Georg Cantor jeune (à l'époque de l'article de 1874 ?)

MATHÉMATIQUES

Cantor et les infinis[1]

Patrick Dehornoy[2]

En 1874 paraît au Journal de Crelle une note de quatre pages où Georg Cantor, alors âgé de vingt-neuf ans et jeune professeur à l'université de Halle, établit la dénombrabilité de l'ensemble des nombres algébriques et la non-dénombrablité de l'ensemble des nombres réels. Cet article est révolutionnaire car, pour la première fois, l'infini est considéré non plus comme une limite inatteignable mais comme un possible objet d'investigation. L'héritage de ce travail est extraordinaire : non seulement il marque la naissance de la théorie des ensembles – en fait une théorie de l'infini – mais il contient déjà en germe le problème du continu qui a occupé toute la fin de la vie de Cantor et a été et continue d'être le moteur du développement de cette théorie. Un temps objet d'une fascination déraisonnable reposant sur un malentendu, celle-ci est aujourd'hui largement méconnue, alors même qu'apparaissent les premiers signes d'une possible résolution du problème du continu.

Ce texte présente le contexte et le contenu de l'article de Cantor, puis évoque deux des principaux développements qui en sont issus, à savoir la construction des ordinaux transfinis avec l'amusante application aux suites de Goodstein, et le problème du continu, y compris les contresens souvent rencontrés sur la signification des résultats de Gödel et Cohen, ainsi que les résultats récents de Woodin qui laissent entrevoir ce que pourrait être une solution future.

1. Une petite note et deux résultats simples

1.1. L'auteur

Georg Cantor naît en 1845 à Saint-Petersbourg, d'une mère russe et d'un père allemand, homme d'affaires d'origine juive converti au protestantisme. Il passe ses premières années en Russie. La famille revient en Allemagne quand Georg a onze ans, d'abord à Wiesbaden puis à Francfort. Cantor fréquente le lycée de Darmstadt, où ses dons en mathématiques sont remarqués, puis le Polytechnicum de Zürich en 1862, et, à partir de 1863, l'université de Berlin où il obtient l'équivalent d'un master en 1867.

En 1869, à l'âge de vingt-quatre ans, il soutient une thèse en théorie des nombres, reçoit son habilitation, et obtient un poste à l'université de Halle (Saxe-Anhalt).

[1] Texte faisant suite à un exposé de la série « Un texte, un mathématicien » à la Bibliothèque nationale de France.

[2] Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, Université de Caen, 14032 Caen, France.

Là, sous l'influence de son collègue Eduard Heine (1821–1881), il se tourne vers l'analyse, principalement le problème de l'unicité de la représentation d'une fonction par série trigonométrique, qu'il résout positivement en 1870. Sous la forme de l'étude des ensembles d'unicité, la question continuera de jouer un grand rôle dans les réflexions ultérieures de Cantor en arrière-plan de l'élaboration de la théorie des ensembles, voir [12].

À partir de 1872, Cantor entretient une correspondance avec Richard Dedekind (1831-1916), qui est son aîné de quatorze ans et vient de proposer la définition des nombres réels par coupures. C'est dans ce contexte que Cantor s'intéresse aux questions qu'on appelle maintenant de dénombrabilité, c'est-à-dire à la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble. Le résultat fondamental dont on va parler plus loin, à savoir la non-dénombrabilité de l'ensemble des nombres réels, est annoncé pour la première fois dans une lettre à Dedekind datée du 7 décembre 1873. Il est publié l'année suivante au Journal de Crelle, sous le titre « Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen »[3]. Ce court article contient deux résultats portant sur la possibilité ou non de numéroter les nombres réels.

1.2. Un résultat positif...

Les nombres réels sont les coordonnées des points d'une droite. Ils incluent en particulier les nombres entiers $0, 1, 2, \ldots$ et les nombres rationnels, de la forme p/q avec p, q entiers et q non nul. Ils incluent aussi beaucoup de nombres irrationnels. Un nombre réel (ou complexe) α est dit *algébrique* s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution. Tout nombre entier est algébrique, puisque l'entier n est l'(unique) solution de l'équation $x - n = 0$. Tout nombre rationnel est algébrique, puisque le rationnel p/q est l'(unique) solution de l'équation $qx - p = 0$. Un exemple typique de nombre algébrique non rationnel est $\sqrt{2}$, qui est solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$. Il existe énormément de nombres algébriques : tout nombre réel pouvant être écrit à partir des nombres entiers à l'aide des opérations $+, -, \times, /, \sqrt{\ }, \sqrt[3]{\ }, \sqrt[5]{\ }$, ... est algébrique, et il en existe encore bien d'autres puisque, depuis Abel, on sait qu'il existe des équations algébriques dont les solutions ne peuvent pas être exprimées à l'aide des opérations précédentes.

Pourtant, Cantor démontre dans [2] :

Théorème 1. *On peut numéroter les nombres algébriques.*

Autrement dit : *Il n'existe pas plus de nombres algébriques que d'entiers naturels.*

La démonstration de Cantor n'est pas difficile.

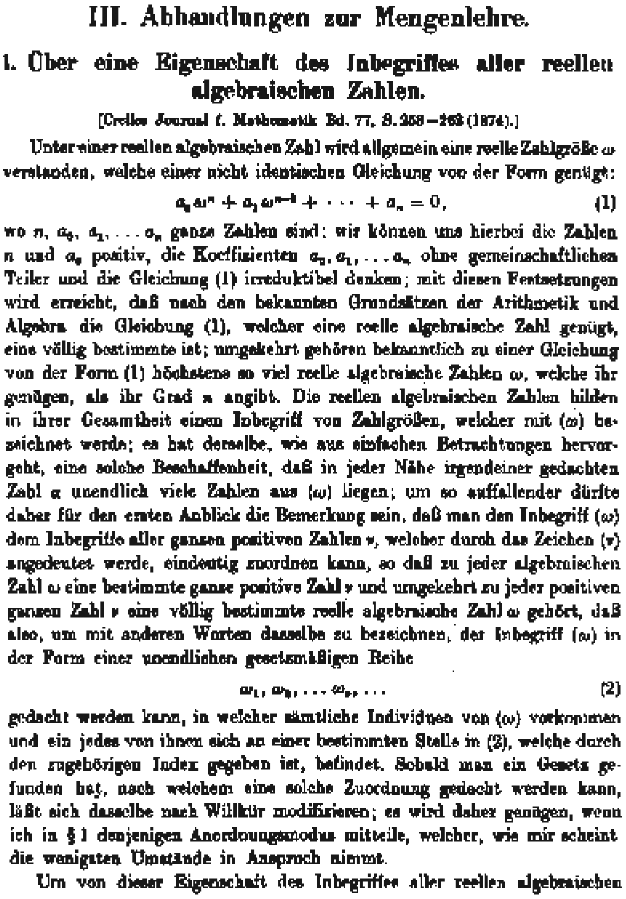
Démonstration. Pour toute équation algébrique E

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad \text{avec } a_0 > 0,$$

appelons *hauteur* de E l'entier

$$a_0 + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| + |a_n| + n,$$

3 Sur une propriété de la collection de tous les nombres algébriques.



III. Abhandlungen zur Mengenlehre.

1. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.

[Crelles Journal f. Mathematik Bd. 77, S. 258–262 (1874).]

Unter einer reellen algebraischen Zahl wird allgemein eine reelle Zahlgröße ω verstanden, welche einer nicht identischen Gleichung von der Form genügt:

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \qquad (1)$$

wo $n, a_0, a_1, \ldots a_n$ ganze Zahlen sind; wir können uns hierbei die Zahlen n und a_0 positiv, die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ ohne gemeinschaftlichen Teiler und die Gleichung (1) irreduktibel denken; mit diesen Festsetzungen wird erreicht, daß nach den bekannten Grundsätzen der Arithmetik und Algebra die Gleichung (1), welcher eine reelle algebraische Zahl genügt, eine völlig bestimmte ist; umgekehrt gehören bekanntlich zu einer Gleichung von der Form (1) höchstens so viel reelle algebraische Zahlen ω, welche ihr genügen, als ihr Grad n angibt. Die reellen algebraischen Zahlen bilden in ihrer Gesamtheit einen Inbegriff von Zahlgrößen, welcher mit (ω) bezeichnet werde; es hat derselbe, wie aus einfachen Betrachtungen hervorgeht, eine solche Beschaffenheit, daß in jeder Nähe irgendeiner gedachten Zahl α unendlich viele Zahlen aus (ω) liegen; um so auffallender dürfte daher für den ersten Anblick die Bemerkung sein, daß man den Inbegriff (ω) dem Inbegriffe aller ganzen positiven Zahlen ν, welcher durch das Zeichen (ν) angedeutet werde, eindeutig zuordnen kann, so daß zu jeder algebraischen Zahl ω eine bestimmte ganze positive Zahl ν und umgekehrt zu jeder positiven ganzen Zahl ν eine völlig bestimmte reelle algebraische Zahl ω gehört, daß also, um mit anderen Worten dasselbe zu bezeichnen, der Inbegriff (ω) in der Form einer unendlichen gesetzmäßigen Reihe

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots \qquad (2)$$

gedacht werden kann, in welcher sämtliche Individuen von (ω) vorkommen und ein jedes von ihnen sich an einer bestimmten Stelle in (2), welche durch den zugehörigen Index gegeben ist, befindet. Sobald man ein Gesetz gefunden hat, nach welchem eine solche Zuordnung gedacht werden kann, läßt sich dasselbe nach Willkür modifizieren; es wird daher genügen, wenn ich in § 1 denjenigen Anordnungsmodus mitteile, welcher, wie mir scheint, die wenigsten Umstände in Anspruch nimmt.

Um von dieser Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen

FIG. 1. La première page de l'article de 1874 – ici reproduit dans les œuvres complètes de Cantor

et disons qu'un nombre algébrique α *admet la hauteur* N si α est racine d'au moins une équation de hauteur N. Noter qu'un nombre algébrique donné admet certainement une infinité de hauteurs.

Par construction, la hauteur d'une équation est au moins 2. Il existe une seule équation de hauteur 2, à savoir

$$x = 0,$$

et, par conséquent, un seul réel admettant la hauteur 2, à savoir 0.

De même, il existe quatre équations de hauteur 3, à savoir

$$2x = 0, \quad x + 1 = 0, \quad x - 1 = 0, \quad \text{et} \quad x^2 = 0,$$

et, par conséquent, trois réels admettent la hauteur 3, à savoir $-1, 0, 1$.

Alors, pour toute valeur de l'entier N, il n'existe qu'un nombre fini d'équations de hauteur N, borné supérieurement par $(2N)^N$, et, de là, un nombre fini de réels algébriques admettant la hauteur N, borné supérieurement par $(2N)^N \cdot N$ puisqu'une équation de degré n a au plus n racines.

On peut alors numéroter les nombres algébriques comme suit : on numérote tous les nombres algébriques admettant la hauteur 2, puis tous les nombres algébriques admettant la hauteur 3, puis tous les nombres algébriques admettant la hauteur 4, *etc.* Comme tout nombre algébrique admet une hauteur, la liste ainsi constituée – qui est redondante – contient tous les nombres algébriques. □

1.3. ... et un résultat négatif

Par contre, si on considère la collection de tous les nombres réels, la situation est différente, et c'est le second résultat démontré dans [2].

Théorème 2. *On ne peut pas numéroter les nombres réels.*

Démonstration. Soit $\alpha_0, \alpha_1, ...$ une suite quelconque de nombres réels. On va exhiber un nombre réel α qui est différent de chacun des nombres α_n, ce qui montre qu'aucune numérotation des nombres réels ne peut être exhaustive. Sans restreindre la généralité, on suppose $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$.

On va s'efforcer d'extraire de la suite des α_n une sous-suite $\alpha_{n_0}, \alpha_{n_1}, ...$ vérifiant

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < ... < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}. \tag{1}$$

On part de $n_0 = 0$ et $n_1 = 1$, et donc de $\alpha_{n_0} = 0$ et $\alpha_{n_1} = 1$. On procède par récurrence. Supposons $i \geqslant 1$ et n_i construit. Alors de deux choses l'une.

Ou bien aucun entier n ne vérifie

$$n > n_i \quad \text{et} \quad \alpha_n \text{ est entre } \alpha_{n_{i-1}} \text{ et } \alpha_{n_i} \text{ (strictement)}, \tag{2}$$

auquel cas on pose $\alpha = (\alpha_{n_{i-1}} + \alpha_{n_i})/2$, et alors α est distinct de α_n pour tout n.

Ou bien il existe n vérifiant (2), et alors on définit n_{i+1} comme étant le plus petit tel entier. Notons que, dans ce cas, pour chaque entier n vérifiant $n_i < n < n_{i+1}$, le réel α_n n'est *pas* entre α_{n_i} et $\alpha_{n_{i+1}}$ (sinon ce serait cet entier n qui aurait été choisi pour n_{i+1}).

Si la construction n'a pas avorté, on a obtenu des nombres réels α_{n_i} vérifiant (1). La complétude de $\mathbb{R}$ implique qu'il existe au moins un nombre réel α coincé entre les deux demi-suites, c'est-à-dire vérifiant

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < ... < \alpha < ... < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}. \tag{3}$$

Alors α ne peut être égal à aucun des réels α_n. Par (3), c'est clair lorsque n est de la forme n_i. Sinon, il existe i tel que n est entre n_i et n_{i+1}. Mais alors, par construction, α est entre α_{n_i} et $\alpha_{n_{i+1}}$, alors que α_n n'y est pas, ainsi qu'on l'a noté ci-dessus. On a donc à nouveau $\alpha \neq \alpha_n$. □

Cantor observe que le rapprochement des théorèmes 1 et 2 permet de redémontrer l'existence de réels non algébriques, établie pour la première fois par Liouville en 1851.

1.4. En quoi ces résultats sont remarquables

L'infini apparaît dans les textes mathématiques dès l'Antiquité, mais il y apparaît en creux, comme une propriété négative (est infini ce qui n'est pas fini) et une limite inatteignable, mais non comme un objet d'étude en soi.

Vers le milieu du dix-neuvième siècle, une maturation s'est opérée et on commence à réfléchir sur l'infini en des termes plus mathématiques. Par exemple, dans un texte posthume intitulé « Paradoxien des Unendlichen »[4] paru en 1851, Bernhard Bolzano (1781–1848) observe qu'il y a autant d'éléments dans l'intervalle réel $[0, 5]$ que dans l'intervalle $[0, 12]$, et donc que, dans une collection infinie, une partie propre peut être aussi grosse que le tout – mais c'est ce qu'avait déjà fait Thâbit bin Qurrâ al-Harrânî (836–901) mille ans plus tôt. Pour autant, l'infini reste *terra incognita* et objet de nul résultat ou démonstration, ni même définition puisque la propriété rappelée ci-dessus ne sera explicitement proposée comme définition de l'infini que par Richard Dedekind vers 1888.

Ce qui est profondément novateur dans l'article de Cantor est le fait de *démontrer* des propriétés de l'infini. Ce que fait Cantor, c'est démontrer le premier théorème sur l'infini, en l'occurrence qu'il existe non pas un infini, mais au moins deux : l'infini des nombres algébriques est le même que celui des nombres entiers, mais ce n'est pas le même que celui des nombres réels. Indépendamment de l'énoncé du résultat, qui n'est peut-être pas si important en soi, c'est la possibilité de son existence qui est novatrice : avec Cantor, l'infini devient objet d'étude. La lettre à Dedekind de décembre 1873 est donc le point de naissance d'une théorie mathématique complètement nouvelle, la théorie de l'infini – qui sera plutôt appelée la théorie des ensembles. Il est rare que le point de départ de ce qui deviendra un courant de pensée aussi important puisse être daté avec autant de précision.

Un point mérite d'être relevé. Cantor a intitulé son article « Sur une propriété de la collection des nombres algébriques », ce qui correspond au théorème 1, mais non au théorème 2, qui pourtant nous apparaît aujourd'hui comme le résultat le plus novateur. Comme dans [4], on peut se demander si l'accent mis sur le résultat positif (on peut énumérer...) plutôt que sur le résultat négatif (on ne peut pas énumérer...) n'est pas une précaution de Cantor pour éviter le rejet de son article par Leopold Kronecker (1823–1891), alors éditeur du Journal de Crelle et grand contempteur de l'infini et de toutes les spéculations qu'on appellerait aujourd'hui non effectives.

1.5. L'argument diagonal

En 1891, dix-huit ans après l'article de 1874, Cantor publie une nouvelle démonstration du théorème 2, encore plus simple et frappante, et passée à la postérité comme la démonstration de référence. L'argument dit *diagonal* qui est à la base de cette démonstration a des éléments communs avec une construction développée dès 1875 par Paul du Bois-Reymond (1831–1889), mais la combinaison d'une autoréférence et d'une négation, qui est le point décisif, y apparaît semble-t-il pour la première fois. On sait que cet argument a eu une descendance extraordinaire, puisqu'il est l'ingrédient technique de base dans plusieurs des grands

[4] Paradoxes de l'infini.

résultats de la logique du vingtième siècle, notamment le paradoxe de Russell, les théorèmes d'incomplétude de Gödel, la construction d'ensembles indécidables par Turing, et les théorèmes de hiérarchie en théorie de la complexité.

Démonstration du théorème 2 par l'argument diagonal. Soit $\alpha_0, \alpha_1, ...$ une suite quelconque de nombres réels. On va à nouveau exhiber un nombre réel α qui est différent de chacun des α_n. Cette fois, on n'utilise pas l'ordre des nombres réels, mais l'existence d'un développement binaire pour chaque nombre réel. Pour chaque entier n, il existe une suite infinie $(a_{n,1}, a_{n,2}, ...)$ de 0 et de 1 telle qu'on ait

$$\alpha_n - E(\alpha_n) = \overline{0, a_{n,1}a_{n,2}...},$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Posons alors $0^* = 1$, $1^* = 0$, et soit α le réel dont le développement binaire est

$$\overline{0, a^*_{1,1}a^*_{2,2}...}.$$

Alors, quel que soit n, le réel α est différent de α_n, puisque le n-ième chiffre du développement de α_n est $a_{n,n}$, alors que celui de α est $a^*_{n,n}$, qui est différent de $a_{n,n}$ par construction[5]. $\square$

2. L'héritage (1) : les ordinaux

La descendance de l'article de Cantor est extraordinaire puisque c'est toute la théorie des ensembles et, de là, une part non négligeable des mathématiques du vingtième siècle qui peuvent s'y rattacher. Cette descendance peut être décrite en partant des travaux ultérieurs de Cantor. Toujours à Halle, où il devient professeur en 1879 à trente-quatre ans, Cantor s'intéresse de plus en plus à ce qui deviendra la théorie des ensembles et, entre 1879 et 1884, il publie dans les *Mathematische Annalen* une série de six articles qui forment le socle de cette théorie.

Dans cet héritage, on distinguera ici deux thèmes principaux, le premier étant la possibilité de compter au-delà du fini, qui mène à la notion d'ordinal transfini.

2.1. Une théorie des nombres transfinis

Ce que montre Cantor, c'est que, une fois franchie la barrière conceptuelle qui rendait l'infini inaccessible, alors rien ne s'oppose à développer une arithmétique des nombres infinis – ou, plutôt, transfinis, c'est-à-dire au-delà du fini – qui ressemble beaucoup à l'arithmétique des nombres entiers et peut être utilisée en particulier pour des démonstrations par récurrence.

L'idée est de prolonger la suite des nombres entiers, c'est-à-dire de *compter* au-delà de $0, 1, 2, ...$. Pour ce faire, le principe placé par Cantor à la base de sa

[5] Tel quel, l'argument n'est pas rigoureux, car il suppose l'unicité du développement binaire, laquelle n'est vraie que pour les réels qui ne sont pas des rationnels dyadiques (rationnels pouvant s'écrire avec un dénominateur qui est une puissance de 2) : ces derniers admettent deux développements, l'un terminé par une infinité de 0, l'autre par une infinité de 1. Pour rendre l'argument rigoureux, il suffit de considérer le réel α' dont le développement binaire est $\overline{0, 1a^*_{1,2}0a^*_{2,4}1a^*_{3,6}0a^*_{4,8}...}$ ce réel n'est certainement pas dyadique, et il diffère de α_n pour tout n. En effet, si α_n est dyadique, on a $\alpha' \neq \alpha_n$ puisque α' n'est pas dyadique, et, sinon, on a $\alpha' \neq \alpha_n$ puisque le $2n$-ième chiffre du développement (unique) de α' n'est pas celui du développement (unique) de α_n.

FIG. 2. Georg Cantor, probablement dans les années 1880

construction est une propriété bien connue pour les nombres entiers et au cœur des démonstrations par récurrence, à savoir que tout ensemble non vide a un plus petit élément. Ce qu'observe Cantor, c'est que, si on garde ce principe, alors il n'existe qu'une façon de prolonger la suite des entiers. Par exemple, il doit exister un plus petit nombre transfini plus grand que tous les entiers, et Cantor l'appelle ω. Ensuite, il doit exister un plus petit nombre transfini plus grand que ω, et Cantor l'appelle $\omega+1$. Évidemment, viennent ensuite $\omega+2$, $\omega+3$, *etc.*, puis un plus petit nombre transfini qui est plus grand que tous les $\omega+n$ et qu'on appelle $\omega+\omega$, ou encore $\omega\cdot 2$. On continue avec $\omega\cdot 2+1$, puis, un peu plus tard, $\omega\cdot 3$, et ainsi de suite. Il existe un plus petit nombre transfini qui vient après tous les $\omega\cdot n$, et on le note $\omega\cdot\omega$, ou encore ω^2. Il n'y aucune raison de s'arrêter en si bon chemin, et on trouve encore plus tard ω^3, ω^4, puis ω^ω, puis ω^{ω^2}, et même un jour ω^{ω^ω}, ... et encore bien d'autres nombres transfinis au-delà.

Ce que démontre Cantor – sans toutefois convaincre le très réticent Kronecker – c'est que la description ci-dessus n'est pas juste une extrapolation gratuite et hasardeuse, mais un système cohérent pouvant être utilisé dans des démonstrations. Par exemple, lui-même l'utilise en 1883 dans l'étude des ensembles d'unicité pour démontrer au moyen d'une récurrence sur les nombres transfinis, et en même temps que le mathématicien suédois Ivar Bendixson (1861–1935), un résultat demeuré fameux sur la structure des sous-ensembles fermés de la droite réelle, à savoir que tout tel ensemble peut s'écrire comme réunion d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble dont tous les points sont points d'accumulation.

2.2. Une application amusante

Les nombres transfinis – aujourd'hui appelés *ordinaux* – sont un moyen puissant de démontrer des résultats mathématiques. Ce qui est intéressant, et peut paraître paradoxal, c'est que l'utilisation des ordinaux infinis permet parfois de démontrer des propriétés d'objets finis qui resteraient sinon inaccessibles. Un exemple spectaculaire est fourni par la convergence des suites de Goodstein en arithmétique. Il s'agit de suites d'entiers définies par une récurrence simple à partir de la notion de développement itéré en base p. Développer un entier n en base p consiste à décomposer n sous forme d'une somme décroissante

$$n = p^{n_1} \cdot c_1 + \cdots + p^{n_k} \cdot c_k$$

où les chiffres c_i sont compris entre 1 et $p-1$, et où les exposants n_i sont des entiers, nécessairement strictement inférieurs à n. On peut alors exprimer les exposants n_i eux-mêmes en base p, et itérer le processus. On appellera développement *itéré* de n en base p l'expression ainsi obtenue. Par exemple, le développement de 26 en base 2 est $2^4 + 2^3 + 2^1$: le développement de 4 est 2^2, celui de 3 est $2^1 + 1$, et, finalement, le développement itéré de 26 en base 2 est $2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1$, ou encore $2^{2^2} + 2^{2+1} + 2$ si on omet les exposants 1.

Définition 1. (i) *Pour $q \geqslant p \geqslant 2$, on définit $T_{p,q} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ comme suit : $T_{p,q}(n)$ est l'entier obtenu en remplaçant partout p par q dans le développement itéré de n en base p, et en évaluant le résultat.*

(ii) *Pour chaque entier d, on définit la* suite de Goodstein de base d *comme la suite d'entiers $g_2, g_3, \ldots$ vérifiant $g_2 = d$ puis, inductivement,*

$$g_{p+1} = T_{p,p+1}(g_p) - 1$$

si g_p est non nul, et $g_{p+1} = 0$ si g_p est nul.

Par exemple, partant de $g_2 = 26$, on trouve

$$T_{2,3}(26) = T_{2,3}(2^{2^2} + 2^{2+1} + 2) = 3^{3^3} + 3^{3+1} + 3 = 3^{27} + 3^4 + 3 = 7625597485071,$$

et donc $g_3 = 7625597485070$. On recommence ensuite de même en remplaçant 3 par 4, et ainsi de suite. Il semble clair que la suite ainsi obtenue tend vers l'infini extrêmement vite. Et, pourtant, Reuben Goodstein (1912-1985) a démontré en 1942 le résultat suivant :

Théorème 3. *Pour tout entier d, la suite de de Goodstein de base d converge vers 0 : il existe un entier p vérifiant $g_p = 0$.*

Démonstration. L'argument est très simple à partir du moment où on peut utiliser l'arithmétique ordinale. Pour cela, nous introduisons, pour chaque entier p, une fonction $T_{p,\omega}$ analogue à $T_{p,q}$, mais qui va de $\mathbb{N}$ dans les ordinaux : $T_{p,\omega}(n)$ est l'ordinal obtenu en remplacant p par ω dans le développement itéré de n en base p. Ainsi, par exemple, on a

$$T_{2,\omega}(26) = T_{2,\omega}(2^{2^2} + 2^{2+1} + 2) = \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega+1} + \omega.$$

Les propriétés de l'arithmétique des ordinaux entraînent facilement que chacune des fonctions $T_{p,\omega}$ est strictement croissante. Alors, pour $p \geqslant 2$, on pose $\widetilde{g}_p = T_{p,\omega}(g_p)$. Pour chaque entier d, on a ainsi une suite d'ordinaux $\widetilde{g}_2, \widetilde{g}_3$, ... Par construction, quels que soient p, q, r vérifiant $2 \leqslant p \leqslant q \leqslant r \leqslant \omega$, et quel que soit n, on a $T_{q,r}(T_{p,q}(n)) = T_{p,r}(n)$, et, en particulier, $T_{p+1,\omega}(T_{p,p+1}(n)) = T_{p,\omega}(n)$. On en déduit, pour tout p tel que g_p soit non nul,

$$\begin{aligned}\widetilde{g}_{p+1} = T_{p+1,\omega}(g_{p+1}) &= T_{p+1,\omega}(T_{p,p+1}(g_p) - 1) \\ &< T_{p+1,\omega}(T_{p,p+1}(g_p)) = T_{p,\omega}(g_p) = \widetilde{g}_p.\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{g}_2 \arrow[r, equal] & \widetilde{g}_2 \arrow[r, ">"] & \widetilde{g}_3 \arrow[r, equal] & \widetilde{g}_3 \arrow[r, ">"] & \widetilde{g}_4 \arrow[r, equal] & \cdots \\
g_2 \arrow[u, "T_{2,\omega}"'] \arrow[r, "T_{2,3}"'] & \bullet \arrow[u, "T_{3,\omega}"'] \arrow[r, "-1"'] & g_3 \arrow[u, "T_{3,\omega}"'] \arrow[r, "T_{3,4}"'] & \bullet \arrow[u, "T_{4,\omega}"'] \arrow[r, "-1"'] & g_4 \arrow[u, "T_{4,\omega}"'] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

FIG. 3. Démonstration du théorème de Goodstein : en bas, les entiers, en haut, leurs images chez les ordinaux infinis, qui gomment les changements de base ; ne restent alors que les -1 qui forcent la décroissance aussi longtemps que 0 n'est pas atteint

La propriété fondamentale de la suite des ordinaux, à savoir que tout ensemble non vide a un plus petit élément, entraîne que toute suite strictement décroissante d'ordinaux doit être finie. Il existe donc nécessairement un entier p tel que $\widetilde{g}_p$ soit nul, ce qui ne peut se produire que si g_p est également nul (figure 3). □

Le point essentiel dans la démonstration précédente est l'existence de l'ordinal ω, c'est-à-dire l'existence d'un nombre transfini qui domine tous les entiers à la façon dont ω le fait, c'est-à-dire qui soit tel que la distance de 3 à ω soit la même que celle de 2 à ω.

Ce qui est remarquable est que le théorème 3, qui est un pur résultat d'arithmétique, au sens où son énoncé ne met en jeu que les entiers et leurs opérations élémentaires, et qu'on a démontré si simplement en utilisant les ordinaux infinis, ne peut *pas* être démontré sans faire appel à un tel outil. Précisément, s'appuyant sur une méthode développée par Paris et Harrington en 1978, Kirby et Paris ont démontré en 1981 [16] que le théorème de Goodstein ne peut pas être démontré en utilisant seulement les axiomes du système de Peano, c'est-à-dire en restant dans le cadre de l'arithmétique usuelle. En un sens, ce résultat légitime la suspicion de Kronecker envers les méthodes de Cantor[6] ; en un autre sens, il illustre la portée visionnaire de ces dernières.

2.3. Les ordinaux aujourd'hui

Plus d'un siècle plus tard, les tensions sont apaisées, les questions de fondement ont été éclaircies, et les ordinaux et la récurrence transfinie font partie de la palette des mathématiciens. Pour autant, à l'exception de la logique mathématique et de certaines parties de l'informatique théorique (terminaison des systèmes de réécriture) qui en font grand usage, force est de constater que ces outils, pourtant aussi élégants que puissants, restent assez peu utilisés dans le cœur des mathématiques – à quelques notables exceptions près comme le théorème de Martin sur la détermination des boréliens. Ceci n'est pas très étonnant dans la mesure où, finalement, les mathématiques ne font qu'un usage assez limité de l'infini actuel, c'est-à-dire d'un infini qui ne soit pas simplement la continuation indéfinie de la suite des entiers.

[6] Kronecker n'aurait certainement pas été rassuré d'apprendre que le plus petit entier p pour lequel le p-ième terme de la suite de Goodstein de base 4 vaut zéro est $3 \cdot 2^{402653211} - 2$.

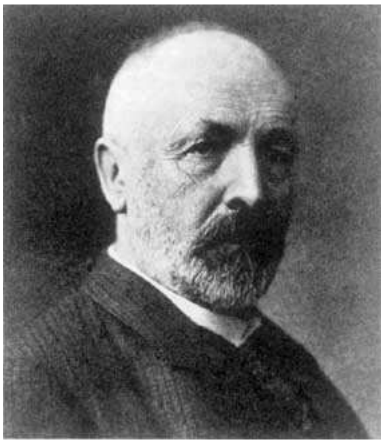


FIG. 4. Georg Cantor, probablement aux alentours de 1900

3. L'héritage (2) : le problème du continu

L'autre héritage direct de l'article de 1874 est la théorie des cardinaux et son problème central, le problème du continu, qui est la question de déterminer le cardinal de l'ensemble des nombres réels. Cantor a cherché pendant toute la suite de sa vie la solution au problème du continu. Resté à Halle – l'opposition de Kronecker l'empêcha de trouver un poste à Berlin – il continua à y développer sa théorie des ensembles, avec des résultats notables comme l'argument diagonal de 1891 ou le théorème de comparabilité des cardinalités de 1897, mais il ne résolut jamais le problème du continu. La fin de sa vie est assez triste. Bien que la portée scientifique de son œuvre ait été largement reconnue par ses pairs, sa vie à partir de 1884, et jusqu'à sa mort en 1918, a été assombrie par des polémiques scientifiques et surtout des épisodes dépressifs de plus en plus sévères qui ont entraîné des internements récurrents dans des institutions de soin.

De son côté, le problème du continu est resté au cœur de la théorie des ensembles tout au long du vingtième siècle et aujourd'hui plus que jamais, à un moment où l'espoir d'une solution commence à se dessiner.

3.1. Une infinité d'infinis

Le théorème 2 a montré qu'il existe au moins deux infinis qu'on ne peut pas mettre en correspondance bijective, à savoir celui de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et celui de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Intuitivement donc, ces infinis n'ont pas la même taille, et le théorème 2 ouvre une nouvelle problématique qui est celle de comparer la taille des infinis.

Rapidement, dès 1878, Cantor a proposé de formaliser la comparaison des tailles dans les termes que nous utilisons toujours, à savoir l'existence de bijections et d'injections : on déclare qu'un ensemble A, fini ou infini, a la même taille (ou cardinalité) qu'un ensemble B s'il existe une bijection de A sur B de même, on déclare que A est de taille (ou de cardinalité) au plus celle de B s'il existe une injection de A dans B. Noter que, dans le cas d'ensembles finis, ces définitions correspondent bien à la comparaison usuelle des nombres d'éléments. En 1897, Cantor et, au même moment, Felix Bernstein (1878–1956) et Ernst Schröder (1841–1902) montreront que cette comparaison des cardinalités est un ordre total : s'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A, alors il existe une bijection de A sur B.

On notera aussi que la théorie des cardinalités infinies se sépare rapidement de celle des ordinaux transfinis : alors que, pour les ensembles finis, dénombrer et ordonner sont des tâches équivalentes, il n'en est pas de même pour les ensembles infinis. Précisément, il n'existe qu'un seul type d'ordre total sur un ensemble fini de cardinalité donnée, alors qu'il existe de multiples ordres totaux deux à deux non isomorphes sur un ensemble infini. Par exemple, du point de vue de la taille, les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont équivalents, alors que, munis de leurs ordres usuels, ils ne le sont pas.

Dans ce contexte, le théorème 2 affirme qu'il existe au moins deux cardinalités infinies distinctes. Cantor lui-même montrera un résultat beaucoup plus fort grâce à une forme de l'argument diagonal.

Théorème 4 (Cantor)**.** *Il existe une infinité d'infinis deux à deux distincts : les cardinalités de* $\mathbb{N}$, $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{N}))$, *... sont deux à deux distinctes.*

Démonstration. On commence par démontrer que, quel que soit l'ensemble E, il n'existe pas de surjection, et donc *a fortiori* pas de bijection, de E sur l'ensemble des parties $\mathfrak{P}(E)$. En effet, soit f une application quelconque de E dans $\mathfrak{P}(E)$. On va montrer que f n'est pas surjective en exhibant une partie de E qui n'appartient pas à l'image de f. À cet effet, posons

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}. \tag{4}$$

Soit a un élément quelconque de E. De deux choses l'une. Ou bien a est dans A, ce qui signifie que a n'appartient pas à $f(a)$. Comme a est dans A, c'est que $f(a)$ n'est pas égal à A. Ou bien a est dans le complémentaire de A, ce qui signifie que a appartient à $f(a)$. Comme a n'est pas dans A, c'est à nouveau que $f(a)$ n'est pas égal à A. Donc A ne peut appartenir à l'image de l'application f, et celle-ci ne peut être surjective.

Ceci démontré, posons $E_0 = \mathbb{N}$, $E_1 = \mathfrak{P}(E_0)$, $E_2 = \mathfrak{P}(E_1)$, etc. D'après ce qui précède, quel que soit i, il ne peut exister de bijection de E_i sur E_{i+1}. Par ailleurs, pour tout ensemble non vide E, l'application qui envoie X sur x si X est le singleton $\{x\}$, et sur un élément fixé x_0 sinon, est une surjection de $\mathfrak{P}(E)$ sur E. Par conséquent, pour tous i, j vérifiant $j \geqslant i+2$, il existe une surjection de E_j sur E_{i+1}. De là, s'il existait une bijection de E_i sur E_j, on en déduirait par composition une surjection de E_i sur E_{i+1}, contrairement à ce qu'on a vu plus haut. $\square$

On reconnaît dans la démonstration du théorème 4 les deux ingrédients de l'argument diagonal, à savoir la combinaison d'une autoréférence – utilisation simultanée de x et $f(x)$ ici, comme celle des chiffres diagonaux $a_{i,i}$ dans la section 1 – et d'une négation – $x \notin f(x)$ ici, utilisation de $a^*_{i,i}$ dans la section 1.

3.2. L'hypothèse du continu

Dès lors qu'il existe une infinité de cardinalités infinies différentes, une question évidente est de déterminer la position des cardinalités des ensembles les plus usuels, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$, dans cette famille. Pour ce qui est de la cardinalité de $\mathbb{N}$, on voit facilement que c'est la plus petite des cardinalités infinies : $\mathbb{N}$ s'injecte dans tout ensemble infini[7]. D'après le théorème 2, la cardinalité de $\mathbb{R}$ est strictement plus grande que celle de $\mathbb{N}$. Ce qu'on appelle le *problème du continu*[8], c'est précisément de déterminer quel infini est la cardinalité de $\mathbb{R}$.

Dès 1877 – avant même d'avoir établi l'existence d'une infinité d'infinis et la comparabilité de ceux-ci – Cantor a prédit une solution au problème du continu, l'*hypothèse du continu* :

Toute partie infinie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas en bijection avec $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{R}$.

L'hypothèse du continu signifie qu'il n'existe aucun ensemble de taille strictement intermédiaire entre celles de $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, en termes de cardinalités, que la cardinalité de $\mathbb{R}$ (le continu) est un successeur immédiat pour celle de $\mathbb{N}$ (le dénombrable).

Cantor n'a jamais réussi à démontrer (ou à réfuter) l'hypothèse du continu. Le seul résultat notable qu'il démontra sur le problème du continu est le théorème dit de Cantor–Bendixson sur la structure des fermés mentionné plus haut. Celui-ci entraîne facilement que tout sous-ensemble fermé infini de $\mathbb{R}$ qui n'est pas en bijection avec $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{R}$ entier : ainsi, on peut dire que les fermés satisfont à l'hypothèse du continu. Hélas, Cantor ne put jamais obtenir de résultat analogue pour des sous-ensembles plus compliqués de $\mathbb{R}$ – et les développements de la théorie des ensembles au vingtième siècle montrent qu'on était très loin à l'époque de disposer des moyens techniques de le faire.

Par contre, sans résoudre en rien la question, les travaux ultérieurs de Cantor permettent de donner du problème du continu la version symbolique concise sous laquelle il est souvent énoncé aujourd'hui. Le point de départ est un nouveau résultat fondamental de Cantor qui précise considérablement le théorème 4 et le théorème de Cantor–Bernstein–Schröder.

Théorème 5 (Cantor)**.** *Il existe une suite de cardinalités indexée par les ordinaux*

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \dots$$

telle que tout[9] *ensemble infini admet pour cardinalité un (et un seul) des alephs*[10].

Ainsi, non seulement il existe une infinité d'infinis, mais on a une description complète de la structure de cette famille des infinis, à savoir une suite bien ordonnée indexée par les ordinaux. Le théorème 5 affirme en particulier que, pour chaque cardinalité κ, il existe une plus petite cardinalité strictement plus grande que κ, ce qui n'a rien d'évident : il aurait très bien pu se faire *a priori* que l'ordre des cardinalités inclue des intervalles denses, comme l'ordre des nombres rationnels.

[7] En termes modernes, il faut au moins une forme faible de l'axiome du choix pour pouvoir affirmer ceci ; ces questions somme toute mineures n'interviendront que plus tard, et n'affectent pas vraiment la théorie cantorienne des cardinaux qui est, principalement, une théorie des ensembles bien ordonnables, c'est-à-dire une théorie où l'axiome du choix est valide.

[8] À l'époque de Cantor, l'ensemble des nombres réels est appelée *le continu*.

[9] Ici encore, il convient de préciser « tout ensemble infini bien ordonnable » pour tenir compte des problèmes de choix

[10] $\aleph$ est la première lettre, aleph, de l'alphabet hébraïque.

Dans ce contexte, $\aleph_0$ est la cardinalité de $\mathbb{N}$, et le problème du continu devient celui de déterminer quel aleph est la cardinalité de $\mathbb{R}$. L'hypothèse du continu prend alors la forme simple $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1$, puisque $\aleph_1$ est, par définition, le successeur immédiat de $\aleph_0$ dans la suite des alephs.

Par ailleurs, il est facile de définir une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, donc entre $\mathbb{R}$ et l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$. Puisque la cardinalité de $\mathbb{N}$ est $\aleph_0$, il est naturel de noter $2^{\aleph_0}$ celle de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, qui est donc aussi celle de $\mathbb{R}$. Avec ce formalisme, l'hypothèse du continu correspond donc à l'égalité

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

3.3. Le développement d'une discipline nouvelle

En 1900, David Hilbert (1862–1943) expose au Congrès International des Mathématiciens à Paris sa fameuse liste de vingt-trois problèmes pour les mathématiques du vingtième siècle, et place au premier rang la question de savoir si l'hypothèse du continu est vraie ou fausse. C'est le signe que les réticences sur l'usage de l'infini autrement que comme limite inatteignable ont été dépassées et que le caractère fondamental de l'œuvre de Cantor a été reconnu. Hilbert décrit l'arithmétique transfinie de Cantor comme « le produit le plus étonnant de la pensée mathématique, et une des plus belles réalisations de l'activité humaine dans le domaine de l'intelligence pure ».

Les progrès directs sur le problème du continu ont été lents, car ils n'ont pu se produire qu'après le développement d'un substrat considérable. Dans la lignée du théorème de Cantor–Bendixson montrant que les fermés satisfont à l'hypothèse du continu, un résultat précoce est le théorème démontré en 1916, à l'âge de vingt ans, par Pavel Alexandroff (1896–1982) : les boréliens satisfont à l'hypothèse du continu[11]. On sait maintenant que ce résultat est l'optimum de ce qui pouvait être établi à l'époque, et cette direction de recherche n'a pu être poursuivie qu'à partir des années 1970 avec le développement de ce qu'on appelle la théorie descriptive des ensembles moderne, à savoir l'étude fine des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

La grande difficulté du problème du continu et, plus généralement, de toutes les questions mettant en jeu l'infini, et ce qui rendait pratiquement impossible une solution à l'époque de Cantor, était l'absence d'un cadre conceptuel à la fois précis et objet d'un consensus général pour élaborer une théorie et démontrer des résultats. Cantor a bien proposé une définition devenue classique de la notion d'ensemble – « n'importe quelle collection M d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés ; ces objets sont appelés éléments de M »– mais cela ne saurait suffire à préciser la règle du jeu, c'est-à-dire à déterminer d'où partir pour *démontrer* des propriétés des ensembles. Cantor lui-même a reconnu, en même temps que d'autres comme Cesare Burali-Forti (1861–1931) ou Bertrand Russell (1872–1970), les difficultés où mène l'imprécision de la notion d'objet défini, et ce n'est qu'à partir du début du vingtième siècle que ces points ont commencé à être éclaircis : ce qui importe au mathématicien n'est point de définir ce qu'*est* un ensemble, mais simplement d'obtenir un consensus sur la façon dont *fonctionnent* les ensembles, c'est-à-dire sur le point de départ à partir duquel démontrer des

[11] Mais Alexandroff, déçu de n'avoir pas résolu le problème du continu, devint producteur de théâtre et ne revint aux mathématiques que des années plus tard.

théorèmes. En 1908, Ernst Zermelo (1871–1953) a proposé un système axiomatique pour les ensembles, ultérieurement amendé en 1922 par Adolf Fraenkel (1891–1965), et ce système, connu sous le nom de *système de Zermelo–Fraenkel* ou système ZF, s'est assez rapidement imposé comme un point de départ standard pour la théorie des ensembles, à la façon dont le système d'Euclide est un point de départ pour la géométrie du plan ou le système de Peano en est un pour l'arithmétique.

3.4. Deux résultats majeurs...

À partir du moment où un consensus était établi pour tenir le système ZF comme point de départ d'une théorie des ensembles, la première étape en direction d'une solution du problème du continu est de déterminer si l'hypothèse du continu est ou non une conséquence des axiomes de ce système. Ce n'est pas le cas : Kurt Gödel (1906–1978) d'abord, puis, vingt-cinq ans plus tard, Paul Cohen (1934–2007), ont montré deux résultats négatifs :

Théorème 6 (Gödel, 1938)**.** *Sauf si ceux-ci sont contradictoires*[12]*, la négation de l'hypothèse du continu n'est pas conséquence des axiomes du système* ZF*.*

Théorème 7 (Cohen, 1963)**.** *Sauf si ceux-ci sont contradictoires, l'hypothèse du continu n'est pas conséquence des axiomes du système* ZF*.*

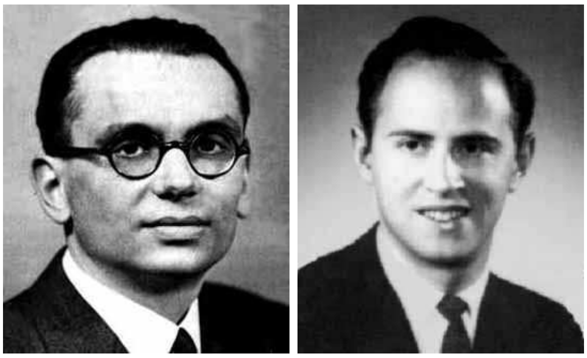


FIG. 5. Kurt Gödel (à gauche) et Paul Cohen (à droite)

Les théorèmes de Gödel et de Cohen sont à juste titre considérés comme des étapes majeures. Leur démonstration a requis la mise en œuvre de moyens complètement nouveaux, méthode des modèles intérieurs dans le cas de Gödel, méthode du forcing dans celui de Cohen. Indépendamment des difficultés purement techniques (qui restent non négligeables, même avec le recul de plusieurs décennies), ces résultats ont nécessité un changement de point de vue complet sur la théorie des ensembles, analogue en bien des points à la révolution copernicienne ou à la découverte des géométries non euclidiennes puisqu'il s'agissait de passer de la vision d'un monde des ensembles unique à celle d'une multiplicité de mondes possibles.

[12] La précaution oratoire est nécessaire, car le second théorème d'incomplétude de Gödel empêche qu'on puisse établir le caractère non-contradictoire du système ZF ; il est donc impossible d'écarter *a priori* l'hypothèse que ce système soit contradictoire.

3.5. ... et deux malentendus

La destinée de la théorie des ensembles n'a, dans la suite du vingtième siècle, guère été plus heureuse que la destinée personnelle de son créateur, Georg Cantor. Deux malentendus sont à l'origine de cette situation.

Le premier malentendu tient au succès-même de la théorie des ensembles. Ce que Zermelo a saisi probablement le premier[13], c'est la possibilité d'utiliser les ensembles comme base unique de la totalité de l'édifice mathématique. Précisément, on peut *représenter* comme ensembles les fonctions (Felix Hausdorff, 1918), puis les entiers (John von Neumann, 1923), et, de là, la quasi-totalité des objets mathématiques. Certes remarquable, ce résultat – mis en œuvre de façon systématique dans le traité de Bourbaki quelques années plus tard – a été pris pour bien plus que ce qu'il est, à savoir un résultat de codage, analogue par exemple à la possibilité de coder les points d'un plan par un couple de nombres réels ou par un nombre complexe. Des épigones approximatifs ont vu un résultat ontologique là où il n'est question que de codage, et posé un dogme « tout est ensemble » faisant jouer à la théorie des ensembles le rôle d'une théorie du grand tout qu'elle ne revendique nullement : il est difficile à un mathématicien laïque de croire que l'entier 2 *est* l'ensemble $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, puisqu'aucune intuition ne vient étayer une telle identité, et qu'aucune démonstration ne saurait en être donnée. Il était dès lors inévitable que l'engouement déraisonnable suscité par cette approche soit déçu et que les applications somme toute mineures de la théorie au reste des mathématiques entraînent un rejet à la mesure des espoirs initiaux. Les dérives pédagogiques des années 1960, directement issues d'une confusion entre « tout est représentable par des ensembles » et « tout est ensemble », n'ont évidemment pas redoré le blason d'une théorie méconnue et souvent imaginée comme la manipulation de diagrammes de Venn aussi abstraits que vides de sens mathématique : la théorie des ensembles est la théorie de l'infini, et elle n'a que très peu à voir avec l'utilisation – au demeurant quotidienne et bien commode – du vocabulaire ensembliste élémentaire par tous les mathématiciens contemporains.

Le second malentendu tient à la signification des théorèmes de Gödel et Cohen. Le public cultivé, et bien des mathématiciens, en ont retenu que le problème du continu est un problème qui ne peut pas être résolu et restera ouvert pour l'éternité. Certains imaginent un mystérieux statut qui ne serait ni vrai, ni faux, ou alors serait intrinsèquement inconnaissable, ou encore dépourvu de tout sens véritable. Ce que disent les résultats de Gödel et Cohen est tout autre, et bien plus simple : ils disent, ou plutôt illustrent puisqu'on le savait déjà depuis les théorèmes d'incomplétude de Gödel, que le système ZF de Zermelo-Fraenkel est incomplet, lacunaire, qu'il n'épuise pas les propriétés des ensembles. Ce sur quoi existe un consensus quasiment général, c'est sur le fait que les axiomes de ZF expriment des propriétés des ensembles que notre intuition recommande de tenir pour vraies. Autrement dit, nous jugeons opportun de prendre ces axiomes comme point de départ et d'accepter comme valides leurs conséquences. Mais personne – en tout cas aucun spécialiste de théorie des ensembles – n'a jamais prétendu que les axiomes de ZF épuisent notre intuition des ensembles. L'exploration de cette notion est en cours, et il se peut très bien que, dans le futur, un consensus émerge sur l'opportunité

[13] Il ne semble pas que Cantor ait anticipé cet aspect du développement de la théorie des ensembles.

d'ajouter de nouveaux axiomes, au fur et à mesure qu'on reconnaîtra comme pertinentes de nouvelles propriétés des ensembles et de l'infini. Ainsi les résultats de Gödel et Cohen ont *ouvert* le problème du continu bien plus qu'ils ne l'ont fermé.

3.6. Le problème du continu aujourd'hui

Près de cinquante ans après le résultat de Cohen, le problème du continu n'est pas réglé, mais des progrès importants ont été effectués et il n'est pas exclu qu'une solution apparaisse dans un futur assez proche.

Le développement majeur de la théorie des ensembles depuis les années 1970 a été l'émergence progressive, sur la base d'un corpus considérable de résultats convergents, d'un consensus quant à l'opportunité d'ajouter au système ZF des axiomes additionnels affirmant l'existence d'infinis de plus en plus grands – ce qui n'est qu'une itération naturelle de l'approche de Cantor [13, 14, 20]. Ces axiomes, dits « de grands cardinaux », ont des formes techniques variées. Le plus important d'entre eux, l'axiome DP dit de *détermination projective*, s'exprime en termes de jeux infinis et on peut le voir comme une forme forte du principe du tiers exclu (si A n'est pas vrai, alors la négation de A est vraie). Le progrès technique principal a été un théorème démontré par Donald A. Martin et John Steel en 1985 et sa réciproque démontrée par Hugh Woodin en 1987 [18, 6]. Essentiellement, ces résultats montrent que le système ZF + DP fournit une description aussi satisfaisante du monde des ensembles dénombrables que ce que le système ZF fournit pour le monde des ensembles finis, à savoir une description qui, en pratique et de façon heuristique, apparaît complète : même si les théorèmes de Gödel empêchent une complétude formelle, et malgré les remarquables résultats de H. Friedman, force est de constater que jamais le défaut de complétude du système ZF n'est apparu comme un véritable facteur limitant en arithmétique ou en combinatoire finie. Sur la base du système ZF + DP, il en est de même pour le niveau suivant, qui est celui de la topologie et de l'analyse dans les ensembles projectifs au sens de Luzin[14]. C'est précisément ce type de complétude heuristique qui suscite l'émergence progressive au sein de la communauté des théoriciens des ensembles – en attendant celle de tous les mathématiciens – d'un consensus pour ajouter l'axiome DP aux axiomes de ZF comme nouveau point de départ de la théorie des ensembles.

Dès lors, l'étude de l'univers des ensembles finis et des ensembles dénombrables est, en un sens, terminée, et l'étape suivante est celle des ensembles de cardinalité $\aleph_1$. C'est à ce niveau que le travail se poursuit depuis la fin des années 1980 [21]. Or, c'est là que se pose le problème du continu dans sa forme générale. Par exemple, le système ZF+DP entraîne que tous les ensembles projectifs satisfont à l'hypothèse du continu, mais il ne dit rien – et ne peut rien dire – sur les ensembles de réels plus compliqués.

À l'heure actuelle, la situation reste ouverte, mais il existe au moins une approche qui mène à un enchaînement de théorèmes probant, à savoir l'approche développée par Hugh Woodin à partir de la notion dite d'absoluité générique, qui consiste, *grosso modo*, à privilégier les propriétés qui sont invariantes par l'action du forcing de Cohen. Ce que montre Woodin, ce sont deux résultats [22, 23, 7, 8], à savoir

[14] La famille des ensembles projectifs est la clôture de la famille des ensembles boréliens par image continue et complément.

qu'il existe un axiome[15] qui, ajouté à ZF + DP, donne, pour le niveau de $\aleph_1$, le même type de description que ZF + DP donne pour le dénombrable, et, d'autre part, que *tout* axiome menant à la situation précédente entraîne nécessairement la fausseté de l'hypothèse du continu.

Ces travaux de Woodin ne constituent pas encore *la* solution du problème du continu pour plusieurs raisons : d'abord il n'existe pas de consensus sur le point de vue adopté (chercher une axiomatisation basée sur la notion d'absoluité générique) [9], ensuite les résultats de Woodin sont pour le moment conditionnés par une hypothèse technique (« la Ω-conjecture ») prédisant que tous les axiomes de grands cardinaux obéissent à certaines règles structurelles. Par contre, ce que montrent ces résultats, c'est qu'il est tout à fait possible de continuer à explorer la notion d'ensemble et que rien n'exclut que, dans un futur plus ou moins lointain, le corpus des résultats accumulés donne à de nouveaux axiomes une évidence *a posteriori* qui suscite une large adhésion, comme c'est aujourd'hui le cas pour l'axiome de détermination projective. Si ces nouveaux axiomes se trouvent impliquer soit l'hypothèse du continu, soit (comme les axiomes de Woodin) sa négation, alors on aura *résolu* le problème du continu. Dans tous les cas, l'existence-même de résultats comme ceux de Woodin semble indiquer que le problème du continu est tout sauf une question scholastique vide de sens, ainsi que l'ont parfois un peu imprudemment suggéré des mathématiciens pas véritablement experts du sujet.

Photo : Christine Woodin

FIG. 6. Hugh Woodin

3.7. Conclusion

En un sens, le problème du continu est un point mineur des mathématiques : peu d'applications dépendent vraiment de l'hypothèse du continu, et les seuls énoncés qui lui sont liés mettent en jeu des objets qui sont soit très grands, soit très compliqués, et sont à ce titre assez éloignés du cœur des mathématiques actuelles. C'est probablement l'une des raisons pour laquelle le problème du continu, premier sur la liste des problèmes de Hilbert en 1900, n'est plus mentionné un siècle plus tard dans la liste des problèmes du millénaire proposé par le Clay Institute [3] et y a, dans la catégorie des problèmes de fondement, été remplacé par le problème P=NP. D'un autre côté, ce problème reste toujours aussi fascinant par son côté fondamental et son énoncé si simple, et il a été et reste le moteur de la recherche

[15] L'axiome de Woodin exprime que le monde des ensembles est, en un certain sens, algébriquement clos, ce qui en fait une hypothèse très naturelle.

en théorie des ensembles. Il est certain qu'on en saura plus dans cent ans, et l'auteur de ces lignes serait bien curieux de savoir où on en sera alors du problème du continu et de l'exploration de l'infini. Dans tous les cas, si quelque chose est certain, c'est bien le fait que Cantor, par sa note anodine de 1874, a ouvert un monde et donné pour des siècles du grain à moudre aux mathématiciens.

Remerciements

Je remercie Pierre Ageron et Akihiro Kanamori pour les utiles précisions qu'ils m'ont apportées, ainsi que Jean Fichot qui m'a signalé la présence précoce d'une forme d'argument diagonal dans les travaux de Paul du Bois-Reymond.

4. Références

[1] C. Boyer, *A History of Mathematics*, Princeton University Press (1985).
[2] G. Cantor, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, Crelles Journal für Mathematik ; 77 ; 1874 ; 258-263.
[3] Clay Mathematical Institute ; *Millenium Problems*, `http://www.claymath.org/millennium/`.
[4] J.W. Dauben, *Georg Cantor : His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Cambridge, Mass., 1979 ; reprinted 1990.
[5] A.-M. Décaillot, *Cantor et la France*, Correspondance du mathématicien allemand avec les Français à la fin du XIX^{e} siècle, Paris, Kimé, 2008.
[6] P. Dehornoy, *La détermination projective d'après Martin, Steel et Woodin*, Séminaire Bourbaki, Astérique ; 177-178 ; 1989 ; 261–276.
[7] P. Dehornoy, *Progrès récents sur l'hypothèse du continu, d'après Woodin*, Séminaire Bourbaki, Astérisque ; 294 ; 2004 ; 147-172.
[8] P. Dehornoy, *Au-delà du forcing : la notion de vérité essentielle en théorie des ensembles*, *in :* Logique, dynamique et cognition, J.B.Joinet, ed., Publications de la Sorbonne (2007) 147-169.
[9] M. Foreman, *Has the continuum hypothesis been settled ?*, Proceedings Logic Colloquium '03, Lect. Notes in Logic, Assoc. Symb. Logic 24 (2006) 56-75.
[10] M. Foreman, A., Kanamori, eds. ; *Handbook of Set Theory*, `http://www.tau.ac.il/~rinot/host.html`.
[11] gallica ; (BNF) ; `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k86243w.notice`
[12] G. Godefroy, *De l'irrationnalité à l'indécidabilité*, Leçons de mathématiques d'aujourd'hui, volume 2, Cassini (2003).
[13] K. Gödel, *What is Cantor's Continuum Problem ?*, Amer. Math. Monthly ; 54 ; 1947 ; 515-545.
[14] A. Kanamori, *The higher infinite*, Springer, Berlin, 1994.
[15] A. Kanamori, *The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen*, Bull. Symb. Logic ; 2 ; 1996 ; 1-71.
[16] L. Kirby & J. Paris, *Accessible independence results for Peano Arithmetic*, Bull. London Math. Soc. ; 14 ; 1982 ; 285–293.
[17] Yu. Manin, *Georg Cantor and his heritage*, arXiv:math.AG/0209244 (2002).
[18] D.A. Martin & J.R. Steel, *A proof of projective determinacy*, J. Amer. Math. Soc. ; 2-1 ; 1989 ; 71–125.
[19] J.J. O'Connor & E.F., Robertson ; *Cantor*, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Cantor.html`.
[20] J. Steel, *Mathematics need new axioms*, Bull. Symb. Logic ; 6-4 ; 2000 ; 422-433.
[21] H. Woodin, *Large cardinal axioms and independence : the continuum problem revisited*, Math. Intelligencer ; 16-3 ; 1994 ; 31-35.
[22] H. Woodin, *The Continuum Hypothesis, I & II*, Notices Amer. Math. Soc. ; 48–6 ; 2001 ; 567–576, & **8-7** (2001) 681–690.
[23] H. Woodin, *The Continuum Hypothesis*, Proceedings Logic Colloquium 2000, Ass. Symb. Logic (2005).

N.B. : Les photographies autres que celle de H. Woodin sont extraites du site de biographies de l'université St. Andrews (GB), cf. [19].

Les immeubles, une théorie de Jacques Tits, prix Abel 2008

Guy Rousseau[1]

« À l'origine [début des années 50] le but essentiel de la théorie des immeubles était la compréhension des groupes de Lie exceptionnels d'un point de vue géométrique. Le point de départ était l'observation qu'il est possible d'associer à chaque groupe de Lie semi-simple complexe une géométrie bien définie, de telle façon que les propriétés de base des géométries ainsi obtenues et leurs relations mutuelles peuvent se lire aisément sur les diagrammes de Dynkin des groupes correspondants. »

C'est ainsi que Jacques Tits explique ses motivations initiales pour sa théorie (traduction libre de [T-80]). Il ajoute plus loin, essentiellement : « ces géométries étant construites à partir de blocs élémentaires de rang deux qui ont des analogues évidents sur tout corps k, il était naturel d'essayer d'associer à tout diagramme de Dynkin une géométrie sur k ; en retour on pourrait extraire du groupe d'automorphismes de cette géométrie un groupe, analogue sur k du groupe de Lie semi-simple complexe associé à ce diagramme de Dynkin. Claude Chevalley réussit (en 1955) la construction de ces groupes par des moyens algébriques. Cela facilita la construction de ces géométries et inversement celles-ci se révélèrent un puissant moyen d'étude de ces groupes de Chevalley. En fait ces géométries polyédriques sont maintenant connues sous le nom d'immeubles, selon la terminologie introduite par N. Bourbaki [Bi-68]. »

J'arrête ici l'exposé des prémices de cette théorie qui, avec d'autres importants travaux de théorie des groupes, a valu à Jacques Tits le prix Abel 2008 (partagé avec J.G. Thompson). Voici un extrait de la motivation du comité pour cette nomination : *« un immeuble de Tits [...] encode en termes géométriques la structure algébrique des groupes linéaires. La théorie des immeubles est un principe unificateur dans une palette étonnante d'applications, par exemple dans la classification de groupes algébriques, de groupes de Lie et de groupes finis simples, dans les groupes de Kac-Moody (utilisés par les théoriciens de la physique), dans la géométrie combinatoire (utilisée en informatique), et dans l'étude des phénomènes de rigidité dans les espaces à courbure négative. L'approche géométrique de Tits a été essentielle pour l'étude et la réalisation des groupes finis, dont le Monstre. »*

Je vais expliquer ci-dessous les grandes lignes de la théorie des immeubles et les développements féconds de celle-ci qu'a apportés Jacques Tits dans des directions variées. On trouvera dans [Wolf] une bibliographie extensive des travaux de J. Tits (jusqu'en 2000) et une analyse détaillée (par lui-même) de tous ses travaux jusqu'en 1972. Pour plus d'applications de la théorie on se reportera à [T-75] ou [RS-95].

Je remercie P.E. Caprace, B. Műhlherr et B. Rémy pour leur relecture attentive de ce texte.

[1] Institut Élie Cartan, UMR 7502 Université de Nancy, CNRS, INRIA , BP 70239, F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy cedex.

1. L'immeuble d'un espace projectif

Cet immeuble est le prototype qui a servi de modèle à tous les autres [T-55a], [T-55b], [T-62a]. Le langage adopté à l'époque pour ces généralisations était différent, on adopte ici le point de vue des immeubles.

1.1. Le graphe d'incidence

Soit V un espace vectoriel de dimension finie $n+1$ sur un corps k. Notons $\mathcal{J} = \mathcal{J}(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V différents de $\{0\}$ et V. Un sous-espace de dimension r est appelé un *sommet de type r* : il est dans $\mathcal{J}_r(V)$. L'ensemble $\mathcal{J}_1(V)$ est donc l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ et $\mathcal{J}_r(V)$ est l'ensemble des sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ de dimension $r-1$.

Deux éléments de $\mathcal{J}(V)$ sont dits *incidents* s'ils sont distincts et si l'un est contenu dans l'autre. Les points de $\mathcal{J}_1(V) = \mathbb{P}(V)$ incidents à un élément de $\mathcal{J}_r(V)$ sont donc les points du sous-espace projectif correspondant à cet élément.

On obtient ainsi une structure de graphe sur $\mathcal{J}(V)$.

1.2. L'exemple du plan projectif sur le corps $\mathbb{F}_2$ à deux éléments

Dans la figure 1 ci-dessous [T-85] on a dessiné à droite ce plan projectif qui comporte sept points (numérotés de 1 à 7) et sept droites (numérotées de *I* à *VII* y compris la droite *VI* formée des points 2, 6 et 7). Le graphe $\mathcal{J}$ correspondant est représenté à gauche ; la couleur d'un sommet détermine son type. Chaque sommet est contenu dans trois arêtes.

Un groupe diédral d'ordre 14 respecte la figure de gauche ; cependant les symétries (par exemple celle par rapport à la droite en pointillé) échangent les types : ce sont des « dualités ». Le groupe des automorphismes (respectant les types) du graphe $\mathcal{J}$ (indépendamment de la longueur des arêtes) est de cardinal 168, c'est $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)$.

Dans cette figure on peut aussi observer les chemins fermés n'empruntant pas deux fois la même arête et de longueur minimale (6 arêtes), on les appelle *appartements* et on constate que deux arêtes sont toujours contenues dans un même appartement.

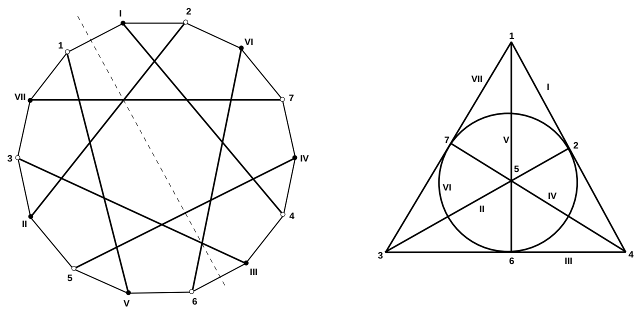


FIG. 1.

1.3. Le complexe simplicial

On appelle *facette* de $\mathcal{J}$ un sous-ensemble de $\mathcal{J}$ formé d'éléments 2 à 2 incidents (c'est donc un drapeau de V) ; son *type* est l'ensemble des types (2 à 2 distincts) de ses éléments. Les facettes maximales ont n éléments (ce sont les drapeaux complets), on les appelle *chambres*. Les facettes à $n-1$ éléments sont appelées *cloisons*.

L'ensemble partiellement ordonné $\mathcal{I} = \mathcal{I}(V)$ de ces facettes est un complexe simplicial appelé *immeuble* de $\mathbb{P}(V)$. Ses facettes non vides minimales correspondent aux sommets de $\mathcal{J}$. Ainsi $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont deux aspects de la même structure.

1.4. Les appartements

Ils sont en bijection avec les décompositions de V en somme directe de droites : les sommets de l'*appartement* A correspondant à la décomposition $V = D_1 \oplus \cdots \oplus D_{n+1}$ sont tous les sous-espaces vectoriels sommes de certains des D_i ; les facettes de l'appartement A sont les facettes de $\mathcal{I}$ formées de sommets de A. Ainsi un appartement est un sous-complexe simplicial.

Dans l'exemple 1.2 un appartement est donc formé de trois points non alignés et des trois droites qu'ils définissent. On vérifiera la coïncidence avec la définition de 1.2.

Il est facile de vérifier que deux facettes quelconques de $\mathcal{I}$ sont contenues dans un même appartement : c'est une conséquence d'une variante du théorème de Jordan-Hőlder : si $\{0\} \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n \subset V$ et $\{0\} \subset U_1 \subset \cdots \subset U_n \subset V$ sont deux drapeaux complets de V, il existe une base $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ de V et une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ telles que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, V_i ait pour base $\{e_1, \cdots, e_i\}$ et U_i ait pour base $\{e_{\sigma 1}, \cdots, e_{\sigma i}\}$.

Le groupe $\mathfrak{S}_{n+1}$ qui vient d'apparaître est le groupe des automorphismes du complexe simplicial A (il agit par permutation des droites). Il est simplement transitif sur les chambres de A.

1.5. Action du groupe projectif linéaire

Le groupe $G = \mathrm{PGL}(V) = \mathrm{GL}(V)/k^*$ agit clairement sur $\mathcal{J}$ en respectant les types et la relation d'incidence. On peut donc considérer son action sur l'immeuble $\mathcal{I}$, elle respecte la structure de complexe simplicial et permute les appartements. Elle est même *fortement transitive i.e.* elle permute transitivement les paires formées d'une chambre dans un appartement.

Le stabilisateur de l'appartement associé à la décomposition $V = ke_1 \oplus \cdots \oplus ke_{n+1}$ est le sous-groupe N de $\mathrm{PGL}(V)$ formé des classes d'éléments dont la matrice dans la base des e_i est monomiale. On a donc un homomorphisme surjectif de N dans $W = \mathfrak{S}_{n+1}$ dont le noyau T est formé des classes d'automorphismes diagonaux dans cette base.

Les facettes de $\mathcal{I}$, c'est-à-dire les drapeaux de V, de type fixé $\tau \subset \{1, \cdots, n\}$ sont conjuguées par G. Si $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ est une base ordonnée de V, alors les espaces vectoriels $V_r = ke_1 \oplus \cdots \oplus ke_r$ pour $r \in \tau$ forment une facette σ_τ de type τ. Le fixateur P_{σ_τ} de cette facette est formé des classes d'automorphismes dont la matrice dans cette base est triangulaire supérieure par blocs (de taille τ en un sens évident). Ainsi l'ensemble $\mathcal{I}_\tau$ des facettes de type τ s'identifie à G/P_{σ_τ} et $\mathcal{I}$ est réunion disjointe des $\mathcal{I}_\tau$ pour $\tau \subset \{1, \cdots, n\}$. Pour $g, g' \in G$ et $\tau, \tau' \subset \{1, \cdots, n\}$, on a $g\sigma_\tau \subset g'\sigma_{\tau'} \Leftrightarrow gP_{\sigma_\tau} \supset g'P_{\sigma_{\tau'}} \Leftrightarrow gP_{\sigma_\tau}g^{-1} \supset g'P_{\sigma_{\tau'}}g'^{-1}$ (car les groupes P_{σ_τ} sont leurs propres normalisateurs).

Si $\tau = \{1, \cdots, n\}$, les facettes de type τ sont les chambres ; le groupe $B = P_{\sigma_\tau}$ correspond aux matrices triangulaires supérieures. La variante du théorème de Jordan-Hőlder évoquée en 1.4 (appliquée aux V_i ci-dessus et aux $U_i = gV_i$ pour $g \in G$) montre que $G = BNB$ (décomposition de Bruhat).

1.6. Le théorème fondamental de la géométrie projective

On vient de voir que le groupe $G = \mathrm{PGL}_n$ avec ses sous-groupes P_{σ_τ} détermine l'immeuble $\mathcal{I}$. Inversement on sait que :

Théorème (*cf. e.g.* [A-57]). *Toute bijection d'un espace projectif $\mathbb{P}(V)$ (sur un corps k) sur un espace projectif $\mathbb{P}(V')$ de même dimension $n+1 \geqslant 3$ (sur un corps k') qui conserve l'alignement, détermine un isomorphisme μ de k sur k' et est induite par une bijection $\mu-$semi-linéaire de V sur V'.*

Ainsi l'immeuble $\mathcal{I}(V)$ détermine le corps de base k et son groupe d'automorphismes est produit semi-direct de $\mathrm{PGL}(V)$ par $\mathrm{Aut}(k)$.

C'est cette parfaite illustration du fort lien entre géométries et groupes (décrit dès 1872 par Felix Klein dans son programme d'Erlangen) qui inspire la théorie des immeubles.

1.7. Généralisations

On peut bien sûr généraliser l'essentiel des constructions précédentes aux espaces projectifs abstraits. Mais surtout après les travaux d'A. Borel et J. Tits [BIT-65], il est maintenant facile d'envisager la construction d'un immeuble pour tout groupe algébrique semi-simple :

Le groupe $G = \mathrm{PGL}(V)$ est algébrique semi-simple, T (resp. B) en est un sous-tore déployé maximal (resp. un sous-groupe de Borel ou un sous-groupe parabolique minimal), N est le normalisateur de T et les groupes P_{σ_τ} sont les sous-groupes paraboliques de G contenant B.

Si maintenant G est un groupe algébrique semi-simple quelconque, on peut donner un sens aux sous-groupes T, B, N, P_{σ_τ} et donc construire un complexe simplicial avec des appartements comme en 1.5. Mais pour expliquer cette construction, on va d'abord parler un peu de théorie des immeubles.

2. Définition abstraite d'immeuble

Il y a maintenant des références très accessibles pour cette théorie [Rn-89], [Su-95], [G-97] et, le plus complet actuellement, [AB-08].

2.1. Groupes de Coxeter

Définition. *Un système de Coxeter est une paire* (W, S) *où* W *est un groupe (de Coxeter) engendré par le sous-ensemble fini* S*, formé d'éléments d'ordre* 2 *et dont une présentation est fournie par cet ensemble générateur* S *et les relations* $(ss')^{m(s,s')} = 1$ *pour* $s, s' \in S$*, où* $m(s, s')$ *est l'ordre de* ss' *(pas de relation si* $m(s, s') = \infty$*).*

La *matrice de Coxeter* de W est $(m(s, s'))_{s,s' \in S}$. On dit que W est *irréductible* si S ne peut être partagé en deux sous-ensembles non vides qui commutent. Le *rang* de W est $|S|$. Le *graphe de Coxeter* de W est le graphe de sommets indexés par S, avec entre deux sommets distincts correspondant à s, s' aucune arête (resp. une arête, une arête double, une arête triple, une arête affectée du coefficient $m(s, s')$) si $m(s, s') = 2$ (resp. 3, 4, 6, un autre entier ou l'infini). Ce graphe est connexe si et seulement si W est irréductible.

Le groupe de permutations $\mathfrak{S}_{n+1}$ engendré par les transpositions $(1, 2), (2, 3), \ldots,$ $(n, n+1)$ est de Coxeter avec pour graphe •—•—•—···—•—•—• (n sommets). Les groupes de Coxeter de rang 2 sont les groupes diédraux.

H.S.M. Coxeter a étudié et classifié les groupes de Coxeter finis et J. Tits les a étudiés en général, *cf.* [T-61] plus largement connu grâce à [Bi-68].

2.2. Complexes de Coxeter

Si $J \subset S$, on peut définir le sous-groupe $W(J)$ de W engendré par J ; il est de Coxeter. On dit que J est *sphérique* si $W(J)$ est fini. On considère la réunion disjointe $A(W)$ des quotients $W/W(J)$ que l'on ordonne par $wW(J) \leqslant w'W(J') \Leftrightarrow wW(J) \supset w'W(J')$ (et donc $J \supset J'$). On obtient ainsi un complexe simplicial, dit *complexe de Coxeter de* W. Le rang de $wW(J)$ est $|S \setminus J|$ et son type est J.

Les éléments maximaux (les *chambres*) sont les éléments de W, les éléments maximaux hors chambres (les *cloisons*, de rang $|S| - 1$) sont les paires $\{w, ws\}$ pour $w \in W$ et $s \in S$. Ainsi une cloison est contenue dans exactement deux chambres, on dit que le complexe est *mince*. Une *galerie* de longueur n dans $A(W)$ est une suite $C_0, C_1, \cdots, C_n$ de chambres telle que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, C_i et C_{i-1} sont minorées par une cloison commune (on dit que C_i et C_{i-1} sont *mitoyennes*). Deux chambres de $A(W)$ peuvent toujours être jointes par une galerie, qui est unique si on précise les types des cloisons traversées. On en déduit que W est le groupe des automorphismes de $A(W)$ respectant les types et qu'il agit (à gauche) simplement transitivement sur les chambres.

Ce complexe est plus facilement compris via sa représentation géométrique construite par J. Tits, *cf.* [T-61] ou [Bi-68] :

Dans un espace vectoriel réel V de dimension $|S|$, on peut construire des réflexions σ_s par rapport à des hyperplans $\mathrm{Ker}\alpha_s$ (avec $(\alpha_s)_{s\in S}$ libre dans le dual) de telle manière que le groupe engendré par ces réflexions soit isomorphe à W. La *chambre fondamentale* est $C = \{v \in V \mid \alpha_s(v) > 0, \forall s \in S\}$; c'est un cône simplicial dont l'adhérence $\overline{C}$ est réunion disjointe des facettes $C_J = \{v \in V \mid \alpha_s(v) > 0, \forall s \in S \setminus J, \alpha_s(v) = 0, \forall s \in J\}$ pour $J \subset S$. On note $A^c(W) = \mathcal{T} = \bigcup_{w \in W} w\overline{C} \subset V$ le *cône de Tits*. Le résultat remarquable est que $\mathcal{T}$ est un cône convexe, réunion disjointe des *facettes* wC_J (pour $w \in W$ et

$J \subset S$), que $\overline{C}$ est un domaine fondamental de l'action de W sur $\mathcal{T}$ et que, pour $J \subset S$, le fixateur de C_J est son stabilisateur et vaut $W(J)$. Ainsi le complexe simplicial $A(W)$ s'identifie à l'ensemble des facettes de $A^c(W)$ ordonné par l'inclusion des adhérences.

Voir ci-dessous figure 2, un exemple de rang 2 avec W diédral d'ordre 12.

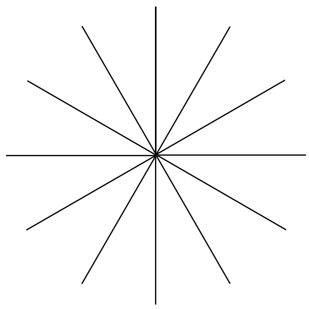


FIG. 2.

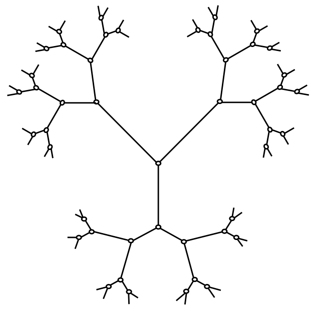


FIG. 3.

Plus généralement dans la suite, les éléments d'un complexe simplicial seront appelés *facettes* et $F \leqslant F'$ se lira « F est une face de F' ».

Le groupe de Coxeter W est fini si et seulement si $\mathcal{T} = V$. Dans ce cas il est agréable de remplacer $A^c(W)$ par une sphère unité $A^s(W)$ (pour un produit scalaire invariant par W). Par intersection avec $A^s(W)$ des facettes ci-dessus on obtient une décomposition simpliciale de cette sphère.

2.3. Définition des immeubles

Un *immeuble* (de type W) est un complexe simplicial $\mathcal{I}$ muni d'un *système d'appartements*, c'est-à-dire d'une collection $\mathcal{A}$ de sous-complexes appelés *appartements* telle que :

(I0) Chaque appartement est isomorphe au complexe de Coxeter $A(W)$.

(I1) Deux facettes de $\mathcal{I}$ appartiennent à un même appartement.

(I2) Si deux appartements contiennent les facettes F et F', ils sont isomorphes par un isomorphisme fixant F et F' ainsi que toutes leurs faces.

Il résulte de ces axiomes que toute facette de $\mathcal{I}$ est contenue dans une facette maximale appelée *chambre*. On définit comme en 2.2 les *cloisons*, les *types* et les *galeries*.

On supposera toujours les immeubles *épais* : toute cloison est face d'au moins trois chambres. L'immeuble est dit de *type sphérique* si W est fini.

À la figure 3 apparaît l'exemple d'un immeuble de rang 2 (le rang de W qui est ici le groupe diédral infini) sous la forme d'un arbre (sans sommet terminal). Les chambres (resp. les cloisons) sont les arêtes (resp. les sommets) du graphe. Les appartements sont les droites géodésiques.

L'immeuble $\mathcal{I}(V)$ de la section 1 est un immeuble sphérique épais de type $\mathfrak{S}_{n+1}$.

Si on remplace le système $\mathcal{A}$ par un système plus gros $\mathcal{A}'$ (vérifiant encore (I0) et (I2)), on a essentiellement le même immeuble. Il existe un système maximal d'appartements. Dans le cas sphérique, le système d'appartements est unique.

On peut associer à chaque facette de rang r de $\mathcal{I}$ un simplexe à r sommets et recoller tous ces simplexes selon leurs faces ; on obtient ainsi un espace topologique $|\mathcal{I}|$, *réalisation géométrique* de $\mathcal{I}$. Si $\mathcal{I}$ est de type sphérique les appartements de $|\mathcal{I}| = \mathcal{I}^s$ sont des sphères (isomorphes à $A^s(W)$).

2.4. Rétractions

Considérons une chambre C dans un appartement A de l'immeuble $\mathcal{I}$. Pour toute facette F, il existe un appartement B contenant C et F (axiome (I1)) et un isomorphisme φ de B sur A fixant C et toutes ses faces (axiome (I2)) et donc respectant les types. D'après l'axiome (I2) φF ne dépend pas du choix de B. On pose $\rho_{A,C}(F) = \varphi F$. L'application simpliciale $\rho_{A,C} : \mathcal{I} \to A$ ainsi construite est la *rétraction de centre C sur A.*

Ces rétractions sont des outils très puissants. Montrons par exemple :

Proposition. *Soient C, C' deux chambres d'un appartement A et $C = C_0, C_1, \cdots, C_n = C'$ une galerie de C à C' dans $\mathcal{I}$ de longueur minimale. Cette galerie est alors entièrement contenue dans A.*

Démonstration. Sinon il existe $i \geqslant 1$ avec $C_{i-1} \in A$ et $C_i \notin A$. Notons C'_i la chambre de A telle que C_{i-1}, C_i et C'_i admettent comme face la même cloison et $\rho = \rho_{A,C'_i}$. Il est clair que $\rho C_i = C_{i-1}$. On a donc une galerie $C = \rho C_0, \cdots, \rho C_i = C_i = \rho C_{i+1}, \cdots, \rho C_n = C'$ de C à C' dans A et de longueur $n-1$; c'est absurde. $\square$

2.5. Étoiles

L'étoile F^* d'une facette F de $\mathcal{I}$ est le complexe simplicial formé des facettes dont F est une face. Les intersections de F^* avec les appartements de $\mathcal{I}$ contenant F définissent des appartements dans F^*. On munit ainsi F^* d'une structure d'immeuble de type $W(J)$ où J est le type de F.

Ce résultat permet des raisonnements par récurrence sur le rang.

Pour l'immeuble $\mathcal{I}(V)$ de la section 1 le lecteur vérifiera que l'étoile de la facette associée à un drapeau est le produit des immeubles associés aux espaces vectoriels quotients successifs de ce drapeau.

2.6. Groupes d'automorphismes

Considérons un groupe G d'automorphismes de $\mathcal{I}$ respectant les types et $\mathcal{A}$. Soient C une chambre dans un appartement A. On note B le fixateur de C dans G et N (resp. $T = B \cap N$) le stabilisateur (resp. le fixateur) de A dans G.

On dit que le groupe G est *fortement transitif* s'il agit transitivement sur les paires formées d'une chambre dans un appartement. Alors N agit transitivement sur les chambres de A. Comme A est isomorphe à $A(W)$ on obtient donc un isomorphisme de N/T sur W. Plus précisément (G, B, N, S) est un système de Tits :

Définition. *Un système de Tits est un quadruplet (G, B, N, S) où G est un groupe, B et N deux sous-groupes et S une partie de $W = N/(B \cap N)$, satisfaisant aux quatre axiomes suivants (pour $w \in W$, on note $\tilde{w}$ un représentant de w dans N) :*

(T1) *B et N engendrent G et $B \cap N$ est distingué dans N.*

(T2) *S est formé d'éléments d'ordre 2 et engendre W.*
(T3) *Pour tous $w \in W$ et $s \in S$, on a : $\tilde{s}B\tilde{w} \subset B\tilde{w}B \cup B\tilde{s}\tilde{w}B$.*
(T4) *Pour tout $s \in S$ on a : $\tilde{s}B\tilde{s} \not\subset B$.*

Le groupe B est le *sous-groupe de Borel* et W le *groupe de Weyl* du système.

2.7. L'immeuble d'un système de Tits

Si (G, B, N, S) est un système de Tits, alors (W, S) est un système de Coxeter et on a la *décomposition de Bruhat* $G = BNB$, plus précisément G est réunion disjointe des doubles classes $B\tilde{w}B$ pour $w \in W$.

Pour $J \subset S$, $P_J = \cup_{w \in W(J)} B\tilde{w}B$ est un sous-groupe de G contenant B dit *parabolique*. On obtient ainsi tous les sous-groupes de G contenant B.

Par la construction esquissée en 1.7, on obtient un immeuble $\mathcal{I}$ sur lequel G agit fortement transitivement en conservant les types.

2.8. Historique

L'élaboration de ces notions s'est faite dans un ordre essentiellement inverse de l'exposé dogmatique précédent. Au début F. Bruhat a découvert sa décomposition dans les groupes de Lie simples classiques [Bt-54]. Ensuite Harish-Chandra et C. Chevalley ont étendu ce résultat, puis J. Tits est parvenu à sa version axiomatisée des décompositions de Bruhat, les systèmes de Tits (selon le nom attribué par N. Bourbaki [Bi-68], J. Tits parlait de $BN-$paires) *cf.* [T-62b], [T-63b] et [T-64]. Les premiers exposés de la notion d'immeuble apparaissent dans [T-63a] et [T-65] (sous le nom de complexe structuré), puis avec plus de détails dans [T-74].

Cette notion de système de Tits, indissociable de celle d'immeuble, est particulièrement souple : on verra ci-dessous qu'elle s'est appliquée ensuite efficacement à de nouvelles situations. Elle est aussi assez forte : un groupe avec système de Tits est « presque » simple [T-64] [Bi-68, IV, 2.7], ceci fournit une preuve unifiée de la simplicité des groupes simples finis de type de Lie.

3. Immeubles de type sphérique

3.1. L'immeuble de Tits d'un groupe semi-simple

Si G est un groupe algébrique semi-simple sur un corps k, on peut, selon la méthode esquissée en 1.7, lui associer un immeuble $\mathcal{I}(G, k)$ sur lequel il agit. C'est son *immeuble de Tits*, il est de type sphérique, car le groupe de Weyl $W = N/T$ est fini. En fait les principaux résultats d'A. Borel et J. Tits [BIT-65] sur la structure d'un groupe algébrique semi-simple G se résument en l'existence d'un système de Tits (G, B, N, S) et ce système fournit l'immeuble. Si le groupe G est déployé, les travaux de Chevalley donnent ce résultat assez facilement ; on peut déduire le cas général par descente galoisienne sur l'immeuble.

3.2. Applications

Je ne vais en citer que trois.

(1) Si G est de rang relatif r sur k, la réalisation géométrique $\mathcal{I}^s(G,k) = |\mathcal{I}(G,k)|$ est homotope à un bouquet de $(r-1)-$sphères (une par appartement contenant une chambre donnée). Ainsi G agit sur l'homologie $H_{r-1}(|\mathcal{I}(G,k)|)$. C'est particulièrement intéressant si k est fini ; alors $\mathcal{I}^s(G,k)$ est fini et la représentation précédente est de dimension finie : c'est la représentation de Steinberg, bien connue des théoriciens des groupes finis, *cf.* [CLT-80].

(2) Soient G un groupe de Lie semi-simple et X son espace riemannien symétrique. Le choix le plus naturel pour l'espace à l'infini de X est souvent très lié à un immeuble sphérique [T-75].

Ainsi, pour G défini sur $\mathbb{Q}$, A. Borel et J.P. Serre ajoutent à X une frontière $\partial X = \overline{X} \setminus X$ réunion disjointe de morceaux contractiles indexés par les $\mathbb{Q}-$sous-groupes paraboliques de G *i.e.* par $\mathcal{I}(G,\mathbb{Q})$. Ce bord ∂X a le type d'homotopie de $\mathcal{I}^s(G,k)$ et le quotient de $\overline{X}$ par un sous-groupe arithmétique Γ de G est compact. Ceci permet en particulier de calculer la dimension cohomologique de Γ [BS-73].

On peut définir la *frontière de Tits* ou *bord visuel* de X comme quotient de l'ensemble des demi-droites par la relation « être à distance mutuelle bornée ». C'est un immeuble sphérique (avec une topologie spéciale) *cf. e.g.* [KL-97].

(3) Soient X un immeuble de type sphérique et Y un sous-ensemble fermé, convexe de $|X|$ ne contenant pas deux points opposés (dans une sphère $|A|$ pour un appartement A). Alors J. Tits a suggéré en 1962 que le groupe des automorphismes de X stabilisant Y a un point fixe dans Y. Cette conjecture, popularisée par D. Mumford [Md-65], est connue comme conjecture du centre de Tits ; elle est résolue pour les immeubles classiques [MT-06] et le cas utilisé par D. Mumford. Voir [Se-04] pour des applications intéressantes.

3.3. Généralisations

On peut construire d'autres immeubles de type sphérique analogues à ces immeubles de Tits des groupes semi-simples.

On a d'abord les immeubles des groupes classiques non algébriques. Dans la section 1 par exemple on peut considérer le cas où k est un corps gauche de dimension infinie sur son centre. On peut aussi envisager le groupe orthogonal d'une forme quadratique d'indice fini sur un espace vectoriel de dimension infinie.

Il existe des groupes (non algébriques) obtenus par torsion de groupes algébriques semi-simples (en caractéristique positive) : les groupes de Ree, de Suzuki ou de Tits. On peut construire leur immeuble par descente galoisienne comme pour les groupes algébriques. Sur un corps non parfait il y a aussi des groupes « mixtes » plus compliqués.

Les groupes finis simples généralisant les groupes algébriques simples finis, on peut chercher à leur associer des géométries ressemblant aux immeubles. Voir [T-80] et des articles de l'ouvrage contenant [T-86].

3.4. Classification des immeubles de type sphérique

Elle est accomplie dans l'exposé fondamental [T-74] datant essentiellement de 1968, pour les immeubles de type irréductible (différent de H_3 ou H_4) et de rang au moins égal à trois. Plus précisément deux problèmes sont résolus : déterminer tous ces immeubles à isomorphisme près (ils sont en gros comme décrit en 3.3) et déterminer leurs groupes d'automorphismes. Ainsi ce résultat est la généralisation du théorème fondamental de la géométrie projective.

La classification des immeubles finis est plus simple : *e.g.* un corps fini est commutatif et parfait et il n'y a pas d'immeuble fini de type H_3 ou H_4 ; voir [Rn-89].

Il n'est pas raisonnable d'essayer de classifier tous les immeubles de type sphérique et de rang deux (les polygones généralisés), sauf pour les immeubles vérifiant la condition de « Moufang » : ils sont associés à des systèmes de Tits « décomposés ». Cette classification a été achevée récemment par J. Tits et R. Weiss. Ces immeubles sont les pierres élémentaires des immeubles de rang plus élevé, selon le procédé de construction développé par M. Ronan et J. Tits [RT-87]. On peut donc en déduire une preuve simplifiée de la classification *cf.* [TW-03]. Un exposé assez succinct mais complet de la théorie des immeubles de type sphérique se trouve dans [W-03] ; la classification y est expliquée.

La détermination des ensembles de Moufang (ou immeubles de Moufang de rang 1) est encore en cours, voir [T-00].

4. Immeubles de type affine

4.1. Groupes semi-simples sur un corps ultramétrique

Soit G un groupe algébrique semi-simple sur un corps K complet pour une valuation discrète ω. Pour $G = \mathrm{PGL}_n$, O. Goldman et N. Iwahori [GI-63] construisent un espace analogue à l'espace symétrique du cas réel. Pour G déployé simplement connexe, F. Bruhat [Bt-64] construit des sous-groupes compacts maximaux dans G, puis N. Iwahori et H. Matsumoto [IM-65] exhibent un système de Tits de groupe de Weyl infini. F. Bruhat et J. Tits [BtT-66], [BtT-72], [BtT-84a], [BtT-84b], [BtT-87a], [BtT-87b] ont alors montré l'existence d'un système de Tits (et donc d'un immeuble $\mathcal{I}(G, K, \omega)$ sur lequel G agit) dans tout groupe semi-simple simplement connexe G, si le corps résiduel de K est parfait.

4.2. Appartements affines

L'appartement d'un immeuble affine est réalisé géométriquement comme un espace affine euclidien A^a muni d'un ensemble infini discret d'hyperplans (les *murs*) tel que le groupe W engendré par les réflexions orthogonales par rapport à ces murs stabilise cet ensemble de murs. Le groupe W est alors de Coxeter [Bi-68]. Dans la figure 4 ci-dessous sont représentés les 3 cas irréductibles de dimension 2 (et rang 3).

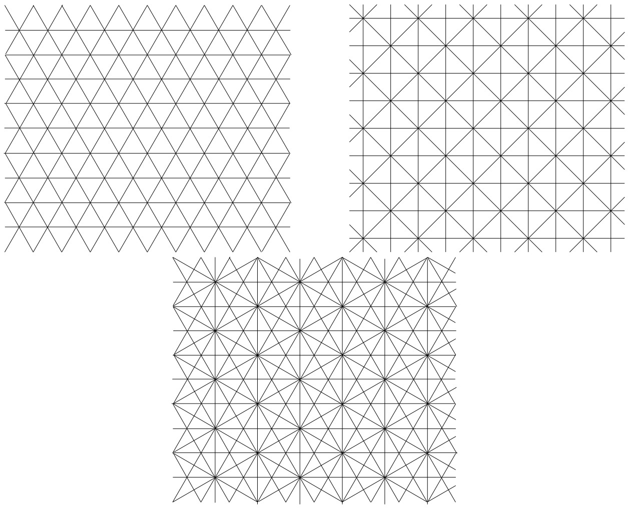


FIG. 4.

Les *chambres* sont les composantes connexes du complémentaire de la réunion des murs et on définit facilement des facettes, que l'on ordonne par l'inclusion des adhérences. Si W est irréductible, on obtient ainsi le complexe simplicial $A(W)$ et $A^a = A^a(W)$ est la réalisation géométrique $|A(W)|$. En fait on peut alors plonger $A^a(W)$ comme hyperplan affine dans $A^c(W)$ et les facettes se correspondent par intersection, *cf. e.g.* [Ru-08].

Le groupe de Weyl W est le groupe de Weyl affine d'un système de racines, c'est le produit semi-direct d'un groupe fini et d'un réseau de translations de $A^a(W)$. Dans le cas d'un appartement d'immeuble de groupe semi-simple, ce système de racines est très lié au système de racines relatif de ce groupe.

4.3. Métrique sur un immeuble affine

Soit $\mathcal{I}$ un immeuble de type W, groupe de Coxeter affine *i.e.* construit comme en 4.2 ci-dessus (avec W irréductible pour simplifier). La réalisation géométrique $\mathcal{I}^a = |\mathcal{I}|$ est réunion d'appartements isomorphes à $A^a(W)$; on dit que c'est un *immeuble affine*. La distance euclidienne des appartements s'étend en une distance d sur $\mathcal{I}^a$ et cet espace métrique est complet.

Si W est irréductible de rang 2 c'est un groupe diédral infini et $A^a(W)$ est une droite réelle. L'immeuble $\mathcal{I}^a$ est alors un arbre. La figure 3 de 2.2 représente l'immeuble $\mathcal{I}^a(\mathrm{SL}_2, K, \omega)$ quand le corps résiduel de K a deux éléments.

Les rétractions de $\mathcal{I}$ sur un appartement A de centre une chambre C, peuvent être définies sur la réalisation géométrique $\mathcal{I}^a$. Elles diminuent les distances mais conservent les distances à un point de la chambre C. Ceci permet de montrer la propriété suivante de courbure négative [BtT-72, 3.2].

(CN) Soient x, y, z trois points de $\mathcal{I}^a$ et m le milieu du segment $[y, z]$ (dans un/tout appartement contenant y et z) alors $d(x, m)$ est au plus égal à la distance de $\sigma(x)$ à m' pour un plongement isométrique σ de $\{x, y, z\}$ dans un plan euclidien, avec m' milieu du segment $[\sigma y, \sigma z]$.

4.4. Sous-groupes bornés maximaux

F. Bruhat et J. Tits [BtT-72] montrent le lemme de point fixe suivant :

Lemme. *Dans un espace métrique complet géodésique vérifiant la condition (CN) ci-dessus, tout groupe borné (i.e. stabilisant une partie bornée) d'isométries a un point fixe.*

Ainsi les sous-groupes bornés maximaux du groupe des isométries de cet espace correspondent bijectivement à certains de ses points. F. Bruhat et J. Tits en déduisent la classification des sous-groupes compacts maximaux d'un groupe semi-simple simplement connexe G sur un corps local (différent de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$) ; ils correspondent bijectivement aux sommets de l'immeuble affine. Il est intéressant de noter que dans le cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ le groupe G agit sur son espace riemannien symétrique qui vérifie aussi (CN) ; ceci permet de redémontrer la conjugaison des sous-groupes compacts maximaux de G.

4.5. Exemples

En s'inspirant de [GI-63] on peut définir une réalisation concrète de l'immeuble de $\mathrm{SL}_n(K)$ pour un corps local K. C'est un espace de normes sur K^n à homothéties près. Ses sommets sont les classes de réseaux de K^n à homothétie près. Pour $n = 2$, cet arbre est construit dans [Se-77] voir la figure 3 de 2.2. Le cas général est traité par F. Bruhat et J.Tits [BtT-84b] ; il est repris dans un contexte un peu différent dans [P-00].

Des réalisations analogues pour les autres groupes classiques apparaissent dans [BtT-87a].

4.6. Compactifications

Si G est un groupe algébrique semi-simple sur un corps local non archimédien K, son immeuble de Bruhat-Tits $\mathcal{I}^a(G, K, \omega)$ est localement compact. On peut le compactifier de plusieurs manières comme pour les espaces symétriques *cf.* 3.2 2). Expliquons-en une :

Si $\mathcal{I}^a$ est un immeuble affine, son bord visuel $\partial\mathcal{I}^a$ est défini comme en 3.2 2) ; on associe donc à chaque appartement sa sphère à l'infini. Ainsi $\partial\mathcal{I}^a$ est un immeuble sphérique (avec une topologie spéciale). Si $\mathcal{I}^a$ est localement compact, $\mathcal{I}^a \cup \partial\mathcal{I}^a$ est compact. Quand $\mathcal{I}^a = \mathcal{I}^a(G, K, \omega)$, $\partial\mathcal{I}^a$ est l'immeuble de Tits $\mathcal{I}^s(G, K)$ convenablement retopologisé.

Pour $G = \mathrm{SL}_2$ et K complet $\partial\mathcal{I}^a(\mathrm{SL}_2, K, \omega)$ est l'ensemble des bouts de l'arbre $\mathcal{I}^a(\mathrm{SL}_2, K, \omega)$ identifié à l'immeuble sphérique $\mathcal{I}^s(\mathrm{SL}_2, K)$, c'est-à-dire à l'espace projectif $\mathbb{P}_1(K)$.

Une autre compactification (dite polygonale) généralise l'une des compactifications par I. Satake des espaces riemanniens symétriques *cf.* [L-96].

4.7. Immeubles affines denses

Pour associer un immeuble à tout groupe algébrique semi-simple sur un corps ultramétrique, même pour une valuation réelle non discrète, F. Bruhat et J. Tits [BtT-72] élargissent la notion d'immeuble affine. Ils considèrent le cas où le système d'hyperplans de 4.2 n'est pas discret. Alors W n'est plus de Coxeter, il contient un sous-groupe non discret de translations de l'appartement affine $A^a(W)$. On obtient ainsi un « immeuble » $\mathcal{I}^a$ réunion d'appartements affines. Il y a encore une métrique mais l'immeuble n'est plus forcément complet. On peut encore définir un immeuble sphérique à l'infini.

Une définition abstraite de ce genre d'immeuble est donnée par J. Tits [T-86], voir aussi [P-00] ou [Ru-08].

4.8. Classification

La présence d'un immeuble sphérique à l'infini d'un immeuble affine et la classification préexistante des immeubles sphériques (irréductibles de rang $\geqslant 3$) sont les points de départ de la classification par J. Tits des immeubles affines irréductibles de dimension (= dimension des appartements) au moins 3 [T-86]. Il se place dans le cadre général des immeubles affines éventuellement denses (*cf.* 4.7) et montre essentiellement que ces immeubles sont des immeubles de Bruhat-Tits $\mathcal{I}^a(G, K, \omega)$, ou des analogues pour G un groupe classique non algébrique ou une version tordue des précédents *cf.* 3.3.

On trouvera un exposé détaillé de la théorie des immeubles affines (non denses) et de leur classification dans le livre de R. Weiss [W-09].

5. Développements récents

5.1. Réalisation métrique d'un immeuble quelconque

Les immeubles affines sont des exemples intéressants d'espaces à courbure négative ou nulle selon la définition de M. Gromov (prix Abel 2009 !). Ils sont « CAT(0) » : c'est essentiellement équivalent à la condition (CN) de 4.3.

On peut munir un immeuble sphérique $\mathcal{I}^s$ d'une métrique identifiant chaque appartement à une sphère euclidienne de rayon 1. On obtient ainsi un espace métrique CAT(1).

Pour un immeuble $\mathcal{I}$ plus général la réalisation géométrique $|\mathcal{I}|$ n'a pas de bonne propriété métrique. Si $\mathcal{I}$ n'a pas de facteur de type sphérique, une nouvelle réalisation géométrique $\mathcal{I}^m$ de $\mathcal{I}$ munie d'une métrique CAT(0) a été construite par M. Davis [D-98] (et simultanément par J. Tits, non publié) à partir des travaux de G. Moussong [Mg-88]. Dans $\mathcal{I}^m$ seules apparaissent les facettes sphériques de $\mathcal{I}$. Si $\mathcal{I}$ est affine on a $\mathcal{I}^m = \mathcal{I}^a$. Cette réalisation permet d'utiliser le lemme de point fixe de 4.4, par exemple pour montrer qu'un groupe fini agissant sur un immeuble irréductible non de type sphérique stabilise une facette sphérique.

5.2. Le point de vue « moderne » sur les immeubles

Ce nouveau point de vue a été introduit par J. Tits en 1981 dans [T-81] et précisé dans [T-92]. Dans un immeuble (simplicial) $\mathcal{I}$ associé à un système de Tits (G, B, N, S), l'ensemble $\mathcal{C}$ des chambres est égal à G/B. Pour gB et hB dans $\mathcal{C}$ on pose $\delta(gB, hB) = w \in W$ si $g^{-1}h \in B\tilde{w}B$ (décomposition de Bruhat). On obtient ainsi une application $\delta : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to W$.

Pour un système de Coxeter (W, S), on peut donc introduire la définition :

Définition. *Un immeuble de type (W, S) est un ensemble $\mathcal{C}$ (de chambres) muni d'une application $\delta : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to W$ (la $W-$distance) vérifiant pour tous $x, y, z \in \mathcal{C}$:*

(IM1) $\delta(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = y$.

(IM2) *Si $\delta(x, y) = w \in W$ et $\delta(y, z) = s \in S$, alors $\delta(x, z) \in \{w, sw\}$. Si de plus la longueur $\ell(ws)$ de ws (par rapport à S) est plus grande que celle de w, alors $\delta(x, z) = ws$.*

(IM3) *Si $\delta(x, y) = w \in W$ et $s \in S$, il existe $z \in \mathcal{C}$ tel que $\delta(y, z) = s$ et $\delta(x, z) = ws$.*

Cette définition est équivalente à la définition simpliciale (« démodée ») expliquée ci-dessus : une facette est remplacée par un ensemble de chambres (moralement les chambres qui la contiennent) appelé résidu. Plus précisément un *résidu de type $J \subset S$* est une classe d'équivalence pour la relation $x \sim y \Leftrightarrow \delta(x, y) \in W(J)$. Un appartement est une partie de $\mathcal{C}$ qui est $W-$isométrique à W (muni de la $W-$distance $\delta(w, w') = w^{-1}w'$) : on ne parle que du système complet d'appartements. Cette nouvelle définition s'avère plus souple que la précédente et se généralise au cas ci-dessous des immeubles jumelés (mais pas aux immeubles denses de 4.7).

Les livres de M. Ronan [Rn-89] et R. Weiss [W-03], [W-09] sont entièrement écrits dans ce langage. Celui de P. Abramenko et K. Brown [AB-08] présente les deux points de vue.

5.3. Les groupes de Kac-Moody et leurs immeubles jumelés

Les groupes de Kac-Moody (déployés) généralisent les groupes algébriques semi-simples déployés (groupes de Chevalley). Un exemple particulièrement intéressant et utile est constitué des groupes de lacets : $G(K) = G^\circ(K[t, t^{-1}])$ où G° est un groupe algébrique semi-simple sur le corps K.

Sur chaque corps K on peut définir de nombreux groupes de Kac-Moody (déployés) et ces groupes sont munis de systèmes de Tits très généraux : tout graphe avec des arêtes simples, doubles, triples ou étiquetées par ∞ apparaît comme graphe de Coxeter du groupe de Weyl d'un tel système. Mais il y a au moins deux classes de conjugaison de sous-groupes de Borel : deux sous-groupes de Borel opposés (B^+ et B^-) ne sont pas conjugués. On a donc en fait deux systèmes de Tits (G, B^+, N, S) et (G, B^-, N, S) avec deux décompositions de Bruhat $G = B^+NB^+ = B^-NB^-$, mais aussi une décomposition de Birkhoff $G = B^+NB^- = B^-NB^+$, *cf.* [T-87].

Cette structure de G peut se traduire par un système de Tits « jumelé » (G, B^+, B^-, N, S) *cf.* [T-92]. Du côté immeuble on en a en fait deux immeubles,

$\mathcal{I}^+$ associé à (G, B^+, N, S) et $\mathcal{I}^-$ associé à (G, B^-, N, S). Si le groupe de Kac-Moody est un groupe de lacets $G^\circ(K[t, t^{-1}])$, les deux immeubles $\mathcal{I}^+$ et $\mathcal{I}^-$ sont les immeubles de Bruhat-Tits de G° sur les corps ultramétriques $K(\!(t)\!)$ et $K(\!(t^{-1})\!)$.

La décomposition de Birkhoff se traduit par une *codistance* δ^* : $(\mathcal{C}^+ \times \mathcal{C}^-) \cup (\mathcal{C}^- \times \mathcal{C}^+) \to W$ (où $\mathcal{C}^\pm$ est l'ensemble des chambres de $\mathcal{I}^\pm$) défini par $\delta^*(gB^\varepsilon, hB^{-\varepsilon}) = w$ si $g^{-1}h \in B^\varepsilon \tilde{w} B^{-\varepsilon}$. Ainsi, selon la théorie développée par M. Ronan et J. Tits, on obtient un jumelage des deux immeubles.

5.4. Jumelages

Définition (*cf.* [T-92])**.** *Un jumelage de deux immeubles de type* (W, S) $(\mathcal{C}^+, \delta_+)$ *et* $(\mathcal{C}^-, \delta_-)$ *(au sens de 5.2) est une application* $\delta^* : (\mathcal{C}^+ \times \mathcal{C}^-) \cup (\mathcal{C}^- \times \mathcal{C}^+) \to W$ *telle que, pour* $x \in \mathcal{C}_\varepsilon$, $y \in \mathcal{C}_{-\varepsilon}$:

(J1) $\delta^*(y, x) = \delta^*(x, y)^{-1}$;

(J2) *Si* $z \in \mathcal{C}^{-\varepsilon}$, $\delta^*(x, y) = w \in W$, $\delta_{-\varepsilon}(y, z) = s \in S$ *et si* $\ell(ws) = \ell(w) - 1$, *alors* $\delta^*(x, z) = ws$;

(J3) *Si* $\delta^*(x, y) = w \in W$ *et* $s \in S$, *il existe* $z \in \mathcal{C}^{-\varepsilon}$ *tel que* $\delta_{-\varepsilon}(y, z) = s$ *et* $\delta^*(x, z) = ws$.

Si W est le groupe diédral infini, des immeubles jumelés de type (W, S) sont des arbres jumelés. On peut définir cette notion par une codistance entre sommets de $\mathcal{I}^+$ et $\mathcal{I}^-$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ *cf.* [RT-94].

5.5. Immeubles jumelés et groupes de type Kac-Moody

Si G est un groupe de Kac-Moody non déployé (mais en fait « presque-déployé ») sur un corps K, on peut, par descente galoisienne sur les immeubles jumelés de G sur une extension déployante, définir des immeubles jumelés pour G sur K et un système de Tits jumelé *cf.* [Ry-02].

La classification des immeubles jumelés a été entamée par J. Tits [T-92] et accomplie par B. Mühlherr *cf.* [Mr-02]. Cela nécessite des hypothèses de rang assez grand ou de Moufang (comme pour les cas sphérique ou affine) mais aussi d'autres hypothèses : il faut en particulier supposer que W est $2-$sphérique *i.e.* que sa matrice de Coxeter n'a pas de coefficient infini. On trouve bien sûr les immeubles des groupes de Kac-Moody presque déployés et aussi des torsions de ces groupes ou des groupes analogues. Au cours de ces torsions il faut considérer des systèmes de Coxeter (W, S) avec S infini (contrairement à nos hypothèses).

La généralisation des immeubles de Bruhat-Tits au cas des groupes de Kac-Moody sur un corps local pose quelques difficultés [Ru-06] [GR-08].

Un groupe de Kac-Moody sur un corps fini (assez grand) est un réseau dans le produit de certains groupes fermés d'automorphismes de ses deux immeubles. Pour les groupes de lacets on retrouve ainsi des réseaux de groupes semi-simples sur des corps locaux d'égale caractéristique p. Le cas général est à la fois semblable et différent par rapport à ce cas particulier *cf.* [CR-09].

6. Références

[AB-08] Peter ABRAMENKO et Kenneth S. BROWN, *Buildings : theory and applications*, Graduate texts in Math. **248** (Springer Verlag, Berlin, 2008).

[A-57] Emil ARTIN, *Geometric algebra*, (Interscience, New York, 1957), *cf. Algèbre géométrique*, (Gauthier-Villars, Paris, 1967).

[BS-73] Armand BOREL et Jean-Pierre SERRE, Corners and arithmetic groups, *Comm. Math. Helv.* **48** (1973), 436-491.

[BlT-65] Armand BOREL et Jacques TITS, Groupes réductifs, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **27** (1965), 55-151.

[Bi-68] Nicolas BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres IV, V et VI*, (Hermann, Paris, 1968).

[Bt-54] François BRUHAT, Représentations induites des groupes de Lie semi-simples complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **238** (1954), 437-439.

[Bt-64] François BRUHAT, Sur une classe de sous-groupes compacts maximaux des groupes de Chevalley sur un corps $\mathfrak{p}-$adique, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **23** (1964), 46-74.

[BtT-66] François BRUHAT et Jacques TITS, BN-paires de type affine et données radicielles affines, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A* **263** (1966), 598-601 ; voir aussi pages 766-768, 822-825 et 867-869.

[BtT-72] François BRUHAT et Jacques TITS, Groupes réductifs sur un corps local I, Données radicielles valuées, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **41** (1972), 5-251.

[BtT-84a] François BRUHAT et Jacques TITS, Groupes réductifs sur un corps local II, Schémas en groupes, Existence d'une donnée radicielle valuée, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **60** (1984), 5-184.

[BtT-84b] François BRUHAT et Jacques TITS, Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local, *Bull. Soc. Math. France* **112** (1984), 259-301. Erratum in [BtT-87a].

[BtT-87a] François BRUHAT et Jacques TITS, Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local, Deuxième partie : Groupes unitaires, *Bull. Soc. Math. France* **115** (1987), 141-195.

[BtT-87b] François BRUHAT et Jacques TITS, Groupes algébriques sur un corps local III, Compléments et applications à la cohomologie galoisienne, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **34** (1987), 671-698.

[CR-09] Pierre-Emmanuel CAPRACE et Bertrand RÉMY, Simplicity and superrigidity of twin building lattices, *Inventiones Math.* **176** (2009), 169-221.

[CLT-80] Charles W. CURTIS, Gustav LEHRER et Jacques TITS, Spherical buildings and the character of the Steinberg representation, *Inventiones Math.* **58** (1980), 201-210.

[D-98] Michael W. DAVIS, Buildings are CAT(0), in *Geometry and cohomology in group theory, Durham (1994)*, P. Kropholler, G. Niblo et R. Stőhr éditeurs, London Math. Soc. lecture note **252** (Cambridge U. Press, Cambridge, 1998), 108-123.

[G-97] Paul GARRETT, *Buildings and classical groups*, (Chapman and Hall, London, 1997).

[GR-08] Stéphane GAUSSENT et Guy ROUSSEAU, Kac-Moody groups, hovels and Littelmann paths, *Annales Inst. Fourier* **58** (2008), 2605-2657.

[GI-63] Oscar GOLDMAN et Nagayoshi IWAHORI, The space of $\mathfrak{p}-$adic norms, *Acta Math.* **109** (1963), 137-177.

[IM-65] Nagayoshi IWAHORI et Hideya MATSUMOTO, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of $\mathfrak{p}-$adic Chevalley groups. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **25** (1965), 5-48.

[KL-97] Bruce KLEINER et Bernhard LEEB, Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and euclidean buildings, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **86** (1997), 115-197.

[L-96] Erasmus LANDVOGT, *A compactification of the Bruhat-Tits building*, Lecture notes in Math. **1619** (Springer, Berlin, 1996).

[Mg-88] Gabor MOUSSONG, *Hyperbolic Coxeter groups*, Ph. D. thesis, Ohio State University (1988).

[Mr-02] Bernhard MŰHLHERR, Twin buildings, in *Tits buildings and the model theory of groups, Wűrzburg (2000)*, K. Tent éditrice, London Math. Soc. lecture note **291** (Cambridge U. Press, Cambridge, 2002), 103-117.

[MT-06] Bernhard MŰHLHERR et Jacques TITS, The center conjecture for non exceptional buildings, *J. of Algebra* **300** (2006), 687-706.

[Md-65] David MUMFORD, *Geometric invariant theory*, Ergebnisse der math. **34** (Springer, Berlin, 1965). Seconde édition avec J. Fogarty, 1982. Troisième édition avec J. Fogarty et F. Kirwan, 1994.

[P-00] Anne PARREAU, Immeubles affines : construction par les normes et étude des isométries, *Contemporary Math.* **262** (2000), 263-302.

[Ry-02] Bertrand RÉMY, *Groupes de Kac-Moody déployés et presque déployés*, Astérisque **277** (2002).

[RS-95] Jűrgen ROHLFS et Tonny A. SPRINGER, Applications of buildings, in *Handbook of incidence geometry*, Éditeur F. Buekenhout, (Elsevier, Amsterdam, 1995), 1085-1114.

[Rn-89] Mark A. RONAN, *Lectures on buildings*, Perspectives in Math. **7** (Academic Press, New York, 1989).

[RT-87] Mark A. RONAN et Jacques TITS, Building buildings, *Math. Annalen* **278** (1987), 291-306.

[RT-94] Mark A. RONAN et Jacques TITS, Twin trees I, *Invent. Math.* **116** (1994), 463-479.

[Ru-06] Guy ROUSSEAU, Groupes de Kac-Moody déployés sur un corps local, immeubles microaffines, *Compositio Mathematica* **142** (2006), 501-528.

[Ru-08] Guy ROUSSEAU, Euclidean buildings, in « Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidité, Grenoble, 2004 », L. Bessières, A. Parreau et B. Rémy éditeurs, *Séminaires et Congrès* **18** (Soc. Math. France. 2008), 77-116.

[Su-95] Rudolf SCHARLAU, Buildings, in *Handbook of incidence geometry*, Éditeur F. Buekenhout, (Elsevier, Amsterdam, 1995), 477-645.

[Se-77] Jean-Pierre SERRE, *Arbres, amalgames,* SL_2, Astérisque **46** (1977). *cf. Trees*, Springer (1980).

[Se-04] Jean-Pierre SERRE, Complète réductibilité, exposé 932 in *Séminaire Bourbaki 2003/2004*, Astérisque **299** (2005), 195-217.

[T-55a] Jacques TITS, Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie, *Mémoire Acad. Roy. Belg.* **29** (3) (1955), 268 pp.

[T-55b] Jacques TITS, Groupes semi-simples complexes et géométrie projective, exposé 112 in *Séminaire Bourbaki* **3***, années 1954/55-1955/56*, Soc. Math. France (1996), 115-125.

[T-61] Jacques TITS, *Groupes et géométries de Coxeter*, preprint Inst. Hautes Études Sci. (1961), in [Wolf].

[T-62a] Jacques TITS, Groupes algébriques semi-simples et géométries associées, in *Algebraical and topological foundations of geometry, Utrecht (1959)*, H. Freundenthal éditeur, (Pergamon Press, Oxford, 1962), 175-192.

[T-62b] Jacques TITS, Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A* **24** (1962), 2910-2912.

[T-63a] Jacques TITS, Géométries polyédriques et groupes simples, in *Atti della* 2^a *reunione del Groupement des mathématiciens d'expression latine, Firenze (1961)*, Edizioni Cremonese, Roma (1963), 66-88.

[T-63b] Jacques TITS, Groupes simples et géométries associées, in *Proc. Intern. Congress Math., Stockholm (1962)*, (1963), 197-221.

[T-64] Jacques TITS, Algebraic and abstract simple groups, *Annals of Math.* **80** (1964), 313-329.

[T-65] Jacques TITS, Structures et groupes de Weyl, exposé 288 in *Séminaire Bourbaki* **9***, années 1964/65-1965/66*, Soc. Math. France (1996), 169-183.

[T-74] Jacques TITS, *Buildings of spherical type and finite BN pairs*, Lecture notes in Math. **386** (Springer, Berlin, 1974). Seconde édition (1986).

[T-75] Jacques TITS, On buildings and their applications, in *Proc. Int. Congress Math., Vancouver (1974)*, volume 1 (1975), 209-220.

[T-80] Jacques TITS, Buildings and Buekenhout geometries, in *Finite simple groups II, Durham (1978)*, Éditeur M.J. Collins, Academic Press (1980), 309-320.

[T-81] Jacques TITS, A local approach to buildings, in *The geometric vein. The Coxeter Festschrift*, C. Davis, B. Grűnbaum et F.A. Sherk éditeurs, Springer (1981), 519-547.

[T-85] Jacques TITS, Symétries, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. Gén. Vie Sci.* **2** (1985), 13-25.

[T-86] Jacques TITS, Immeubles de type affine, in *Buildings and the geometry of diagrams, Como (1984)*, L.A. Rosati éditeur, Lecture notes in Math. **1181** (Springer, Berlin, 1986), 159-190.

[T-87] Jacques TITS, Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields, *J. of Algebra* **105** (1987), 542-573.

[T-92] Jacques TITS, Twin buildings and groups of Kac-Moody type, in *Groups combinatorics and geometry (Durham, 1990)*, M. Liebeck et J. Saxl éditeurs, London Math. Soc. lecture note **165**, (Cambridge U. Press, Cambridge, 1992), 249-286.

[T-00] Jacques TITS, Groupes de rang un et ensembles de Moufang, Résumé de cours, *Annuaire du Collège de France* (2000), 93-109.

[TW-03] Jacques TITS et Richard M. WEISS, *Moufang Polygons*, Springer monographs in Math. (2003).

[W-03] Richard M. WEISS, *The structure of spherical buildings*, (Princeton U. Press, Princeton, 2003).

[W-09] Richard M. WEISS, *The structure of affine buildings*, Annals of math. studies **168** (Princeton U. Press, Princeton, 2009).

[Wolf] *Wolf prizes in mathematics*, volume 2, S.S. Chern et F. Hirzebruch éditeurs (World Sci. Publ., 2001).