

# MATHÉMATIQUES

---

## Histoire d'un vecteur tricentenaire

Alain Guichardet

---

### 1. Présentation

Il est né vers 1710, sans être alors baptisé<sup>1</sup> ; nous l'appellerons *vecteur de Lenz* pour faire bref, mais on le rencontre dans la littérature sous divers noms : Runge-Lenz, Lenz-Pauli, Laplace-Runge-Lenz..., pour des raisons que nous tenterons d'expliquer. Il se situe dans le *problème de Kepler*, ou étude du mouvement d'un point mobile dans  $\mathbb{R}^3$  (une planète) autour d'un point fixe (le soleil).

Il est intimement lié à la recherche des relations existant entre les lois de Kepler et celles de Newton ; nous noterons  $r$  le point mobile dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $m$ , sa masse, et nous mettrons le point fixe à l'origine  $o$ . Kepler avait établi vers 1620, d'une façon purement expérimentale, les trois lois qui portent son nom :

- 1<sup>re</sup> loi : l'orbite décrite par la planète est plane et elliptique,
- 2<sup>e</sup> loi (*loi des aires*) : l'aire balayée par le vecteur  $or$  pendant un laps de temps  $t$  est proportionnelle à  $t$ ,
- 3<sup>e</sup> loi : si  $T$  et  $a$  désignent respectivement la période du mouvement et la longueur du demi grand axe de l'ellipse,  $\frac{T^2}{a^3}$  est le même pour toutes les planètes.

Par ailleurs, Newton avait proposé (dans ses *Principia*, 1687) deux lois universelles ; la première est la loi fondamentale de la mécanique newtonienne, que nous écrivons maintenant  $f = m\gamma$  ; la seconde est celle de l'attraction universelle :  $f = -mg \frac{r}{|r|^3}$  où  $g$  est une constante indépendante de la planète.

On va voir ci-dessous que de nombreux auteurs se sont attachés à résoudre les deux problèmes suivants : le problème dit « direct » : démontrer la seconde loi de Newton à partir des lois de Kepler, et le problème dit « inverse » : démontrer les lois de Kepler à partir des deux lois de Newton. Après avoir, au 2, exposé un des traitements modernes de ces deux problèmes, inverse puis direct, nous montrerons en 3 comment cela se faisait dans les années 1680-1710, notre « vecteur de Lenz » n'apparaissant en fait qu'en 1710 : puis en 4 comment Laplace invente une des méthodes utilisées de nos jours, et comment Runge introduit dans la question la notion de « vecteur » ; les analogues quantiques du vecteur de Lenz à diverses époques (1924-1966) sont exposés aux 5 et 6 après un bref rappel des principes fondamentaux de la mécanique quantique ; enfin au 6, on montre comment l'existence du vecteur de Lenz permet de construire un groupe de symétries du système

---

<sup>1</sup> D'ailleurs la notion même de vecteur ne devait apparaître que près de deux siècles plus tard avec Gibbs, Heaviside, Maxwell,...

étudié, plus grand que le groupe – évident – des rotations dans  $\mathbb{R}^3$ , et ce sera l'occasion de rappeler les bases du formalisme hamiltonien de la mécanique classique, formalisme qui s'inscrit au mieux dans les énoncés mathématiques modernes.

Je tiens à remercier ici tous les collègues qui m'ont aidé pendant la préparation de ce travail, et tout particulièrement Yvette Kosmann-Schwarzbach, André Rougé, Bernard Cagnac.

## 2. Traitement moderne de ces problèmes<sup>2</sup>

Voici comment on peut résoudre le problème inverse, en remplaçant dans la première loi l'expression « est elliptique » par « est une conique ».

Lorsque l'on a choisi un mouvement  $t \mapsto r(t)$  du point mobile, on désigne par  $\dot{\varphi}$  la dérivée par rapport à  $t$  d'une fonction quelconque  $\varphi$  de  $r$ ; on dit que  $\varphi$  est une *constante du mouvement* si  $\dot{\varphi}$  est nulle pour tout mouvement satisfaisant à  $f = m\gamma$  où  $\gamma = \dot{v}$  et  $v = \dot{r}$ .

On introduit 7 fonctions :

- l'énergie  $H = \frac{1}{2}m|v|^2 - \frac{mg}{|r|}$  ;
- les 3 composantes du *moment cinétique*  $L = mr \times v$  où  $\times$  désigne le produit vectoriel  $L_1 = m(r_2v_3 - r_3v_2)$  et permutations circulaires ;
- les 3 composantes du *vecteur de Lenz*

$$A = mv \times L - m^2g \frac{r}{|r|} .$$

Notons tout de suite les relations

$$|A|^2 = 2mH|L|^2 + m^4g^2 \quad \text{et} \quad L.A = 0$$

où le point désigne le produit scalaire.

On démontre que ces 7 fonctions sont des constantes du mouvement ; pour l'énergie et le moment cinétique, le calcul est immédiat ; pour le vecteur de Lenz, on vérifie d'abord, en utilisant des coordonnées, que, pour tout mouvement, on a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{r}{|r|} \right) = \frac{1}{m} L \times \frac{r}{|r|^3} ,$$

et ensuite que, si  $f = m\gamma$ , on a

$$\frac{d}{dt} (mv \times L) = -mL \times \gamma .$$

On déduit facilement de tout cela les lois de Kepler à partir de celles de Newton. La constance du moment cinétique montre d'abord que l'orbite est située dans le plan (le plan orthogonal à  $L$ ) ; on prend ensuite des coordonnées  $r = (r_1, r_2)$  dans ce plan et on pose

$$l = m(r_1v_2 - r_2v_1) ;$$

on se convainc facilement que, si  $s$  est l'aire balayée par le vecteur  $or$  pendant un laps de temps  $t$ , on a

$$\frac{ds}{dt} = \frac{l}{2m} \quad (\text{loi des aires}).$$

<sup>2</sup> Voir par exemple Goldstein-Poole-Safko, 2002.

Par ailleurs, de la constance du vecteur de Lenz, on déduit la forme de l'orbite et la troisième loi de Kepler : on écrit le produit scalaire  $r.A$  de deux façons différentes :

$$r.A = r.(mv \times L) - r.(m^2 g \frac{r}{|r|}) = l^2 - m^2 g |r|$$

$$r.A = |r| |A| \cos \theta$$

d'où résulte l'équation

$$|r| = \frac{l^2}{m^2 g + |A| \cos \theta},$$

ce qui est l'équation d'une conique en coordonnées polaires, l'origine 0 étant un foyer de la conique, laquelle conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que  $\frac{m^2 g}{|A|}$  est  $> 1$ ,  $< 1$  ou égal à 1, c'est -à-dire encore suivant que l'énergie est négative, positive, ou nulle.

Démontrons enfin la troisième loi de Kepler. On suppose bien entendu que l'orbite est une ellipse ; les demi axes de l'ellipse ont pour longueur

$$a = \frac{gm^2 l^2}{m^4 g^2 - |A|^2}, \quad b = \frac{l^2}{(m^4 g^2 - |A|^2)^{1/2}};$$

la surface totale de l'ellipse est

$$S = \pi ab = \pi \frac{l}{m} \frac{a^{3/2}}{g^{1/2}};$$

enfin intégrant la relation  $\frac{ds}{dt} = \frac{l}{2m}$  de  $t = 0$  à  $t = T$ , on obtient

$$S = \frac{lT}{2m}, \quad T = 2\pi g^{-1/2} a^{3/2}.$$

Quand au problème « direct », sa solution est facile : on écrit l'équation de l'ellipse sous la forme  $\rho = \frac{\alpha}{\beta + \cos \theta}$ , la loi des aires sous la forme  $\dot{\theta} = \frac{\epsilon}{\rho^2}$ , on pose  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$  et on se propose de démontrer que  $\ddot{r}$  est de la forme  $\frac{kr}{\rho^3}$  ; on trouve que  $k = -\frac{\beta \epsilon^2}{\alpha}$ .

### 3. Les origines

#### 3.1. Travaux de Newton<sup>3</sup>

Newton résout les problèmes direct et inverse ; en réalité on n'y trouve pas trace des 2 « formules de Newton » qui ne seront dégagées que plus tard ; la notion d'accélération n'y figure pas non plus ; quant à la force (ou « pesanteur »), c'est, en gros, ce qui empêche le corps mobile de prendre la tangente. Par ailleurs les méthodes de Newton sont purement géométriques, sans utilisation de la technique des coordonnées cartésiennes, ni de celle du calcul infinitésimal inventé peu auparavant, sous des formes différentes, par Newton lui-même et par Leibniz. On y raisonne sur des figures formées de lignes droites ou courbes, et de triangles.

<sup>3</sup> *Principia*, 1687 ; voir aussi les pages 33 à 37 des commentaires ajoutés par Clairaut à la traduction française de Mme du Châtelet, 1756.

### 3.2. Travaux de Varignon

Varignon publie en 1700 trois mémoires à l'Académie Royale des Sciences où il s'attaque au problème suivant, proche du « problème direct » : étant donné une courbe plane et un corps parcourant cette courbe de façon que la force passe toujours par un point fixe, trouver ladite force. Varignon commence par dessiner les mêmes figures que Newton, mais il en déduit une formule générale qui fait partie du calcul infinitésimal de Leibniz :

$$y = \frac{ds \, dds}{dx \, dt^2}.$$

On peut l'interpréter en termes modernes de la façon suivante :  $s$  est la longueur de l'arc de courbe parcouru par le corps,  $x = -|r|$ ,  $y = |\gamma|$ ,  $dds = d^2s$ ; sous cette forme, cette formule est facile à vérifier en passant aux coordonnées polaires. Varignon applique ensuite sa formule à diverses courbes, dont les coniques, ce qui lui permet de retrouver certains résultats de « l'excellent ouvrage de M. Newton ».

Dans tout ce qui précède, on ne voit toujours pas trace du vecteur de Lenz, mais il va bientôt apparaître.

### 3.3. Travaux de Herman et Bernoulli

Les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences publient en 1710 une lettre de Jakob Herman à Johann Bernoulli, dans laquelle l'auteur s'attaque au « problème inverse » ; il considère l'expression suivante :

$$(1) \quad a dx + \frac{xydy - ydx}{\sqrt{xx + yy}},$$

que nous noterons  $\mathcal{E}$  et qu'on peut interpréter comme suit. On admet que l'orbite de la planète est plane et on veut prouver qu'elle est conique ; on prend des coordonnées  $x$  et  $y$  dans le plan de l'orbite ; on admet aussi que  $ydx - xdy$  (notre « moment cinétique ») est constant ;  $dx$  et  $dy$  (calcul infinitésimal leibnizien !) signifient  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$  ; enfin  $a$  est une constante ; il est clair que  $\mathcal{E}$  n'est autre, à quelques constantes près, que la composante de notre vecteur de Lenz sur l'axe des  $y$ .

Comment s'introduit cette expression  $\mathcal{E}$  ? On part de l'équation « différentio-différentielle »

$$(2) \quad -addx = \frac{x \times (ydx - xdy)^2}{(xx + yy) \times \sqrt{xx + yy}} ;$$

en termes modernes, ce n'est autre (toujours à des constantes près) que la composante de  $f = m\gamma$  sur l'axe des  $x$ . On passe de (2) à (1) par une simple intégration (c'est à peu près le calcul esquissé en 2). Ensuite Herman souhaite prouver que l'orbite est une conique ; malheureusement il écrit  $\mathcal{E} = 0$ , oubliant la constante d'intégration, erreur que Bernoulli lui signale dans sa réponse (1710) ; enfin à l'aide d'une nouvelle intégration, Bernoulli parvient à l'équation

$$(3) \quad ab \pm hy \pm cx = b\sqrt{xx + yy}$$

« laquelle équation [...] est [...] aux trois sections coniques » (en coordonnées cartésiennes). On peut expliquer l'équation (3) de la façon suivante. Notons  $w$  la constante  $x dy - y dx$ ; écrivons  $\mathcal{E} = cte u$  sous la forme équivalente suivante :

$$a \frac{dx}{x^2} + \frac{y}{x^2} \frac{x dy - y dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{u}{w} \frac{x dy - y dx}{x^2} = 0 ;$$

intégrant terme à terme il vient

$$-\frac{a}{x} + \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{u}{w} \frac{y}{x} = cte k ,$$

équation qu'on multiplie enfin par  $x$ .

En conclusion, le vecteur de Lenz apparaît ici comme un intermédiaire, non nommé, dans le passage des lois de Newton à la première loi de Kepler.

## 4. Avatars divers

### 4.1. Travaux de Laplace

Laplace introduit, page 181 de l'ouvrage cité dans la bibliographie, 7 fonctions qui sont des constantes du mouvement :

$$e = \frac{x dy - y dx}{dt}, e', e'' \text{ analogues par permutations circulaires}$$

$$f = -x \left( \frac{\mu}{r} - \frac{dy^2 + dz^2}{dt^2} \right) - \frac{y dy dx}{dt^2} - \frac{z dz dx}{dt^2}, f', f'' \text{ analogues}$$

$$\frac{\mu}{a} = \frac{2\mu}{r} + \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} .$$

Ce sont respectivement, à des facteurs constants près, les 3 composantes du moment cinétique, celles du vecteur de Lenz, et enfin l'énergie; le fait que ce soient des constantes du mouvement découle directement des équations du mouvement

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^2}, \text{ etc (page 175).}$$

Laplace démontre les deux relations suivantes (déjà rencontrées au 2)

$$fe + f'e' + f''e'' = 0$$

$$\frac{\mu}{a} = \frac{\mu^2 - f^2 - f'^2 - f''^2}{e^2 + e'^2 + e''^2} .$$

Il en déduit que les 7 fonctions ci-dessus « n'équivalent qu'à cinq intégrales distinctes »<sup>4</sup>, et il ajoute que, « puisque l'élément seul du temps entre dans ces intégrales, elles ne peuvent pas donner les variables  $x, y, z$  en fonction du temps »

Laplace déduit de ce qui précède les 3 lois de Kepler par la méthode exposée au 2, dont il est apparemment l'inventeur.

<sup>4</sup> Voir ci-dessous 6

## 4.2. Travaux de Runge

Runge publie en 1926 un livre consacré aux bases du calcul et de l'analyse vectoriels (on voit enfin apparaître la notion de vecteur !); il les applique au problème de Kepler : page 70 il note  $\mathcal{A}$  notre vecteur  $\frac{1}{m^2g}A$ , puis reprend la méthode de Laplace pour démontrer les lois de Kepler.

## 5. Vecteur de Lenz et Mécanique Quantique

Le système physique que l'on va considérer ici est l'*atome d'hydrogène* : un point mobile dans  $\mathbb{R}^3$  (un électron), autour d'un point fixe (le noyau) et attiré par lui par une force proportionnelle à  $\frac{1}{|r|^2}$ ; ce système est donc identique à celui du problème de Kepler, mais on se propose de le traiter en termes quantiques.

### 5.1. Un peu de Mécanique Quantique<sup>5</sup>

Depuis les travaux de von Neumann, la mécanique quantique moderne représente les observables d'un système physique par des opérateurs autoadjoints, généralement non bornés, dans un espace hilbertien; l'un de ces opérateurs est l'*hamiltonien*  $H$  qui représente l'énergie et permet de décrire l'évolution dans le temps d'une observable quelconque  $\Phi$  grâce à la formule<sup>6</sup>

$$\dot{\Phi} = [H, \Phi]$$

Les valeurs propres de  $H$  à un facteur près, sont les niveaux d'énergie du système; l'équation aux valeurs propres  $H\psi = \lambda\psi$  est dite *équation de Schrödinger*. Dans le cas de l'atome d'hydrogène, l'espace hilbertien est  $L^2(\mathbb{R}^3)$  et l'hamiltonien est l'opérateur défini (formellement!) par

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{|r|}$$

où  $e$  est la charge électrique du noyau. On démontre, à l'aide de diverses fonctions spéciales, que les valeurs propres de  $H$  sont les nombres

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

et que la multiplicité de cette valeur propre est égale à  $n^2$ ; cette multiplicité – on dit *dégénérescence* – a longtemps intrigué les physiciens, et nous verrons plus loin comment on peut l'expliquer.

<sup>5</sup> Voir par exemple le traité de Prugovecki, 1971.

<sup>6</sup> Ici et par la suite, on écrira les formules sans se préoccuper de rigueur !

## 5.2. Travaux de Pauli (1926)

On savait par l'expérience que les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont de la forme  $E_n = -\frac{c^2 e^4}{n^2}$  avec la multiplicité  $n^2$ ; en fait on disait « poids » (« Gewicht ») au lieu de multiplicité, et ce qu'on avait mesuré était, non pas les  $E_n$  eux-mêmes, mais les raies de Balmer  $\nu_{n,p} = \frac{1}{h}(E_n - E_p)$  observées en spectroscopie; quant aux multiplicités, on les avait mesurées en obligeant chaque raie à se scinder en plusieurs sous l'effet d'un champ extérieur, électrique ou magnétique.

Pauli cherchait à démontrer que les niveaux d'énergie sont de la forme  $-\frac{c^2 e^4}{n^2}$  avec la multiplicité indiquée ci-dessus; mais, à cette époque, ce qu'il appelait « nouvelle mécanique quantique » n'était pas celle exposée au début du paragraphe, car il n'utilisait pas l'équation de Schrödinger, publiée la même année 1926; sa « nouvelle mécanique quantique » était celle, due pour l'essentiel à Heisenberg, qui représentait les observables par des matrices hermitiennes infinies que l'on manipulait sans trop de précautions, et dont, bien entendu, la propriété essentielle était la non-commutativité du produit. Les niveaux d'énergie sont alors les coefficients d'une matrice hermitienne diagonale  $H$ , l'hamiltonien, qui, ici aussi, permet de décrire l'évolution des autres observables dans le temps.

Revenons à l'atome d'hydrogène. Pauli considère 3 matrices représentant les 3 coordonnées de notre vecteur  $r$  ainsi que 3 autres représentant, à un facteur près, les 3 coordonnées de notre vecteur  $v$ ; ces 6 matrices ne sont pas précisées, on sait seulement qu'elles satisfont les fameuses relations de commutation de Heisenberg; à partir de là, il construit, à l'aide de règles propres à la mécanique quantique, un hamiltonien noté  $H$ , et 2 ensembles de 3 matrices, notés respectivement  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{A}$ , représentant respectivement nos vecteurs  $L$  et  $A$ . Pauli écrit (page 352) qu'à partir des relations satisfaites par  $E$ ,  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{A}$ , « il devrait en principe être possible » de résoudre le problème posé, mais que « malheureusement cela lui fut impossible »; pour y parvenir, il a dû faire intervenir d'autres phénomènes physiques : action d'un champ électrique ou magnétique.

## 5.3. Travaux de Lenz (1924)

Sous le nom de « mouvement de Kepler », Lenz traite en fait de l'atome d'hydrogène; il introduit le vecteur qui porte ici son nom sous la forme

$$A = \frac{1}{Ze^2 m} [lg] + r_0,$$

où  $[ ]$  désigne le produit vectoriel,  $r$  le rayon vecteur,  $r_0$  le vecteur unité,  $g = mv$  et  $l = [rg]$ . Il l'utilise pour étudier les perturbations des énergies des états quantiques (« Quantenzustände ») sous l'effet d'un champ extérieur, électrique ou magnétique. A cette époque, la notion d'« état quantique » est définie dans le cadre de la « vieille théorie des quanta » qui avait précédé les matrices de Heisenberg et l'équation de Schrödinger; le modèle de l'atome d'hydrogène est dit « atome de Bohr » et les états quantiques sont certaines trajectoires classiques du problème de Kepler caractérisées par une condition de type discret.

## 6. Vecteur de Lenz et groupes de symétries

Pour exposer les groupes de symétries de systèmes physiques, il est bon d'utiliser le

### 6.1. Formalisme hamiltonien<sup>7</sup>

L'*espace de configuration* d'un système physique est une variété différentielle  $R$  ; on introduit l'*espace des phases*  $\Omega = T^*R$  où  $T^*R$  est le fibré cotangent à  $R$  ; un élément de  $\Omega$  sera noté  $(r, p)$ <sup>8</sup> où  $r \in R$  et où  $p$  est une forme linéaire sur l'espace vectoriel tangent à  $R$  au point  $r$ . Une *observable* est une fonction différentiable sur  $\Omega$  ; pour deux telles fonctions  $\varphi$  et  $\psi$ , on définit leur *crochet de Poisson*  $\{\varphi, \psi\}$  qui, dans certains systèmes de coordonnées  $(r_i, p_i)$  dits *canoniques*, peut s'écrire

$$\{\varphi, \psi\} = \sum_i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial r_i} \right).$$

À chaque fonction  $\varphi$  on associe le champ de vecteurs  $X_\varphi$  défini par  $X_\varphi.\psi = \{\psi, \varphi\}$  pour toute fonction  $\psi$  et on a

$$X_{\{\varphi, \psi\}} = X_\varphi.X_\psi - X_\psi.X_\varphi.$$

Une observable joue un rôle particulier : l'énergie  $H$  qui permet de décrire l'évolution dans le temps du système physique de la façon suivante ; un mouvement  $t \mapsto (r(t), p(t))$  est physiquement possible si et seulement si

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} ;$$

ces équations, dites *de Hamilton*, forment un système différentiel du premier ordre, ses solutions forment un espace vectoriel de dimension  $2d$  si  $d$  est la dimension de  $R$  ; on déduit de là l'évolution d'une observable  $\varphi$  :

$$\dot{\varphi} = \{H, \varphi\} ;$$

en particulier  $\varphi$  est une *constante du mouvement* si  $\{H, \varphi\} = 0$ .

Soit maintenant  $G$  un groupe de Lie ; une *action* de  $G$  sur  $\Omega$  est un morphisme de  $G$  dans le groupe des difféomorphismes de  $\Omega$  ; on en déduit une action de l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  de  $G$  : pour tout  $\xi \in \mathcal{G}$ ,  $\xi_\Omega$  est le champ de vecteurs défini par

$$\xi_\Omega(\varphi)(x) = \left( \frac{d}{dt} \right)_{t=0} \varphi(\exp t\xi.x).$$

<sup>7</sup> Voir par exemple Goldstein-Poole-Safko.

<sup>8</sup> La notation usuelle est  $(q, p)$  mais on a voulu rester fidèle aux notations utilisées plus haut.

## 6.2. Cas du problème de Kepler

On a ici  $R = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^3$ ; on a, avec les notations du 1

$$H = \frac{|p|^2}{2m} - \frac{mg}{|r|}, \quad L = r \times p, \quad A = p \times L - m^2 g \frac{r}{|r|}.$$

Faisons tout de suite une remarque rassurante : la première équation de Hamilton dit que  $p$  n'est autre que la « quantité de mouvement »  $mv$ , et la seconde équivaut à l'équation fondamentale  $f = m\gamma$ ; en somme, ici, le passage aux équations de Hamilton n'est autre que l'opération bien familière qui consiste à remplacer une équation différentielle d'ordre 2 par deux équations différentielles d'ordre 1 ! Les vecteurs  $L$  et  $A$  sont des constantes du mouvement (calcul facile pour  $L$ , fastidieux pour  $A$ ).

## 6.3. Relations entre $L$ et $A$

Il est facile de voir que ces vecteurs sont orthogonaux. En fait cette relation est la seule qui les relie. En effet, étant donné deux vecteurs  $u$  et  $v$  orthogonaux de  $\mathbb{R}^3$ , il existe un élément  $(r, p)$  satisfaisant  $L(r, p) = u$  et  $A(r, p) = v$ . Pour le voir on peut prendre une base  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que  $(e_1, e_2)$  soit une base du plan orthogonal à  $L$  et chercher  $r$  et  $p$  sous la forme  $(r_1, r_2, 0)$  et  $(p_1, p_2, 0)$ ; on peut même imposer  $r_2 = 0$ .

## 6.4. Groupes de symétries

On va maintenant déduire de ce qui précède, d'une part une action du groupe des rotations  $SO(3)$  sur  $\Omega$ , qui entraîne une action de son algèbre de Lie  $\mathfrak{o}(3)$ , et d'autre part une seconde action de  $\mathfrak{o}(3)$ . On utilisera la base de  $\mathfrak{o}(3)$  formée des matrices

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui satisfont les relations

$$[\xi_1, \xi_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} \xi_k.$$

où  $\varepsilon_{ijk}$  est égal à 0 si deux des indices sont égaux et, dans le cas contraire, au signe de la permutation  $(i, j, k)$ .

### 6.4.1. Action du groupe $SO(3)$ sur $\Omega$

C'est l'action naturelle par rotations sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  et sur  $\mathbb{R}^3$ ; l'action de  $\mathfrak{o}(3)$  donne les champs de vecteurs associés aux 3 composantes de  $L$ .

### 6.4.2. Seconde action de $o(3)$

Des calculs très fastidieux montrent que

$$\{A_i, A_j\} = - \sum_k \varepsilon_{ijk} L_k H, \{A_i, L_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} A_k ;$$

on est donc amené à se placer dans la région où  $H(r, p) < 0$  (on rapprochera cette condition de celle, rencontrée au 2, qui assure que l'orbite est une ellipse) et à poser

$$N_i^\pm = \frac{1}{2}(L_i \pm (-H)^{-1/2} A_i)$$

de sorte que

$$\{N_i^\pm, N_j^\pm\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} N_k^\pm, \{N_i^+, N_j^-\} = 0 ;$$

prenant les champs de vecteurs associés aux  $N_i^+$  et  $N_i^-$ , on obtient deux actions de  $o(3)$  qui commutent entre elles; d'où une action du produit direct  $o(3) \times o(3)$ , ou enfin de  $o(4)$ , isomorphe à ce produit direct. Par les propriétés générales des groupes de Lie, on sait que cette action de  $o(4)$  provient d'une action du groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie  $o(4)$ , à savoir  $SU(2) \times SU(2)$ ; mais cette dernière action ne semble pas avoir été décrite explicitement; la seule chose évidente est qu'elle n'est pas linéaire<sup>9</sup>.

### 6.5. Cas de l'atome d'hydrogène<sup>10</sup> (traité quantiquement)

La situation est tout à fait analogue à celle étudiée ci-dessus. Dit en termes très formels, les « vecteurs »  $L$  et  $A$  (rappelons que ce sont des triplets d'opérateurs autoadjoints) sont définis comme suit. On a d'abord les 6 opérateurs représentant les 3 fonctions coordonnées et les 3 composantes de l'impulsion :  $r_k$  est l'opérateur de multiplication par la fonction coordonnée  $r \mapsto r_k$  et  $p_k$  est l'opérateur  $-i\hbar \frac{\partial}{\partial r_k}$ . Ensuite  $L_1 = r_2 p_3 - r_3 p_2$  et permutations circulaires

$$A_1 = \frac{1}{2m}([p_2, L_3] - [p_3, L_2]) - e^2 \frac{r_1}{|r|} \text{ et permutations circulaires.}$$

On a ensuite les mêmes formules que plus haut, en remplaçant  $\{, \}$  par  $[, ]$ , d'où une représentation de l'algèbre de Lie  $o(3)$  par des opérateurs autoadjoints, qui sont connus explicitement et commutent avec l'hamiltonien  $H$ ; par les propriétés générales des groupes de Lie, cette représentation provient d'une représentation unitaire du groupe  $SU(2) \times SU(2)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ ; cette représentation donne, par restriction au  $n^{\text{ième}}$  sous-espace propre de  $E_n$  de  $H$ , une représentation irréductible, équivalente au produit tensoriel  $D^{(n-1)/2} \otimes D^{(n-1)/2}$  où  $D^{(n-1)/2}$  désigne l'unique représentation irréductible de dimension  $n$  de  $SU(2)$ ; la description explicite de cette représentation irréductible de  $SU(2) \times SU(2)$  dans  $E_n$  ne semble pas mieux connue que dans le cas du problème de Kepler. Ce qui précède explique en partie la « dégénérescence »  $n^2$ . Signalons enfin que V. Fock (1935) avait introduit une action de  $o(4)$  dans ce but, et que V. Bargmann (1936) y avait adjoint le vecteur de Lenz.

<sup>9</sup> Voir par exemple H.H. Rogers, 1973.

<sup>10</sup> Voir par exemple Bander-Itzykson, I, 1966 ou Blaizot-Tolédano, 1997.

## 7. Références

- [1] M. Bander, C. Itzykson. *Group Theory and the Hydrogen Atom*, I. Review of Modern Physics, t. 38, 1966, p. 330-345.
- [2] V. Bargmann. *Zur Theorie des Wasserstoffatoms*. Zeitschrift für Physik, t. 99, 1936, p. 576-582.
- [3] Johann Bernoulli. *Extrait de la réponse de M. Bernoulli à M. Herman*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, t. 1732, 1710, p. 521-544.
- [4] J.-P. Blaizot, J.-C. Tolédano. *Symétries et physique microscopique*. Ed. Ellipses, 1997.
- [5] E. du Châtelet. *Principes mathématiques de la philosophie naturelle, avec commentaires de Clairaut*. Paris, 1756.
- [6] V. Fock. *Zur Theorie des Wasserstoffatoms*. Zeitschrift für Physik, t. 98 1935, p. 145-154.
- [7] H. Goldstein. *Prehistory of the « Runge-Lenz » vector*. Amer. J. Phys., t.43, 1975, p. 737-738. *More on the prehistory of the Laplace or Runge-Lenz vector*. *ibid*, t. 44, 1976, p. 1123-1124.
- [8] H. Goldstein-C. Poole-J. Safko. *Classical Mechanics*, 3ième édition. (Addison Wesley, 2002).
- [9] J. Herman. *Extrait d'une lettre de M. Herman à M. Bernoulli*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, t. 1732, 1710, p. 519-521.
- [10] P.S. de Laplace. *Traité de mécanique céleste (1799 et 1825)*. Voir œuvres complètes, édition de 1878, numérisée par la Bibliothèque Nationale de France.
- [11] W. Lenz. *Über den Bewegungsverlauf und Quantenzustände des gestörten Keplerbewegung*. Zeitschrift für Physik, t. 24, 1924, p. 197-207.
- [12] I. Newton. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. 1687.
- [13] W. Pauli. *Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt des neuen Quantenmechanik*. Zeitschrift für Physik, t. 36, 1926, p. 336-363.
- [14] E. Prugovecki. *Quantum Mechanics in Hilbert Spaces*. Academic Press, 1971.
- [15] H.H. Rogers. *Symmetry Transformations of the Classical Kepler Problem*. J. Math. Phys., t. 14, 1973, p. 1125-1129.
- [16] C. Runge. *Vectoranalysis*. Verlag S.Hirzel, Leipzig, 1926. Il existe une édition plus ancienne, 1919, chez le même éditeur.
- [17] P. Varignon. *Trois mémoires de l'académie royale des sciences*.1700.
- [18] Wikipedia, the free Encyclopedia. Laplace-Runge-Lenz vector.