + \varepsilon(t,x) \quad \text{avec} \quad \lim_{t\to+\infty} \sup_{x>0} |\varepsilon(t,x)| = 0,$$

où $0 < c_1 < \dots < c_N$, $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$. En d'autres termes, l'onde se décompose en un train d'ondes solitaires – dynamique de type particulaire – et une onde dispersée ε qui génériquement peut emporter une partie de l'énergie initiale du système. L'onde solitaire apparaît donc comme un attracteur universel du flot Hamiltonien associé à (KdV).

(ii) *Interaction de solitons* : (5) décrit l'état asymptotique du système en temps grand, les ondes solitaires sont alors découplées. Une question importante pour la physique et l'analyse est celle de l'interaction et de la collision des solitons qui mènent asymptotiquement à cet état découplé. Un fait spectaculaire est l'existence de collisions de solitons complètement élastiques – sans perte d'énergie –. En effet, la transformation du scattering inverse permet d'exhiber des solutions explicites appelées *multi-solitons*. Pour commencer, on remarque que $U_1 := Q$ (le 1-soliton) peut s'écrire

$$U_1(t,x) = \tfrac{3}{2}\cosh^{-2}\left(\tfrac{x-t}{2}\right) = 6\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}\log\bigl(1+e^{x-t}\bigr).$$

Pour tout $0<c<1$, la fonction suivante $U_{1,c}$ est une solution $2-$soliton typique de (KdV) :

$$(6) \qquad U_{1,c}(t,x) = 6\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\bigl(1+e^{x-t}+e^{\sqrt{c}(x-ct)}+\alpha e^{x-t}e^{\sqrt{c}(x-ct)}\bigr),$$

avec $\alpha = \left(\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}\right)^2$. Par une analyse asymptotique simple ([42]), on observe

$$\lim_{t\to+\infty} \|U_{1,c}(t,x) - Q_c(x-ct) - Q(x-t-\delta)\|_{H^1(\mathbb{R})} \to 0 \text{ avec } \delta = 2\log\left(\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right) > 0,$$

$$\lim_{t\to-\infty} \|U_{1,c}(t,x) - Q_c(x-ct-\delta') - Q(x-t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \to 0 \text{ avec } \delta' = \frac{\delta}{\sqrt{c}} > 0.$$

Cette solution contient donc deux solitons Q et Q_c venant de $t = -\infty$ et ensuite rentrant en collision élastique et dont les formes, les tailles et les vitesses (ces paramètres sont reliés) ne sont pas altérés par la collision. De plus, la collision ne produit aucune dispersion donc aucune perte d'énergie. La terminologie *solitons* a été introduite par Zabusky et Kruskal [43] (voir aussi Fermi, Pasta and Ulam [8]), après la découverte *numérique* de cette propriété remarquable. Il est aussi intéressant de remarquer que les trajectoires de ces deux solitons sont décalées par la collision (δ, $\delta' > 0$). Des expressions plus générales, mais similaires, pour un nombre arbitrairement grand de solitons, de tailles quelconques deux-à-deux différentes, sont disponibles [31].

1.3. Étude des ondes solitaires dans le cas non-intégrable

D'autres équations d'évolution issues de la physique sont complètement intégrables, [AC02]. Mais cette propriété exceptionnelle a le défaut d'être instable par perturbation de l'équation, ce qui ne permet pas de raffiner la modélisation physique. Un effort considérable ces trente dernières années a été entrepris pour développer une théorie beaucoup plus robuste et générale avec des apports importants de différentes parties des mathématiques. Notons néanmoins à titre de comparaison que la conjecture de simplification générique en ondes solitaires qui généraliserait (5) aux cas non-intégrables, reste encore largement inaccessible, voir Tao [39] pour les plus récents développements.

La suite de cet article est dédiée à la présentation de certaines problématiques dans l'étude mathématique moderne des solitons et des ondes non-linéaires associées. Nous rappellerons tout d'abord comment la théorie des EDP elliptiques et des techniques variationnelles ont permis dans les années 80 de démontrer l'existence et la stabilité d'ondes solitaires pour une large classe de problèmes. Nous nous concentrerons ensuite sur trois problématiques récentes au cœur des travaux des auteurs :

(i) Étude du flot autour d'une onde solitaire et stabilité asymptotique.

(ii) Étude de l'interaction de deux solitons dans un cadre non-intégrable.

(iii) Étude de la concentration de l'onde et du phénomène d'*explosion* dans certains régimes.

2. Stabilité du soliton

Nous déclinons dans cette section la problématique d'étude du flot autour d'un soliton dans le cas particulier des équations de (KdV) généralisées. Cet exemple canonique a l'avantage de permettre un certain nombre de calculs explicites et de profiter de l'intuition du cas complètement intégrable (4). Nous reviendrons dans la dernière section sur (NLS) et sur les liens étroits – non évidents à première vue – qui existent entre ces deux équations.

2.1. L'équation de KdV généralisée

Considérons l'équation de (KdV) généralisée :

$$(7) \qquad (\mathrm{gKdV}) \quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x(\partial_x^2 u + u^p) = 0, \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \qquad t, x \in \mathbb{R}, \qquad u(t,x) \in \mathbb{R},$$

pour $p = 2, 3, 4$. Les cas $p = 2, 3$ sont complètement intégrables, contrairement au cas $p = 4$. On pourrait également remplacer u^p par une fonction $g(u)$ avec suffisamment de régularité.
La première problématique est celle de la résolution locale en temps du problème de Cauchy (7). Comme pour les ODE, elle est basée sur une méthode de point fixe de type Cauchy-Lipschitz mais en dimension infinie, ce qui nécessite des estimations de dispersion fine et des effets régularisants dans des espaces fonctionnels adaptés. Les travaux pionniers sur ces techniques remontent à Kato [14], et les résultats les plus complets sur (gKdV) sont dus à Kenig, Ponce, Vega [16]. On obtient l'existence locale et l'unicité de la solution de (7) à donnée initiale fixée dans l'espace $H^1(\mathbb{R})$ muni de la norme :

$$\|u(t)\|_{H^1} := \left(\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u)^2(t,x) + u^2(t,x) dx \right)^{1/2}.$$

En outre, pour $1 < p < 5$, la solution est *globale et bornée* dans cet espace, ce qui est une conséquence classique des deux lois de conservation fondamentales et de la théorie de Cauchy :

$$(8) \qquad \text{Norme } L^2 : \quad \forall t \geqslant 0, \quad \int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}} u_0^2(x)dx,$$

$$(9) \quad \text{Energie} : \ \forall t \geqslant 0, \ E(u(t)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(t))^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}} u^{p+1}(t) = E(u(0)).$$

La conservation de l'énergie est en fait une conséquence directe de la structure *Hamiltonienne* de (gKdV).
Introduisons maintenant les solitons de (gKdV) qui sont des ondes progressives de la forme $u(t,x) = Q_c(x - ct)$, tendant vers 0 en l'infini en x, ce qui implique pour Q_c

$$(10) \qquad (Q_c'' + Q_c^p)' = cQ_c'.$$

Il existe des solutions H^1 de cette équation différentielle ordinaire si et seulement si $c > 0$, et dans ce cas la solution est explicite :

$$(11) \qquad Q_c(x) = c^{\frac{1}{p-1}} Q(\sqrt{c}x) \quad \text{où} \quad Q(x) = \left(\tfrac{p+1}{2} \cosh^{-2}\left(\tfrac{(p-1)x}{2} \right) \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

En outre, en utilisant l'invariance translationelle de (gKdV), on obtient la famille à deux paramètres d'ondes solitaires :

$$(12) \qquad R_{c,x_0}(t,x) = Q_c(x - x_0 - ct), \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}_*^+.$$

2.2. Stabilité des solitons

On s'intéresse maintenant à une propriété qualitative des solitons, qui est leur stabilité par perturbation de la donnée initiale. En d'autres termes, étant donnés $\varepsilon, c > 0$, peut-on trouver $\alpha_0 > 0$ tel que pour toute donnée initiale dans un voisinage de Q_c, i.e. $\|u_0 - Q_c\|_{H^1} < \alpha_0$, la solution correspondante de (gKdV) reste au voisinage de l'onde solitaire : $\forall t \geqslant 0$, $\|u(t) - Q_c(x - ct)\|_{H^1} < \varepsilon$. Posée en ces termes, la réponse est trivialement négative puisque

$$\forall c_2 > c_1 > 0, \quad \limsup_{t \to +\infty} \|Q_{c_2}(x - c_2 t) - Q_{c_1}(x - c_1 t)\|_{H^1} = \|Q_{c_1}\|_{H^1} + \|Q_{c_2}\|_{H^1},$$

même si c_1 et c_2 sont arbitrairement proches. Le mieux qu'on puisse espérer est une *stabilité orbitale*, soit la stabilité de la famille entière d'ondes solitaires (12) modulo le paramètre de translation au sens suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_0 > 0$ tel que si $\|u_0 - Q_c\|_{H^1} \leqslant \alpha_0$, alors il existe une fonction $y(t)$ telle que

$$\forall t \geqslant 0, \quad \|u(t) - Q_c(. - y(t))\|_{H^1} \leqslant \varepsilon. \tag{13}$$

Il résulte de plusieurs travaux ([5], [10], [41]) que Q_c est orbitalement stable pour (gKdV) si et seulement si

$$\frac{d}{dc}\left(\int Q_c^2\right) > 0. \tag{14}$$

L'équation (11) implique $\int Q_c^2 = c^{\frac{2}{p-1} - \frac{1}{2}} \int Q^2$ et donc Q_c est stable si et seulement si $p < 5$.

La démonstration de la stabilité dans [5] et [41] repose sur la *caractérisation variationnelle* du soliton qui minimise l'énergie à masse donnée, soit :

$$E(Q_c) = \min_{v \in H^1,\ \|v\|_{L^2} = \|Q_c\|_{L^2}} E(v) \tag{15}$$

et l'infimum est atteint sur Q_c à une translation près :

$$\forall v \in H^1,\ E(v) = E(Q_c) \text{ et } \|v\|_{L^2} = \|Q_c\|_{L^2} \Rightarrow v \equiv Q_c(. - y) \text{ pour } y \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

En outre, les techniques de *concentration-compacité* introduites par P.-L. Lions au début des années 80 ([22]) permettent de décrire toutes les suites minimisantes de (15) et de conclure qu'une fonction dans H^1 dont l'énergie et la norme L^2 sont proches de celle de Q_c doit nécessairement elle-même être proche de Q_c dans H^1 à une translation près. La stabilité orbitale de Q_c par le flot de (gKdV) est maintenant une conséquence directe des lois de conservation (8), (9).

2.3. Stabilité asymptotique

La stabilité orbitale est loin de tout dire sur le comportement de la solution. Une question classique en systèmes dynamiques est celle de l'état asymptotique du système quand $t \to +\infty$. L'intuition fondamentale est modelée sur le théorème général de décomposition (5) obtenu dans le cas intégrable. Des travaux récents (voir [24] et certains autres travaux cités dans cet article) ont permis de démontrer la stabilité asymptotique du soliton au sens suivant : si l'on perturbe un soliton Q_c, la solution correspondante se décompose en une partie onde solitaire avec une vitesse $c^+ > 0$ proche mais a priori différente de c, qui est la seule « grosse » onde formée par le système, et un reste plus lent correspondant à une éjection d'énergie qui peut a priori contenir d'autres solitons, nécessairement petits, et de la radiation. Plus précisément, si $\|u_0 - Q_c\|_{H^1} \leqslant \alpha_0$, il existe un paramètre de translation $y(t)$ et une valeur limite c^+ proche de c tels que

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(t,x) - Q_{c^+}(x - y(t))\|_{H^1(x>\frac{1}{10}t)} = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} y'(t) = c^+.$$

Comme $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = c^+$ proche de c, la région $x > \frac{1}{10}t$ contient bien le soliton pour t grand, et de façon générale, $u(t)$ est bien petit pour $x < \frac{1}{10}t$ par la stabilité mais ne converge pas nécessairement vers 0 en norme H^1. La valeur $\frac{1}{10}$ est un peu arbitraire, le résultat est encore vrai dans la région $x > \beta t$, pourvu de prendre α_0 petit dépendant de $\beta > 0$. En revanche, le résultat devient faux si on veut prendre $\beta = 0$, à cause de la présence possible de petits solitons, à petite vitesse. Notons aussi que le soliton peut être sensiblement dévié de la trajectoire rectiligne au sens où $|y'(t) - c_+| \to 0$ quand $t \to +\infty$, mais $y(t) - c_+ t$ peut dans certains cas diverger, de façon logarithmique par exemple.

La démonstration est de nature plus complexe que la démonstration de la stabilité. Elle repose notamment sur l'introduction de résultats de rigidité de type théorème de Liouville qui permettent de classifier les états asymptotiques possibles du système. De telles stratégies sont classiques en théorie elliptique ou parabolique, mais reposent dans le cadre dispersif sur de nouvelles propriétés de monotonie du flot. Voir aussi [38] pour un exposé plus détaillé.

3. Dynamique des multisolitons

Nous allons considérer les dynamiques des multisolitons avec deux problématiques majeures : existence et stabilité, et la question délicate de la collision dans le cas de (gKdV).

3.1. Existence et stabilité des multisolitons

Hors du cas intégrable, il n'existe plus de formules exactes pour décrire un multisoliton généralisant (6). Il faut commencer par construire les multisolitons en s'aidant de la décroissance exponentielle en espace de Q_c et donc du faible couplage entre les ondes. Etant donnés deux vitesses $c_1, c_2 > 0$, on démontre ainsi ([23]) l'existence – et *l'unicité* – d'une solution de (gKdV) vérifiant :

$$\lim_{t\to-\infty} \|U(t) - Q_{c_1}(x - c_1 t) - Q_{c_2}(x - c_2 t)\|_{H^1} = 0. \tag{17}$$

Une telle solution est un 2-soliton *pur* en $-\infty$ car toute l'énergie du système est transférée aux ondes solitaires. Dans le cas intégrable, le 2-soliton pur en $-\infty$ l'est aussi en $+\infty$, mais nous verrons que ce n'est génériquement plus vrai dans le cas non-intégrable.

Une fois le 2-soliton pur construit en $-\infty$ par exemple, se pose la question de la stabilité de la structure 2-soliton. La stabilité d'un soliton repose sur sa caractérisation variationnelle (15) mais cette stratégie de démonstration ne suffit pas pour un multisoliton. À nouveau l'utilisation fine de formules de monotonie a récemment permis de démontrer la stabilité des multisolitons en grand temps, [27].

3.2. Interaction de deux solitons

Nous allons maintenant parler de la collision de deux solitons dans le cadre non-intégrable de (gKdV). De nombreux essais numériques ont été consacrés à cette question, mais les seuls résultats rigoureux dans le cas de (gKdV) non-intégrables sont très récents, voir [25, 26].

Nous les décrivons brièvement dans le cas $p = 4$ pour (gKdV), soit

$$\partial_t u + \partial_x(\partial_x^2 u + u^4) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{18}$$

Ces résultats ont été obtenus dans le cas asymptotique particulier de deux solitons de vitesses (et donc de tailles) très différentes.

Pour commencer, on considère une solution $U(t)$ contenant deux solitons quand $t \to -\infty$:

$$\lim_{t\to-\infty} \|U(t) - Q(x-t) - Q_c(x-ct)\|_{H^1} = 0,$$

sous l'hypothèse

$$0 < c \ll 1. \tag{19}$$

La question essentielle est de décrire cette solution lorsque les solitons rentrent en collision (théoriquement pour $t \sim 0$). Les résultats obtenus dans [25] sur ce problème se décomposent en deux parties :

– La collision est presque élastique ;
– La collision n'est pas purement élastique.

Le fait que la collision de deux solitons pour des équations de type KdV est presque élastique, mais pas exactement élastique est en accord avec les prévisions numériques (sur des modèles plus généraux de la physique) et expérimentales. On consultera à ce sujet l'article très complet de W. Craig et *al.* [6], où sont comparés les multi-solitons de KdV, des essais numériques, et des expériences en réservoir. La conclusion principale de cette étude confirme que la collision élastique des solitons de (KdV) est en effet une bonne représentation d'un phénomène remarquable pour une équation non-linéaire, mais que les solutions multi-solitons de (KdV) sont trop parfaites pour correspondre exactement à la réalité d'une collision. En général, une petite perte de masse est observée comme conséquence de la collision.

Nous détaillons maintenant les résultats obtenus dans le théorème suivant.

Théorème 1 (Collision de deux solitons pour (gKdV) quartique)**.**
Il existe $c_0 > 0$ assez petit tel que si $0 < c < c_0$ et si $U(t)$ est l'unique solution de (18) *satisfaisant*

$$\lim_{t\to-\infty} \left\|U(t) - Q(.-t) - Q_c(.-ct)\right\|_{H^1(\mathbb{R})} = 0$$

alors il existe c_1^+, c_2^+, $y_1(t)$, $y_2(t)$ tels que

(i) *La collision est presque élastique :*

$$c_1^+ \underset{c\sim 0}{\sim} 1, \qquad \frac{c_2^+}{c} \underset{c\sim 0}{\sim} 1,$$
$$w^+(t,x) = U(t,x) - (Q_{c_1^+}(x - y_1(t)) + Q_{c_2^+}(x - y_2(t))),$$
$$\textit{vérifie} \quad \lim_{+\infty} \|w^+(t)\|_{H^1(x \geqslant \frac{c}{10}t)} = 0, \quad \sup_t \|w^+(t)\|_{H^1} \leqslant Kc^{\frac{1}{3}};$$

(ii) *La collision n'est pas exactement élastique :*

$$c_1^+ > 1, \quad c_2^+ < c$$

et

$$\liminf_{t\to+\infty} \|w^+(t)\|_{H^1} > 0.$$

Ce résultat appelle plusieurs commentaires :

– On doit tout d'abord comparer les ordres de tailles des diverses fonctions, pour $c > 0$ petit à des constantes multiplicatives près :

$$\|Q\|_{H^1} \sim 1, \quad \|Q_c\|_{L^2} \sim c^{\frac{1}{12}}, \quad \|w^+(t)\|_{H^1} \leqslant Kc^{\frac{1}{3}}.$$

Cela signifie que w^+ est bien un terme résiduel d'ordre inférieur et que la structure 2-soliton est préservée. De plus, pour t grand, $w^+(t)$ tend vers zéro localement autour des solitons, ce qui caractérise les tailles asymptotiques c_1^+, c_2^+ des deux solitons.

– Les centres de masse $y_1(t)$, $y_2(t)$ des deux solitons vérifient :

$$\lim_{t\to+\infty} |y_1'(t) - c_1^+| = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} |y_2'(t) - c_2^+| = 0.$$

– Le point (ii) de ce théorème implique qu'il n'existe aucune solution de (18) ((gKdV) quartique) de type 2-soliton pur dans ce régime (un soliton petit par rapport à l'autre) contrairement au cas intégrable (non-linéarité quadratique ou cubique). En effet, s'il existait une telle solution, elle devrait correspondre à $U(t)$ aux invariances de l'équation près (translations, scaling) ; mais $U(t)$ n'est pas une solution de type 2-soliton, car $w^+(t)$ ne tend pas vers 0 quand $t \to +\infty$.

– Monotonie des vitesses : la taille et donc la vitesse du soliton principal est augmentée par la collision tandis que la taille du petit soliton est diminuée.

L'extension de ces résultats à des non-linéarités plus générales

$$\partial_t u + \partial_x(\partial_x^2 u + g(u)) = 0 \tag{20}$$

est au cœur de travaux en cours. Pour $g(u)$ tel que $g(u) = u^p + g_1(u)$ ($p = 2, 3$ ou 4) où $\lim_{u\to 0} u^{-p} g_1(u) = 0$, et pourvu que les solitons vérifient le critère de stabilité (14), on peut démontrer la partie positive du théorème précédent, [26], sans pouvoir dire en général si la collision est exactement pure ou seulement approximativement pure.

4. Le cas de Schrödinger non-linéaire

Nous nous concentrons dans cette section sur l'équation de Schrödinger non-linéaire que nous écrivons dans le cas général :

$$\text{(NLS)} \quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + u|u|^{p-1} = 0, \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \quad u(t,x) \in \mathbb{C}, \tag{21}$$

le cas de la non-linéarité cubique $p = 3$ étant particulièrement pertinent pour la physique. L'existence *locale* en temps de solutions dans l'espace d'énergie $H^1(\mathbb{R}^N)$

découle d'estimations fines de dispersion du flot linéaire – pour $p < \frac{N+2}{N-2}$ (voir Ginibre et Velo [9]). Ces solutions vérifient la conservation de la masse :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(t)|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^2,$$

et de l'énergie :

$$E(u(t)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t)|^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}(t) = E(u(0)), \tag{22}$$

structure similaire au problème (gKdV).
En outre, on démontre qu'il existe un exposant critique

$$p_c = 1 + \frac{4}{N}$$

tel que toutes les solutions de (NLS) sont globales en temps et bornées dans H^1 pour $p < p_c$, alors que pour $p \geqslant p_c$, un phénomène d'explosion en temps fini de l'onde est possible. Pour cette dynamique explosive, la concentration l'emporte sur la dispersion et le faisceau se focalise en temps fini. Notons que le cas $p = 3$, $N = 2$ est un modèle important introduit dans les années 50 en optique non-linéaire et où précisément l'explosion est associée à un phénomène de concentration de l'onde et à la formation d'un faisceau laser.

Quelle que soit la valeur de $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, le système admet des ondes solitaires qui sont ici des solutions périodiques $u(t,x) = Q(x)e^{it}$ avec :

$$\Delta Q - Q + Q|Q|^{p-1} = 0. \tag{23}$$

On peut en outre faire voyager les ondes solitaires en ligne droite en utilisant une symétrie du problème, l'invariance de Galilée, qui produit les ondes progressives suivantes :

$$Q(x-\beta t)e^{i\frac{\beta}{2}\cdot(x-\beta t)}e^{it}, \quad \beta \in \mathbb{R}^N. \tag{24}$$

4.1. Le cas sous critique $p < p_c$

Si l'équation (23) est soluble explicitement en dimension $N = 1$ avec Q donné comme pour (gKdV) par (11), elle admet en revanche en dimension $N \geqslant 2$ une infinité de solutions. Une classification complète des solutions de l'équation stationnaire (23) est ouverte. En revanche, la famille de solitons (stables) que nous considérons correspond à l'*unique* solution H^1 radiale *positive* de (23). On peut à nouveau montrer par des arguments variationnels qu'elle minimise l'énergie (22) à norme L^2 donnée, d'où sa stabilité orbitale, [5].

Comme pour (gKdV), on peut aussi construire une famille de 2-solitons (et plus) se comportant asymptotiquement comme deux ondes découplées :

$$\lim_{t\to-\infty} \|U(t,x) - Q(x-\beta_1 t)e^{i\frac{\beta_1}{2}\cdot(x-\beta_1 t)}e^{it} - Q(x-\beta_2 t)e^{i\frac{\beta_2}{2}\cdot(x-\beta_2 t)}e^{it}\|_{H^1} = 0.$$

Une telle solution est explicite pour $N = 1$, $p = 3$, seul cas où existe une structure d'intégrabilité complète. La stabilité de ces solutions est un problème ouvert pour des non-linéarités puissances, mais a récemment été démontrée pour d'autres types de non-linéarité. L'analyse se heurte ici à de nouveaux phénomènes et notamment la question de la stabilité asymptotique du soliton qui est en fait *fausse* pour $N = 1, p = 3$ et constitue un problème ouvert délicat en général.

Notons enfin que d'autres types de non-linéarité peuvent induire des dynamiques de multisolitons plus complexes. C'est typiquement le cas pour la non-linéarité de Hartree

$$i\partial_t u + \Delta u - \varphi_{|u|^2} u = 0, \quad \varphi_{|u|^2}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{y\in\mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^2}{|x-y|} dy, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

qui est un modèle standard en astrophysique et où la non-linéarité $\varphi_{|u|^2}$ correspond au champ gravitationnel Newtonien. Ce système admet des ondes solitaires se propageant en ligne droite sur le modèle (24). En revanche, dans une dynamique 2-soliton, chaque particule est fortement déviée par le champ gravitationnel créé par l'autre. On peut alors démontrer ([17]) l'existence d'un 2-soliton pur où la dynamique des centres de masse reproduit *asymptotiquement* la dynamique non piégée du problème à deux corps en gravitation Newtonienne, soit hyperbolique ou parabolique, ce qui illustre une fois de plus le caractère profondément particulaire des dynamiques d'ondes solitaires. L'extension de ces techniques à d'autres types d'équations comme par exemple les équations de transport non-linéaires et le système de Vlasov-Poisson gravitationel – qui est un modèle standard en astrophysique pour la description des amas de galaxie – est au cœur de recherches actives, [21].

4.2. La dynamique explosive : existence et structure de viriel

Concentrons-nous maintenant sur (21) dans le cas d'une non-linéarité suffisamment focalisante :

$$p \geqslant p_c = 1 + \frac{4}{N}.$$

Dans ce cas, il existe des solutions qui explosent en temps fini. En fait, l'existence de solutions explosives pour les équations d'ondes non-linéaires est en général un problème délicat, et (NLS) est à cet égard un cas exceptionnel où l'existence de solutions explosives est connu depuis les années 50. L'argument est élémentaire et repose sur le calcul algébrique suivant : si $u(t,x)$ est solution de (21), alors un calcul direct montre que :

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |u(t,x)|^2 dx \leqslant 16E(u_0) \tag{25}$$

avec égalité pour $p = p_c$.

En particulier, si $E_0 < 0$, alors la fonction positive $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2|u(t,x)|^2 dx$ doit vivre sous une parabole inversée et donc un flot régulier ne peut vivre qu'un temps fini.

Cet argument dit du *viriel* est exceptionnel car il exhibe un *ouvert* de l'espace d'énergie où toutes les solutions explosent, décrivant donc un phénomène stable a priori. En outre ce genre d'argument obstructif est en fait assez général, et est par exemple appliqué en mécanique des gaz pour montrer l'apparition de chocs, [36].

En revanche, cet argument par obstruction est d'une part complètement instable par perturbation de l'équation et très lié au choix de la non-linéarité puissance, et d'autre part il ne dit absolument *rien* sur la nature de la formation de singularité. Depuis les années 50 où ces arguments ont été exhibés, les premiers progrès sur ces sujets ont tout d'abord été obtenus grâce aux simulations numériques qui via le développement de techniques particulières toujours plus fines ont permis depuis les années 80 jusqu'à nos jours d'exhiber des *dynamiques explosives stables*. Mais encore aujourd'hui, ces simulations restent limitées à des problèmes simples avec souvent une géométrie élémentaire – typiquement en symétrie radiale par exemple. Au niveau de l'analyse, bien que de nombreuses questions élémentaires sont encore largement ouvertes, ces dix dernières années ont vu la résolution analytique de certains problèmes d'explosion considérés comme canoniques. Nous présentons un de ces résultats dans le paragraphe suivant.

4.3. Explosion L^2 critique et régime du « log-log »

Considérons (NLS) avec $p = p_c = 1 + \frac{4}{N}$, le plus petit exposant permettant l'explosion (cas L^2 critique). Notons Q le soliton, soit l'unique solution positive radiale non triviale dans H^1 de

$$\Delta Q - Q + Q^{1+\frac{4}{N}} = 0.$$

Le lien entre soliton et dynamique explosive repose sur la caractérisation variationnelle du soliton qui a permis à Weinstein [40] au début des années 80 de démontrer le résultat remarquable suivant :

Théorème 2 ([40]). *Soit $u_0 \in H^1$ avec $\|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$, alors la solution correspondante de (NLS) est globale et bornée dans H^1.*

En d'autres termes, l'explosion si elle a lieu nécessite un *quantum* minimum de masse donné par la norme L^2 du soliton. Une manière naïve de traduire ce théorème est qu'il faut un minimum –explicite ! – d'énergie pour former un faisceau laser. Considérons donc des données explosives de masse $\|u_0\|_{L^2} \geqslant \|Q\|_{L^2}$. Un premier fait spectaculaire est qu'une symétrie du problème implique l'existence d'une solution explosive explicite :

$$S(t,x) = \frac{1}{|t|^{\frac{N}{2}}} Q\left(\frac{x}{t}\right) e^{i\frac{|x|^2}{4|t|}} e^{\frac{i}{t}}$$

qui explose en $t = 0$ avec une vitesse

$$\|\nabla S(t)\|_{L^2} \sim \frac{1}{|t|}, \tag{26}$$

et telle que $\|S\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$ (explosion à masse minimale). Un résultat précurseur de Merle [Men86] montre que S est la *seule* solution explosive à masse minimale aux invariances de l'équation près.

Un nombre considérable de travaux formels et numériques a été dédié dans les années 80 à la compréhension de la formation de singularité pour ce problème, [37], et tous ces travaux étaient unanimes : la vitesse (26) n'est jamais observée numériquement, suggérant que cette dynamique explicite est en fait complètement instable. Différentes lois pour la dynamique stable ont alors été proposées dont la loi dite du « log-log », [19], selon laquelle la dynamique d'explosion stable correspondrait à une vitesse :

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \sim \sqrt{\frac{\log|\log(T-t)|}{T-t}}. \tag{27}$$

Il y aurait beaucoup à dire sur ce double log qui n'a absolument rien d'intuitif. Une solution explosant selon cette loi fut construite en 2001 par Perelman, [P], puis les travaux de Merle et Raphaël (entre autres [29], [30]) ont permis de décrire complètement ce régime en petite dimension et près de la masse critique :

Théorème 3 (Description de l'explosion près de la masse critique)**.** *Soit $N \leqslant 5$ et $p = p_c$. Il existe $0 < \alpha^* << 1$ tel que si $u_0 \in H^1$ vérifie*

$$\|Q\|_{L^2} < \|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2} + \alpha^*$$

et si la solution correspondante de (NLS) explose en temps fini $0 < T < +\infty$, alors il existe un point d'explosion $x(T)$ et un profil asymptotique $u^* \in L^2$, il existe des paramètres de changement d'échelle $\lambda(t) > 0$, et de phase $\gamma(t) \in \mathbb{R}$ tels que la solution se décompose près de l'explosion en une partie singulière et une partie régulière :

$$u(t,x) = Q_{sing}(t,x) + \tilde{u}(t,x)$$

avec

$$Q_{sing}(t,x) = \frac{1}{\lambda^{\frac{N}{2}}(t)} Q\left(\frac{x - x(T)}{\lambda(t)}\right) e^{i\gamma(t)} \tag{28}$$

et

$$\tilde{u}(t,x) \to u^* \quad \text{dans} \quad L^2 \quad \text{quand} \quad t \to T. \tag{29}$$

La vitesse d'explosion est donnée par

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \sim \frac{1}{\lambda(t)} \to +\infty \quad \text{quand} \quad t \to T,$$

et elle satisfait l'alternative suivante :

(i) soit la solution est dans le régime du log-log :

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \sim \sqrt{\frac{\log|\log(T-t)|}{T-t}}$$

qui est stable par perturbation de la donnée initiale ;

(ii) soit

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \geqslant \frac{C(u_0)}{T-t}. \tag{30}$$

Ce résultat appelle deux commentaires :

– Tout d'abord, il implique que soit la solution est dans le régime stable du log-log – confirmant la prédiction numérique –, soit elle le quitte pour satisfaire (30), ce qui est une borne inférieure optimale aux vues de l'exemple (26). La double question de savoir s'il existe hors du log-log d'autres régimes que le régime $\frac{1}{T-t}$, et si ces régimes sont effectivement instables comme le suggèrent les simulations numériques, est ouvert.

– En outre, un point fondamental est que la partie singulière de la solution *admet une structure complètement universelle* construite sur l'onde solitaire et complètement indépendante de la donnée initiale. Notamment, la solution concentre en un point $x(T)$ qui est le point d'explosion une partie de sa norme L^2 qui est un *quantum universel* donné par la norme L^2 du soliton :

$$|Q_{sing}(t,x)|^2 \rightharpoonup \|Q\|^2_{L^2}\delta_{x=x(T)} \quad \text{quand} \quad t \to T$$

au sens des mesures : c'est la première *bulle* de concentration. Le reste de la solution ne concentre pas et forme le profil u^*.

Bien qu'à première vue d'une nature sensiblement différente, l'analyse du problème explosif est en fait intimement liée à la compréhension du flot autour de l'onde solitaire Q et il existe en ce sens une grande continuité conceptuelle entre les travaux sur les problèmes sous critiques de stabilité et stabilité asymptotique des ondes solitaires, et les travaux sur la dynamique explosive.

Concluons ce bref survol de la dynamique explosive en disant que le cas surcritique $p > p_c$ est très largement ouvert. Dans [33], [34], des solutions explosives radiales sont construites pour $p = 5$ qui explosent non pas en un point, mais sur une sphère. Enfin, des travaux très récents [18], [35] considèrent un problème sensiblement différent à première vue mais qui exhibe en fait une structure similaire : le problème de « wave map » qui est un modèle standard en théorie quantique des champs et en relativité générale. Les fonctions ne sont plus ici réelles ou complexes mais à valeur dans une variété – typiquement la sphère – ce qui introduit une problématique très riche du lien entre les phénomènes d'explosion et la géométrie de l'espace ambiant.

5. Références

[1] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 149. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[2] H. Berestycki, P.-L. Lions, Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state, Arch. Rational Mech. Anal. **82**, (1983) 313-345.

[3] J.L. Bona, W.G. Pritchard, L.R. Scott, Solitary-wave interaction, Phys. Fluids 23, **438**, (1980).

[4] J.L. Bona, P.E. Souganidis, W. Strauss, Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type, Proc. Roy. Soc. London Ser. A. **411** (1987), 395-412.

[5] T. Cazenave, P.L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, Comm. Math. Phys. **85**, (1982) 549-561.

[6] W. Craig, P. Guyenne, J. Hammack, D. Henderson, C. Sulem, Solitary water wave interactions. Phys. Fluids **18**, (2006), 057106.

[7] W. Eckhaus, P. Schuur, The emergence of solutions of the Korteweg - de Vries equation from arbitrary initial conditions, Math. Meth. Appl. Sci., **5**, (1983) 97-116.

[8] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, Studies of nonlinear problems, I, Los Alamos Report LA1940 (1955) ; reproduced in Nonlinear Wave Motion, A.C. Newell, ed., American Mathematical Society, Providence, R. I., 1974, pp. 143-156.

[9] J. Ginibre, G. Velo, On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case. J. Funct. Anal. **32** (1979), 1-32.

[10] M. Grillakis, J. Shatah, W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I., J. Func. Anal. **74** (1987), 160-197.

[11] R. Hirota, Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons, Phys. Rev. Lett., **27** (1971), 1192-1194.

[12] H. Kalisch, J.L. Bona, Models for internal waves in deep water, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **6** (2000), 1-20.

[13] T. Kato, On nonlinear Schrödinger equations. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor. **46** (1987), 113-129.

[14] T. Kato, On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation. Studies in applied mathematics, 93-128, Adv. Math. Suppl. Stud., 8, Academic Press, New York, 1983.

[15] D.J. Korteweg, G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Philos. Mag. **539** (1895), 422-443.

[16] C.E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg–de Vries equation via the contraction principle, Comm. Pure Appl. Math. **46**, (1993) 527-620.

[17] J. Krieger, Y. Martel, P. Raphaël, Two soliton solutions to the gravitational Hartree equation, to appear in CPAM.

[18] J. Krieger, W. Schlag, D. Tataru, Renormalization and blow up for charge one equivariant critical wave maps, Invent. Math. **171** (2008), 543-615.

[19] M. J. Landman, G. C. Papanicolaou, C. Sulem, P.-L. Sulem, Rate of blowup for solutions of the nonlinear Schrödinger equation at critical dimension. Phys. Rev. A (3) **38** (1988), 3837-3843.

[20] P. D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Comm. Pure Appl. Math. **21**, (1968) 467-490.

[21] Lemou, M. ; Mehats, F. ; Raphaël, P., The orbital stability of the ground states and the singularity formation for the gravitational Vlasov Poisson system, Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol 189, p 425-468, 2008.

[22] P.-L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1** (1984), 109-145.

[23] Y. Martel, Asymptotic N–soliton–like solutions of the subcritical and critical generalized Korteweg–de Vries equations, Amer. J. Math. **127** (2005), 1103-1140.

[24] Y. Martel, F. Merle, Asymptotic stability of solitons of the gKdV equations with general nonlinearity. Math. Ann. **341** (2008), 391-427.

[25] Y. Martel, F. Merle, Description of two soliton collision for the quartic gKdV equations. arXiv :0709.2672v1.

[26] Y. Martel, F. Merle, Stability of two soliton collition for the generalized KdV equations, Commun. Math. Phys. (2009).

[27] Y. Martel, F. Merle, Tai-Peng Tsai, Stability and asymptotic stability in the energy space of the sum of N solitons for the subcritical gKdV equations, Commun. Math. Phys. **231**, (2002) 347-373.

[28] F. Merle, Determination of blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equations with critical power, Duke Math. J. **69** (1993), 427-454.

[29] F. Merle, P. Raphaël, Blow up dynamic and upper bound on the blow up rate for critical nonlinear Schrödinger equation, Ann. Math. **161** (2005), 157-222.

[30] F. Merle, P. Raphaël, Sharp lower bound on the blow up rate for critical nonlinear Schrödinger equation, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), 37-90.

[31] R.M. Miura, The Korteweg–de Vries equation : a survey of results, SIAM Review **18**, (1976) 412-459.

[32] G. Perelman, On the blow-up phenomenon for the critical nonlinear Schrödinger equation in 1D, Ann. Henri. Poincaré **2** (2001), 605-673.

[33] P. Raphaël, Existence and stability of a solution blowing up on a sphere for a L^2 supercritical nonlinear Schrödinger equation, Duke Math. J. **134** (2006), 199-258.

[34] P. Raphaël, J. Szeftel, Standing ring blow up solutions to the N-dimensional quintic (NLS), to appear in Comm. Math.Phys.

[35] I. Rodnianski, I. Sterbenz, On the singularity formation in the critical $O(3)$ sigma model, to appear in Annals of Math.

[36] T. C. Sideris, Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids, Comm. Math. Phys. **101** (1985), 475-485.

[37] C. Sulem, P.L. Sulem, *The nonlinear Schrödinger equation. Self-focusing and wave collapse*. Applied Mathematical Sciences, 139. Springer-Verlag, New York, 1999.

[38] T. Tao, Why are solitons stable ? Bull. Amer. Math. Soc. **46** (2009), 1-33.

[39] T. Tao, A global compact attractor for high-dimensional defocusing non-linear Schrödinger equations with potential, arXiv :0805.1544v2

[40] M.I Weinstein, Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates, Comm. Math. Phys. **87** (1983), 567-576.

[41] MI. Weinstein, Lyapounov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations, CPAM 39, (1986) 51-68.

[42] M. Wadati, M. Toda, The exact N-soliton solution of the Korteweg – de Vries equation, J. Phys. Soc. Japan **32**, (1972) 1403-1411.

[43] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal, Interaction of « solitons » in a collisionless plasma and recurrence of initial states, Phys. Rev. Lett. **15** (1965), 240-243.