

# MATHÉMATIQUES

---

## Le jeu de taquin de Schützenberger

Christophe Reutenauer<sup>1</sup>

---

Le jeu de taquin, au sens où on l'entend ici, a été introduit par Schützenberger [1] dans les années 70, au cours de ses recherches sur les tableaux de Young, la transformation de Robinson-Schensted, les relations de Knuth et leur interprétation algébrique, le monoïde plaxique<sup>2</sup> de Lasoux et Schützenberger. Le jeu de taquin se définit et s'étudie de manière élémentaire et sa beauté intrinsèque un peu magique se révèle aisément à tout mathématicien. Il comporte les traits typiques du génie schützenbergien, à savoir des subtilités d'ordre combinatoire mélangées à des incidences algébriques. Le jeu de taquin a permis à Schützenberger de donner une des deux premières preuves complètes de la profonde règle de Littlewood-Richardson (l'autre preuve, apparue au même moment, est due à G.P. Thomas [4]). Cette règle, énoncée dans les années 30, permet de multiplier les fonctions de Schur et de calculer les produits tensoriels externes des représentations du groupe symétrique, et par conséquent a aussi des applications en physique théorique.

Ceci constitue un sujet moins élémentaire, que nous essaierons de présenter sans trop rentrer dans les détails spécialisés. Nous utiliserons pour la règle de Littlewood-Richardson le formalisme des fonctions symétriques, dont une base sur  $\mathbb{Z}$  est formée par les fonctions de Schur  $s_\lambda$ , indexées par les partages<sup>3</sup>. Les fonctions de Schur sont en bijection avec les représentations irréductibles des groupes symétriques et les représentations polynomiales irréductibles des groupes linéaires. On a donc  $s_\mu s_\nu = \sum c_{\mu\nu}^\lambda s_\lambda$  et ce sont les entiers naturels  $c_{\mu\nu}^\lambda$  que calcule la règle de Littlewood-Richardson.

### 1. Jeu de taquin

Une *forme* est une partie finie et convexe<sup>4</sup> de  $\mathbb{Z}^2$ , muni de son ordre naturel. Un *tableau* est une bijection croissante  $F \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ , où  $F$  est une forme de cardinalité  $n$ . Un *coin inférieur* d'une forme  $F$  est un élément  $u$  de  $\mathbb{Z}^2 \setminus F$  tel que  $F \cup \{u\}$  soit convexe et qu'il existe  $v \in F$  tel que  $u < v$ . Voir la figure 1, où les éléments de  $\mathbb{Z}^2$  et de  $F$  sont représentés par des cases, et le tableau  $T$  par le contenu des cases.

---

<sup>1</sup> Université du Québec à Montréal.

<sup>2</sup> L'adjectif « plaxique » est forgé du grec et signifie « des tableaux ».

<sup>3</sup> Un *partage* de  $n$  est un multi-ensemble d'entiers strictement positifs dont la somme vaut  $n$ . On dit aussi souvent *partition*.

<sup>4</sup> Une partie  $P$  d'un ensemble ordonné  $E$  est *convexe* si :  $\forall x, z \in P, \forall y \in E, x \leq y \leq z \Rightarrow y \in P$ .

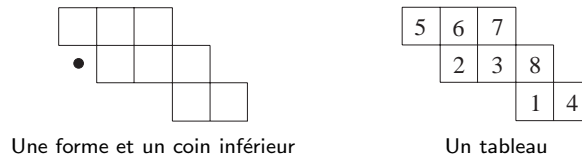


Figure 1

Appelons *voisin supérieur* d'une case  $(x, y)$  de  $\mathbb{Z}$  l'une ou l'autre des cases  $(x + 1, y)$  et  $(x, y + 1)$ . Étant donné un tableau et un coin inférieur  $u_0$  de sa forme, nous définissons la *traînée* correspondante comme l'ensemble des cases  $u_1 < u_2 < \dots < u_k$  de  $T$ , où  $u_i (i = 1, \dots, k)$  est celui des voisins supérieurs de  $u_{i-1}$  dont le contenu est le plus petit (si un seul des deux voisins supérieurs de  $u_{i-1}$  est dans  $T$ , c'est lui qu'on prend pour  $u_i$ ). Le *glissement* est l'opération qui transforme le tableau  $T$  en le tableau  $T'$ , obtenu en mettant dans  $u_i$  le contenu de  $u_{i+1}$ , pour  $i = 0, \dots, k - 1$ ; la forme de  $T'$  est  $F \setminus \{u_k\} \cup \{u_0\}$ . Voir la figure 2, où la traînée est représentée par les nombres encerclés.

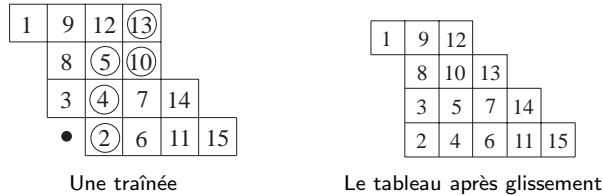


Figure 2

Rappelons qu'à un partage  $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k)$  est associée une forme définie à translation près; on la note encore  $\lambda$ . Si  $\mu$  est un autre partage, on écrit  $\mu \subseteq \lambda$  pour désigner l'inclusion des formes correspondantes, et on note  $\lambda/\mu$  la forme complémentaire de  $\mu$  dans  $\lambda$ . Par exemple, la forme à gauche de la figure 3 est 431, et celle à gauche de la figure 2 est 6544/211.

### 2. Règle de Littlewood-Richardson

Nous pouvons maintenant énoncer la règle de Littlewood-Richardson, du moins dans sa version par jeu de taquin : soient  $\lambda, \mu, \nu$  des partages; choisissons un tableau  $T$  de forme  $\nu$ . Alors  $c_{\mu\nu}^\lambda$  est égal au nombre de tableaux de forme  $\lambda/\mu$  qu'on peut transformer en  $T$  par une suite de glissements.

Par exemple, prenons  $\lambda = 543$ ,  $\mu = 31$ ,  $\nu = 431$ . Alors  $c_{\mu\nu}^\lambda = 2$ . En effet, choisissant  $T$  comme dans la figure 3, il y a deux tableaux de forme  $\lambda/\mu$ , indiqués dans cette figure. Les glissements pour l'un d'eux sont indiqués dans la figure 4.

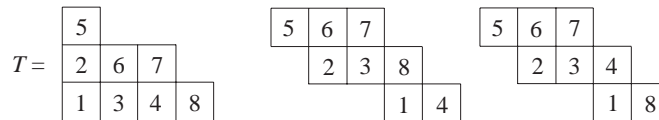


Figure 3

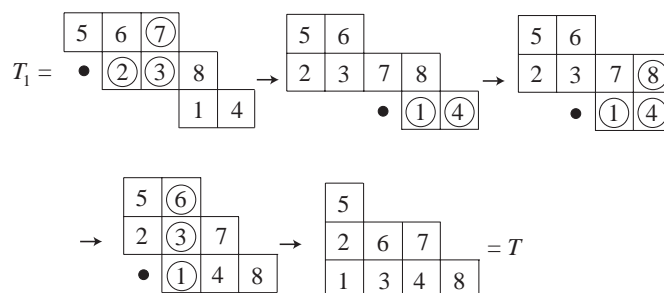


Figure 4

### 3. Confluence du jeu de taquin

Après ce qui précède, il se pose naturellement la question suivante : comment le choix des glissements (de manière équivalente, le choix des coins inférieurs) influe-t-il sur le tableau obtenu ? Pour y répondre, appelons *forme normale* une forme correspondant à un partage ; c'est-à-dire, une forme ayant un unique élément minimal (comme la forme de  $T$  dans la figure 3).

On a alors : *quel que soit le choix des glissements, le tableau de forme normale obtenu à partir d'un tableau donné, est unique.*

Pour esquisser une preuve de ce théorème de Schützenberger, nous associons à tout tableau un invariant de sa classe d'équivalence sous le jeu de taquin ; cet invariant sera une classe d'équivalence de permutations sous une relation appelée *équivalence plaxique* (introduite par Knuth [2]) ; enfin, on verra qu'il y a un unique tableau normal ayant le même invariant.

D'abord, étant donné un tableau  $T$ , nous notons  $\pi_T$  la permutation, vue comme un mot, obtenue en lisant les entrées de  $T$  de gauche à droite, et de haut en bas. Par exemple, pour  $T_1$  comme dans la figure 4, on a  $\pi_{T_1} = 56723814$ . L'équivalence plaxique, notée  $\equiv$ , est la fermeture réflexive et transitive de la relation suivante : celle-ci identifie deux permutations, vues comme des mots, qui ne diffèrent que par un facteur (= sous-mot connexe) de longueur 3, qui pour l'une est  $bac$  et l'autre  $bca$ , ou alors  $acb$  et  $cab$ , où  $a < b < c$  (on peut voir les 2 relations :  $bac \equiv bca$  et  $acb \equiv cab$  comme la commutation de  $a$  et de  $c$ , sous la condition que le « témoin de commutation »  $b$  soit placé à côté d'eux, et ait une valeur intermédiaire entre  $a$  et  $c$ ). On montre alors (ce n'est pas très commode) que si  $T_2$  s'obtient de  $T_1$  par glissement, alors  $\pi_{T_1} \equiv \pi_{T_2}$  (voir [1] Th. 2.4 ou [6] Prop. 3.9.4). Il reste donc à vérifier que si  $T$  est un tableau normal, alors  $T$  ne dépend que de la classe modulo  $\equiv$  de  $\pi_T$ .

On utilise pour cela la méthode d'insertion de Schensted [3], qui associe à toute permutation un tableau normal, voir par exemple [6] 3.3. On montre que deux permutations, qui sont équivalentes pour  $\equiv$ , donnent le même tableau (la réciproque est vraie aussi ; ces résultats sont dus à Knuth). Enfin, on montre que si  $T$  est un tableau normal, l'algorithme de Schensted associe à  $\pi_T$  le tableau  $T$ .

Nous illustrons l'algorithme de Schensted dans la figure 5, ainsi que la dernière assertion.

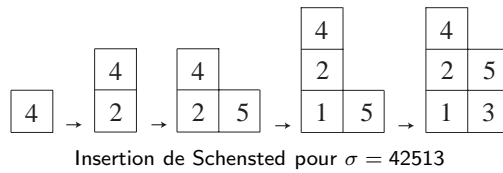
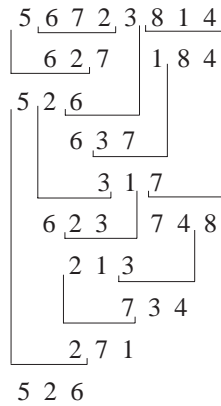


Figure 5

Le fait que  $\pi_{T_1}$  et  $\pi_T$  soient plaxiquement équivalents est montré dans la figure 6.



Équivalence plaxique de  $\pi_{T_1} = 56723814$  et  $\pi_T = 526748134$

Figure 6

#### 4. Preuve de la règle de Littlewood-Richardson

Pour esquisser une preuve de la règle de Littlewood-Richardson, nous suivons la méthode de Schützenberger. Le *mélange*  $u \sqcup v$  de deux mots  $u$  et  $v$  est la somme des mots  $w$  obtenus en écrivant les lettres de  $u$  dans leur ordre, ainsi que celles de  $v$ , de toutes les manières possibles. Par exemple,  $12 \sqcup 43 = 1243 + 1423 + 1432 + 4123 + 4132 + 4312$ . Définissons alors un produit associatif  $*$  sur  $\bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Z}S_n$  : si

$\sigma, \alpha$  sont des permutations dans  $S_n$  et  $S_p$ , respectivement, soit  $\bar{\alpha}$  obtenue en additionnant  $n$  à chaque chiffre de  $\alpha$  ; alors  $\sigma * \alpha = \sigma \sqcup \bar{\alpha}$ . Par exemple,  $12 * 21$  est l'élément  $12 \sqcup 43$  ci-dessus. On observe alors, à la suite de Schützenberger, que si  $A, B$  sont des classes plaxiques<sup>5</sup>, alors  $A * B$  est une somme de classes plaxiques.

Ci-dessus par exemple, nous multiplions les classes 12 et 21 (ces classes sont des singletons) et l'on a bien que  $\{1243, 1423, 4123\}$  et  $\{1432, 4132, 4312\}$  sont des classes plaxiques. Comme, par l'algorithme de Schensted, les classes plaxiques sont en bijection avec les tableaux normaux, nous obtenons une structure d'anneau sur le  $\mathbb{Z}$ -module libre de base les tableaux normaux. Le produit sur les tableaux se décrit directement ainsi : soient  $U, V$  deux tableaux ; soit  $\bar{V}$  le tableau obtenu en ajoutant  $n$  à chaque entrée de  $V$ , où  $n$  est le nombre de cases dans  $U$ . Alors  $U * V$  est égal à la somme des tableaux normaux  $T$  tels que :  $T$  restreint à  $\{1, \dots, n\}$

<sup>5</sup> Par classe plaxique, nous entendons la somme des éléments d'une telle classe.

est identique à  $U$ ;  $T$  restreint aux autres entiers se réduit à  $\bar{V}$  par jeu de taquin (voir [7] 5c, qui est une variante de [5] Th. 2.22). Un exemple est donné dans la figure 7.

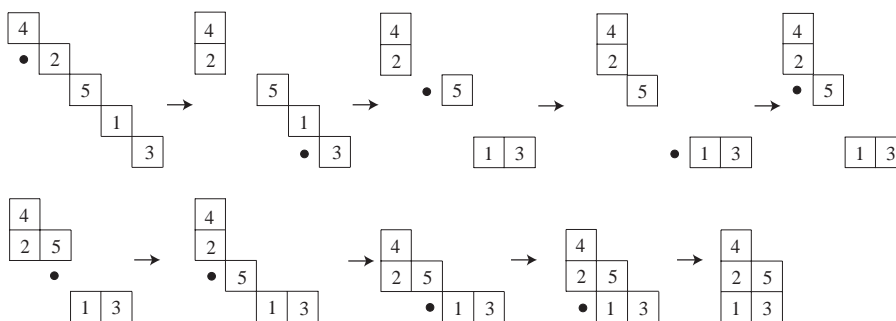
$$\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \\
 + \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 6 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 3 \\ \hline 1 & 2 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Figure 7

Pour retrouver la règle de Littlewood-Richardson énoncée plus haut, il reste à montrer que l'algèbre obtenue, de base les tableaux, s'envoie surjectivement sur l'algèbre des fonctions symétriques. Ceci se fait en envoyant le tableau normal  $T$ , de forme  $\lambda$ , sur la fonction de Schur  $s_\lambda$ ; voir par exemple [7] Th. 4.3.

### 5. L'algorithme de Schensted revu par jeu de taquin

À toute permutation  $\sigma$ , on associe le tableau, de forme anti-diagonale, dont les contenus sont donnés par  $\sigma$ ; voir la figure 8. Si on applique le jeu de taquin à ce tableau, on retrouve le tableau normal obtenu par l'algorithme de Schensted. Voir la figure 8 et comparer à la figure 5.



Le jeu taquin simule l'algorithme de Schensted :  $\sigma = 42513$

Figure 8

### 6. Commentaires et références

Pour comprendre mieux ce qui a été brièvement expliqué ici, on pourra consulter le livre de B. Sagan, qui en donne une présentation très simple. D'autres démonstrations existent : M. Haiman [8] donne une approche totalement planaire, sans passer par les permutations, et a aussi une équivalence duale de tableaux; S. Fomin [9] donne une approche par tableaux de croissance de partages; une preuve de la règle de Littlewood-Richardson proche de la preuve originelle de Schützenberger, ainsi qu'une introduction au monoïde plaxique, se trouve dans [10]; voir [11]

pour une approche par algèbres de Hopf ; voir aussi M. van Leeuwen [12], où le lecteur trouvera aussi toutes les références supplémentaires, ainsi qu'un historique.

[1] M. P. Schützenberger, *La correspondance de Robinson*, Lecture Notes in mathematics 579, 59-113, 1977.

[2] D.E. Knuth, Permutations, matrices, and generalized Young tableaux, Pacific J. Math. 34, 1970, 709-727.

[3] C. Schensted, *Longest increasing and decreasing subsequences*, Canadian Journal of mathematics 13, 1961, 179-191.

[4] G. P. Thomas, On Schensted's construction and the multiplication of Schur functions, Advances in Mathematics 30, 1978, 8-32.

[5] A. Lascoux, M. P. Schützenberger, *Le monoïde plaxique*, Quaderni della Ricerca 109, 1981, 129-156, CNR, Rome.

[6] B. Sagan, *The symmetric group. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1991 (seconde édition Springer 2001).

[7] S. Poirier, C. Reutenauer, *Algèbres de Hopf de tableaux*, Annales des Sciences mathématiques du Québec 19, 1995, 79-90.

[8] M. Haiman, Dual equivalence with applications, including a conjecture of Proctor, Discrete Mathematics 99, 1992, 79-113.

[9] S. Fomin, Knuth equivalence, jeu de taquin, and the Littlewood-Richardson rule, Appendice au livre de R.Stanley, Enumerative Combinatorics, vol.2, Cambridge univ. Press, 1999.

[10] A. Lascoux, B. Leclerc, J.-Y. Thibon, The plactic monoid, dans : M. Lothaire, Algebraic combinatorics on words, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 90. Cambridge University Press, 2002.

[11] D. Blessenohl, M. Schocker, Noncommutative character theory of the symmetric group, Imperial college Press, 2005.

[12] M. van Leeuwen, *The Littlewood-Richardson rule, and related combinatorics, Interaction of combinatorics and representation theory*, 95-145, MSJ Mem., 11, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.

## Spectre du laplacien et de l'opérateur de Schrödinger sur une variété : de la géométrie spectrale à l'analyse semi-classique

Olivier Lablée<sup>1</sup>

Il serait difficile de faire une présentation exhaustive de l'étude de l'opérateur laplacien et de celui de Schrödinger en quelques pages, néanmoins ces notes donnent un panorama partiel et historique sur l'étude spectrale de ces deux opérateurs. On y présente quelques résultats remarquables qui illustrent en particulier la diversité des thèmes mathématiques associés.

L'étude du laplacien dans l'espace euclidien usuel  $\mathbb{R}^n$ , et plus généralement de l'opérateur de Schrödinger, est bien sûr très présente en physique, comme par exemple en mécanique quantique : dans un système physique constitué d'une particule se déplaçant dans une partie ouverte  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ , l'espace de Hilbert associé est  $L^2(X)$ , et, si la particule n'est soumise à aucune force, l'hamiltonien<sup>2</sup> est :

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

où  $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$  est le laplacien de  $\mathbb{R}^n$ ,  $m$  la masse de la particule, et  $\hbar$  la constante de Planck. Si au contraire la particule est soumise à un champ de force dérivant d'un potentiel réel  $V$ , l'hamiltonien est alors :

$$H = H_0 + V$$

$V$  désignant l'opérateur de multiplication par la fonction  $V$ .

En géométrie riemannienne, l'opérateur de Laplace-Beltrami<sup>3</sup> est la généralisation du laplacien de  $\mathbb{R}^n$ . Pour une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  à valeurs réelles définie sur une variété riemannienne  $(M, g)$ , et pour  $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  une carte locale de la variété  $M$ , l'opérateur de Laplace-Beltrami, ou plus simplement laplacien de  $(M, g)$ , appliqué à la fonction  $f$  est donné par la formule locale :

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_k} \right)$$

où  $g = \det(g_{ij})$  et  $g^{jk} = (g_{jk})^{-1}$ .

Cet opérateur joue un très grand rôle au sein même des mathématiques : son spectre est un invariant géométrique majeur. Beaucoup de géomètres, motivés par le livre de Berger, Gauduchon et Mazet [10] se sont alors intéressés à cet invariant

<sup>1</sup> Institut Fourier, laboratoire de Mathématiques, université Joseph Fourier Grenoble I.

<sup>2</sup> En physique il représente l'énergie de la particule, mathématiquement c'est une fonction (contexte classique) ou bien un opérateur linéaire (contexte quantique).

<sup>3</sup> Dans ces notes, on utilise la convention de signe des analystes pour l'opérateur de Laplace-Beltrami. Dans la convention des géomètres  $\Delta_g f = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_k} \right)$ .

spectral. L'étude du laplacien, et plus particulièrement de son spectre, est un carrefour entre la théorie spectrale, l'analyse harmonique, la géométrie différentielle et même la théorie des groupes.

Le plan de ces notes est le suivant : dans une première partie on donne le contexte mathématique de manière à voir le laplacien et l'opérateur de Schrödinger comme des opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert. La partie suivante est consacrée aux problèmes directs consistant à déterminer le spectre de ces opérateurs. Ensuite, dans une autre partie, on présente rapidement la problématique inverse : à savoir dans quelle mesure le spectre peut-il déterminer la géométrie de départ ? Enfin, la dernière partie est une invitation à l'analyse semi-classique.

## 1. Préliminaires

### 1.1. Le contexte

Considérons une variété riemannienne  $(M, g)$  complète connexe de dimension  $n \geq 1$ . On lui associe l'espace de Hilbert  $L^2(M) = L^2(M, d\mathcal{V}_g)$ ,  $\mathcal{V}_g$  désignant le volume riemannien associé à la métrique  $g$ .

L'opérateur de Schrödinger  $H$  associé à la variété  $(M, g)$  de potentiel  $V$ ,  $V$  étant une fonction de  $M$  dans  $\mathbb{R}$ , est l'opérateur linéaire non-borné sur les fonctions lisses à support compact  $\mathcal{C}_c^\infty(M, \mathbb{R})$  défini par :

$$(1) \quad H = -\frac{h^2}{2}\Delta_g + V$$

$\Delta_g$  étant le laplacien de  $(M, g)$ , et  $h$  un paramètre positif. Par la suite, sauf dans la partie 5, pour des raisons de commodité d'écriture, on supposera que  $h = \sqrt{2}$ . Dans le cas où  $V \equiv 0$ , on parle simplement d'opérateur laplacien.

$$\text{Si } M = \mathbb{R}^n \text{ le laplacien canonique est } \Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

### 1.2. Motivation

On s'intéresse au problème spectral : trouver les couples non-triviaux  $(\lambda, u)$  de scalaires complexes et de fonctions tels que :

$$-\Delta_g u + Vu = \lambda u$$

(avec  $u \in L^2(M)$  dans le cas non compact).

Dans le cas des variétés à bord on a besoin en supplément d'imposer des conditions au bord sur les fonctions  $u$ , comme par exemple les conditions de Dirichlet : on impose  $u = 0$  sur le bord de  $M$ , ou celles de Neumann :  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  sur le bord de  $M$ ,  $n$  étant la normale extérieure au bord de  $M$ . Dans le cas des variétés compactes sans bord, comme par exemple la sphère, on parle de problème fermé.

Il y a deux problématiques majeures liées au spectre du laplacien (ou de l'opérateur de Schrödinger) sur une variété riemannienne complète  $(M, g)$  :

(1) Les problèmes directs : étant donnée une variété riemannienne  $(M, g)$ , que dire du spectre de l'opérateur  $-\Delta_g$  ou de celui de l'opérateur  $-\Delta_g + V$  ?

(2) Les problèmes inverses : étant donné le spectre de l'opérateur  $-\Delta_g$ , que dire géométriquement de la variété  $(M, g)$  ?

Avant de répondre à ces questions, examinons quelques propriétés générales du spectre.

### 1.3. Quelques propriétés de l'opérateur $H = -\Delta_g + V$

Intéressons nous aux hypothèses assurant d'une part le caractère auto-adjoint des opérateurs laplacien et de Schrödinger, et d'autre part l'obtention d'un spectre discret.

#### 1.3.1. Le caractère auto-adjoint

Une des premières questions à traiter lors de l'étude spectrale d'un opérateur linéaire est celle du caractère auto-adjoint, ou à défaut du caractère essentiellement auto-adjoint. Rappelons que un opérateur linéaire  $H$  est essentiellement auto-adjoint si son unique fermeture  $\overline{H}$  est auto-adjointe. Quel est l'intérêt du caractère auto-adjoint ? Il y a au moins deux bonnes raisons d'en parler :

(1) Si  $H$  est auto-adjoint, on a déjà une première information spectrale importante : le spectre de l'opérateur  $H$  est une partie de  $\mathbb{R}$ .

(2) Le caractère auto-adjoint assure en mécanique quantique l'unicité de la solution de l'équation de Schrödinger : en effet, à partir de l'hamiltonien auto-adjoint  $H$ , on peut, via le calcul fonctionnel [42], [49] construire de manière unique le groupe unitaire fortement continu  $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  où :

$$U(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H}.$$

Ainsi, pour tout état initial  $\psi_0$ , l'évolution quantique de  $\psi_0$  par l'hamiltonien  $H$  au cours du temps est donnée par

$$\psi(t) = U(t)\psi_0 = e^{-i\frac{t}{\hbar}H}\psi_0 \in L^2.$$

Notons bien qu'en dérivant la précédente expression on obtient :

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -\frac{i}{\hbar}H\psi(t)$$

C'est l'équation de Schrödinger qui régit toute la mécanique quantique !

Quels sont les principaux résultats connus sur le caractère auto-adjoint ?

– dans le cas où la variété est  $M = \mathbb{R}^n$  avec sa métrique standard, T. Carleman [12] en 1934 a montré que si la fonction  $V$  est localement bornée et globalement minorée, alors l'opérateur de Schrödinger  $H$  est essentiellement auto-adjoint ;

– en 1972, T. Kato [37] a montré que l'on pouvait remplacer dans l'énoncé de Carleman l'hypothèse  $V \in L_{loc}^\infty(M)$  par  $V \in L_{loc}^2(M)$  ;

– en 1994, I. Olenik [46], [47], [48] donne un énoncé très général concernant des variétés riemanniennes complètes connexes quelconques avec des hypothèses plus complexes sur la fonction  $V$ . Un corollaire sympathique de cet énoncé est le suivant :

**Théorème 1.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète connexe de dimension  $n \geq 1$ , et  $V$  une fonction de  $L_{loc}^\infty(M)$  telle que  $\forall x \in M, V(x) \geq C$ , où  $C$  est une constante réelle, alors l'opérateur  $H = -\Delta_g + V$  est essentiellement auto-adjoint.

### 1.3.2. Le spectre de l'opérateur est-il discret ?

Hormis le fait que le spectre est réel, que savons nous de plus ? En 1934 K. Friedrichs [31] a montré que dans le cas où la variété  $M = \mathbb{R}^n$  avec sa métrique standard, si la fonction  $V$  est confinante, ie  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ , alors le spectre de l'opérateur de Schrödinger  $H$  est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicités finies s'accumulant en  $+\infty$  :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Dans le contexte d'une variété riemannienne compacte avec un laplacien pur ( $V \equiv 0$ ), nous savons aussi [10] que le spectre de l'opérateur  $-\Delta_g$  est constitué d'une suite de valeurs propres positives, de multiplicités finies, et s'accumulant en  $+\infty$

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Qu'en est-il des variétés non compactes ? Commençons par donner une définition :

**Définition 1.** Soit  $(M, g)$  une variété lisse et  $V$  une fonction de  $M$  dans  $\mathbb{R}$ , on dira que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ , si et seulement si

$$\forall A > 0, \exists K \subset\subset M, \forall x \in M \setminus K, |f(x)| \geq A$$

Un des théorèmes concernant le spectre de l'opérateur de Schrödinger est celui de Kondratev et Shubin [38], [39] qui donnent un énoncé assez technique sur les variétés à géométrie bornée ; de cet énoncé, on a le corollaire bien pratique suivant :

**Théorème 2.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète connexe de dimension  $n \geq 1$ , et  $V$  une fonction de  $L_{loc}^\infty(M)$  telle que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ . Alors le spectre de l'opérateur  $H = -\Delta_g + V$  est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicités finies s'accumulant en  $+\infty$

$$\inf_{x \in M} V(x) \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Le théorème de Courant de 1953 [27], assure en particulier que la première valeur propre  $\lambda_1$  de l'opérateur  $H$  est simple :

$$\inf_{x \in M} V(x) \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

## 2. Un aperçu sur les problèmes directs

L'objectif est, à géométrie fixée, de pouvoir calculer, ou à défaut de donner des propriétés sur le spectre de l'opérateur  $-\Delta_g$  ou de celui de l'opérateur  $-\Delta_g + V$ . On va d'abord parler de résultats exacts, puis de méthodes qualitatives.

### 2.1. Calcul explicite de spectre

Il n'y a bien sûr pas de méthodes générales pour calculer un spectre d'opérateur linéaire; même dans le cas de Schrödinger sur une variété raisonnable, le calcul est souvent difficile, et finalement on dispose de peu d'exemples où l'on peut expliciter complètement le spectre. Voici tout de même quelques calculs exacts :

#### 2.1.1. Premier exemple : un problème fermé sur un tore

La théorie des séries de Fourier sur le tore  $T_L$  de dimension un et de longueur  $L > 0$  nous informe que le spectre de l'opérateur

$$H = -\frac{d^2}{dx^2}$$

est :

$$\sigma(H) = \left\{ \frac{4\pi^2 n^2}{L^2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

avec comme vecteurs propres associés les fonctions :

$$e_n(x) = e^{\frac{2i\pi nx}{L}}, n \in \mathbb{Z}$$

En effet, si  $\lambda \in \sigma(H)$ , alors par définition du spectre  $\exists u \in L^2(T_L)$ ,  $u \neq 0$  telle que  $-u'' = \lambda u$ . Par la théorie  $L^2$  des séries de Fourier la suite de fonctions

$$\left( e_n(x) = e^{\frac{2i\pi nx}{L}} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$$

est une base hilbertienne de  $L^2(T_L)$ , ainsi  $\exists! (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  telle que

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n$$

Ainsi l'équation différentielle  $-u'' - \lambda u = 0$  devient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \left( \frac{4\pi^2 n^2}{L^2} - \lambda \right) e_n = 0$$

Comme  $u \neq 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$ , tel que  $a_{n_0} \neq 0$ , ainsi  $-u'' - \lambda u = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4\pi^2 n_0^2}{L^2}$ . On vient donc de montrer l'inclusion

$$\sigma(H) \subset \left\{ \frac{4\pi^2 n^2}{L^2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Réciproquement il est clair que  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $H e_n = \frac{4\pi^2 n^2}{L^2} e_n$ , ainsi nous avons bien que

$$\sigma(H) = \left\{ \frac{4\pi^2 n^2}{L^2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

### 2.1.2. Second exemple : l'oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique, ou opérateur d'Hermite comme on le nomme en analyse harmonique, est l'un des rares exemples d'opérateur de Schrödinger sur une variété non compacte dont on arrive à calculer explicitement le spectre. L'oscillateur harmonique joue un rôle très important dans l'étude des systèmes intégrables en classification symplectique : il sert en effet de modèle de référence des équilibres stables de type elliptique ; pour plus de détails, on peut consulter le livre de Vu Ngoc [54].

Ici on prend  $M = \mathbb{R}$  et :

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2}$$

Les propriétés spectrales de l'opérateur  $H$  sont très remarquables : on arrive à calculer son spectre et les vecteurs propres associés de manière explicite. Ces calculs, d'un point de vu très formel, se trouvent dans n'importe quel bon livre de mécanique quantique. Pour des démonstrations précises, on conseille par exemple le livre de M.E. Taylor [53]. Le résultat est alors le suivant, le spectre de l'opérateur  $H$  est :

$$\sigma(H) = \left\{ n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

avec comme vecteurs propres associés la base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R})$  constituée des fonctions d'Hermite :

$$e_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \text{ où } H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

## 2.2. Étude qualitative spectrale

Dans nombre de cas on ne sait pas calculer un spectre ; on essaye alors de le décrire de manière qualitative. Il y a, disons, deux sous thèmes :

- le premier concerne le bas du spectre : on s'intéresse aux plus petites valeurs propres de l'opérateur.
- le second est l'étude de l'asymptotique des grandes valeurs propres : l'analyse semi-classique.

### 2.2.1. Exemples de résultats qualitatifs en bas du spectre

Donnons quelques exemples de résultats concernant le bas du spectre. Commençons par des résultats de comparaison des premières valeurs propres.

**Théorème 3.** (Théorème de Faber-Krahn, 1953) : soit  $M$  une partie bornée de  $\mathbb{R}^n$ . En notant par  $\lambda_1(M)$  la première valeur propre de l'opérateur  $-\Delta$  avec conditions de Dirichlet, on a :

$$\lambda_1(M) \geq \lambda_1(B_M)$$

$B_M$  désignant la boule euclidienne de volume égal à  $\text{Vol}(M)$ . Et on a égalité si et seulement si  $M$  est isométrique à  $B_M$ .

Dans le même style, on a aussi la version avec conditions de Neumann où l'inégalité est dans l'autre sens :

**Théorème 4.** (Théorème de Szegő-Weinberger, 1954) : soit  $M$  une partie bornée de  $\mathbb{R}^n$ . En notant par  $\mu_1(M)$  la première valeur propre de l'opérateur  $-\Delta$  avec conditions de Neumann, on a :

$$\mu_1(M) \leq \mu_1(B_M)$$

$B_M$  désignant la boule euclidienne de volume égal à  $\text{Vol}(M)$ . Et on a égalité si et seulement si  $M$  est isométrique à  $B_M$ .

Un autre type de résultat classique concerne les constantes de Cheeger :

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne connexe et compacte de dimension  $n \geq 1$ . Pour toute partie bornée régulière  $D$  de  $M$ , on considère la quantité

$$h(D, g) = \frac{\text{Vol}(\partial D, g)}{\text{Vol}(D, g)}$$

où  $\text{Vol}(\partial D, g)$  est le volume  $n - 1$  dimensionnel.

On définit ensuite la constante de Cheeger par

$$h(M, g) = \inf_{D \in X} h(D, g)$$

$X$  étant l'ensemble de tous les domaines de  $M$  de volumes majorés par  $\frac{\text{Vol}(M, g)}{2}$ . Alors un des résultats de Cheeger est que la première valeur propre non nulle du laplacien est minorée par  $\frac{h(M, g)^2}{4}$  [10].

Pour finir, donnons un autre résultat intéressant qui concerne la multiplicité des valeurs propres en fonction de la topologie. Pour cela plaçons nous un instant dans le cas des surfaces : si  $(M, g)$  est une surface complète connexe, et

$$H = -\Delta_g + V$$

avec  $V \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  tels que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ . En notant (cf. Théorème 2) par

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

le spectre de l'opérateur  $H$  et par  $m_k$  la multiplicité de la  $k$ -ème valeur propre  $\lambda_k$ , nous avons le résultat dû à S.Y. Cheng [14] et amélioré par G. Besson [11], Y. Colin De Verdière [19], N. Nadirashvili [45] et B. Sévenec [51] :

**Théorème 5.** Sous les hypothèses précédentes nous avons :

- Si  $X = \mathbb{S}^2$  ou  $\mathbb{R}^2$ , alors  $\forall k \geq 3$ ,  $m_k \leq 2k - 3$ .
- Si  $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ou  $K_2$  (la bouteille de Klein), alors  $\forall k \geq 1$ ,  $m_k \leq 2k + 1$ .
- Si  $X = \mathbb{T}^2$ , alors  $\forall k \geq 1$ ,  $m_k \leq 2k + 2$ .
- En notant par  $\chi(M)$  la caractéristique d'Euler-Poincaré, si  $\chi(M) < 0$ , alors  $\forall k \geq 1$ ,  $m_k \leq 2k - 2\chi(M)$ .

### 2.2.2. Étude qualitative du « haut » du spectre

L'exemple de base est la formule asymptotique de Weyl de 1911,[10]. Pour le laplacien dans un domaine rectangulaire  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  avec des conditions de Dirichlet aux bords, le physicien P. Debye conjectura que le nombre de valeurs propres  $\mathcal{N}(\lambda)$  inférieure à un réel positif  $\lambda$ , vérifié l'équivalence, pour  $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\mathcal{N}(\lambda) \sim \frac{\text{Vol}(\Omega)}{4\pi} \lambda$$

où  $\text{Vol}(\Omega)$  est l'aire du rectangle  $\Omega$ . En 1911, H.Weyl démontra cette conjecture.

**Théorème 6.** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte connexe de dimension  $n$ , si on note par  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$  les valeurs propres de l'opérateur  $-\Delta_g$  sur  $M$ , on a l'équivalent pour  $\lambda \rightarrow +\infty$*

$$\text{Card}(\{k \in \mathbb{N}, \lambda_k \leq \lambda\}) \sim \frac{B_n \text{Vol}(M, g)}{(2\pi)^n} \lambda^{\frac{n}{2}}$$

où  $B_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$  est le volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ .

On reviendra dans la dernière partie à l'étude du « haut » du spectre en utilisant l'analyse semi-classique.

## 3. Problèmes inverses : la géométrie spectrale

### 3.1. Le son détermine-t-il la forme d'un tambour ?

La problématique inverse est la suivante : étant donné le spectre d'un laplacien ou d'un opérateur de Schrödinger, quelles informations géométriques sur la variété  $(M, g)$  peut-on avoir ? Dans le cas du laplacien, un des premiers à formaliser mathématiquement cette question est sans doute Mark Kac [36] en 1966 dans son célèbre article « *Can one hear the shape of a drum ?* »<sup>4</sup> : pour le laplacien riemannien, une suite de valeurs propres (un ensemble d'harmoniques du tambour) caractérise-t-elle, à isométrie près, la variété de départ (la géométrie du tambour) ? Il est connu que si deux variétés sont isométriques, elles sont alors isospectrales (c'est-à-dire ont le même spectre). Mais qu'en est-t-il de la réciproque ?

On sait depuis 1964, que la réponse au problème de M. Kac est négative ; en effet, J. Milnor [53] donne comme exemple de variétés isospectrales mais non isométriques, une paire de tores plats de dimension 16. Depuis, de nombreux autres exemples ont été trouvés, à commencer par T. Sunada [52], qui en 1985 donne une méthode de construction systématique de variétés isospectrales non isomorphes. C. Gordon et E.N. Wilson [32] ont aussi donné en 1984 une méthode de construction de déformations continues de variétés qui sont isospectrales sans être isométriques. L'histoire ne s'arrête pas là, d'autres méthodes de construction apparaissent, comme par exemple la méthode de transplantation de P. Bérard [3], [4] etc...

En 1992, C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert [33] donnent le premier exemple de deux domaines plans non isométriques, mais ayant tout de même un spectre

<sup>4</sup> « Peut-on entendre la forme d'un tambour ? »

commun pour le laplacien avec conditions de Neumann ou de Dirichlet. Pour plus de détails sur cet exemple ou pourra consulter les auteurs [33], [34] mais aussi voir les articles très pédagogiques de P. Bérard [6], [7], [8]. Mentionnons aussi pour finir le travail de S. Zelditch [55] datant de 2000, où il montre que si on se restreint à des parties de  $\mathbb{R}^2$  simplement connexes avec un bord analytique et possédant deux axes de symétrie orthogonaux, alors le spectre détermine complètement la géométrie.

### 3.2. Spectre des longueurs et formules de traces

La donnée du spectre du laplacien donne des informations sur d'autres invariants géométriques comme la dimension, le volume et l'intégrale de la courbure scalaire. En fait le laplacien fournit aussi d'autres invariants, comme par exemple le spectre des longueurs d'une variété. Le spectre des longueurs d'une variété riemannienne est l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques. En 1973 Y. Colin de Verdière [15], [16], montre que dans le cas compact, modulo une hypothèse de genericité toujours vérifiée à courbure sectionnelle négative, le spectre du laplacien détermine complètement le spectre des longueurs. La technique utilisée par Y. Colin de Verdière repose sur les formules de traces. Ces dernières s'utilisent dans un cadre beaucoup plus général que celui des opérateurs de Schrödinger.

Le principe formel des formules de traces est le suivant : considérons d'abord un opérateur linéaire  $H$  non-borné sur un Hilbert ayant un spectre discret :  $\sigma(H) = \{\lambda_n, n \geq 1\}$ , et puis une fonction  $f$  « sympathique ». La formule de trace consiste alors à calculer la trace de l'opérateur  $f(H)$  de deux façons différentes :

– la première façon, lorsque que cela a un sens, avec les valeurs propres de l'opérateur linéaire  $f(H)$

$$\mathrm{Tr}(f(H)) = \sum_{k \geq 1} f(\lambda_k)$$

– la seconde façon, via le noyau de Schwartz de l'opérateur  $f(H)$ , si  $f(H)\varphi(x) = \int_M K_f(x, y)\varphi(y) dy$ , alors

$$\mathrm{Tr}(f(H)) = \int_M K_f(x, x) dx$$

Ainsi

$$\sum_{k \geq 1} f(\lambda_k) = \int_M K_f(x, x) dx$$

La difficulté réside dans le choix de  $f$ , d'une part pour légitimer ces formules, et d'autre part pour arriver à en tirer des informations spectro-géométriques. Les choix de fonctions  $f$  les plus courants sont :  $f(x) = e^{-xt}$  où  $t \geq 0$  (fonction de la chaleur),  $f(x) = \frac{1}{x^s}$ , où  $s \in \mathbb{C}$ , avec  $\mathrm{Re}(s) > 1$  (fonction zêta de Riemann),  $f(x) = e^{-\frac{itx}{h}}$  où  $t \geq 0$  (fonction de Schrödinger), etc ...

Pour fixer les idées, donnons un exemple simple de formule de trace exacte : la formule sommatoire de Poisson pour un réseau <sup>5</sup>  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^n$ . La formule de Poisson sur le tore  $\Gamma \backslash \mathbb{R}^n$  nous donne l'égalité :

$$(2) \quad \sum_{\lambda \in \sigma(\Delta_g)} e^{-\lambda t} = \frac{\text{Vol}(\Gamma \backslash \mathbb{R}^n)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \sum_{l \in \Sigma} e^{-\frac{l^2}{4t}}$$

où  $\sigma(\Delta_g)$  est le spectre de l'opérateur  $\Delta_g$  et  $\Sigma$  le spectre des longueurs comptées avec leurs multiplicités, la multiplicité d'une longueur étant le nombre de classes d'homotopies de lacets du tore plat  $\Gamma \backslash \mathbb{R}^n$  représentées par une géodésique périodique de cette longueur. Dans l'égalité (2) le terme de droite correspond à la partie géométrique (volume, dimension,...) alors que le terme de gauche contient les informations spectrales. Pour une référence récente voir [26].

#### 4. Une invitation à l'analyse semi-classique

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude spectrale de l'opérateur de Schrödinger sur une variété riemannienne complète connexe de dimension  $n \geq 1$  :

$$(3) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta_g + V$$

où  $\hbar$  est un paramètre réel strictement positif.

De manière extrêmement simple et naïve, l'idée de l'analyse semi-classique est de comprendre le spectre de l'opérateur  $H$  lorsque le paramètre  $\hbar \rightarrow 0$ . On va dans cette partie donner une idée générale de ce qu'est l'analyse semi-classique, puis on terminera sur un exemple concret de calcul de spectre. Pour le lecteur qui voudrait en savoir plus sur l'analyse semi-classique, on conseille la littérature suivante : Y. Colin de Verdière [25], Dimassi-Sjöstrand [28], L. Evans et M. Zworski [29], A. Martinez [43], D. Robert [50], S. Vu Ngoc [54].

##### 4.1. Philosophie de l'analyse semi-classique

Dans la limite des grandes valeurs propres, l'asymptotique du spectre de l'opérateur de Schrödinger

$$H = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta_g + V$$

ou plus généralement d'un opérateur pseudo-différentiel, est remarquablement liée à une géométrie sous-jacente. Celle-ci vit sur le fibré cotangent  $T^*M$ , vu comme une variété symplectique<sup>6</sup> : c'est la géométrie de l'espace des phases. C'est d'ailleurs le même phénomène qui permet de voir la mécanique classique (structure de variété symplectique) comme limite de la mécanique quantique (structure d'algèbre d'opérateurs).

<sup>5</sup> Un réseau de  $\mathbb{R}^n$  est un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}^n$  qui engendre  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>6</sup> Rappelons que le fibré cotangent d'une variété différentiable est naturellement muni d'une structure symplectique. En effet, pour toute variété  $M$  lisse de dimension  $n$ , on peut munir de façon intrinsèque son fibré cotangent  $T^*M$  d'une structure de variété symplectique  $(T^*M, \omega)$  de dimension  $2n$  définie par la différentielle extérieure  $\omega = d\alpha$  de la 1-forme de Liouville  $\alpha$ .

Voyons pourquoi s'intéresser à l'asymptotique du spectre de l'opérateur  $H$ , revient dans une certaine mesure à faire tendre le paramètre  $h$  vers 0 (limite semi-classique).

Par exemple, pour  $E > 0$  fixé, l'équation :

$$-\frac{h^2}{2}\Delta_g\varphi = E\varphi$$

admet  $\varphi_k$ , le  $k$ -ième vecteur propre du laplacien  $\Delta_g$ , comme solution si

$$-\frac{h^2}{2}\lambda_k = E$$

Ainsi si  $h \rightarrow 0^+$ , alors  $-\lambda_k \rightarrow +\infty$ . C'est pourquoi la limite semi-classique peut se voir comme l'asymptotique des grandes valeurs propres du laplacien.

Revenons un instant à la limite  $h \rightarrow 0$ , quel est son sens physique? En « principe » tout système physique est de par nature quantique. D'après les fameuses inégalités d'incertitude de Heisenberg, on ne peut pas mesurer précisément à la fois vitesse et position d'un électron, sauf si  $h = 0$ . En fait plus  $h$  est petit, plus on peut faire des mesures simultanées précises. Ainsi plus  $h \rightarrow 0$ , plus on se rapproche du déterminisme de la mécanique classique sur le fibré cotangent  $T^*M$ .

En pratique quand on fait de l'analyse semi-classique, on travaille à la fois avec des objets classiques (variétés symplectiques, algèbre des fonctions  $C^\infty$ , crochet de Poisson, équations de Hamilton,...) et des objets quantiques (espace de Hilbert, algèbre d'opérateurs, commutateur, équation de Schrödinger,...). Pour l'étude d'un opérateur de Schrödinger on est amené à considérer deux hamiltoniens vivant sur deux structures mathématiques distinctes :

– Hamiltonien classique

On notera par  $p$  la fonction définie sur le fibré cotangent de  $M$  par :

$$p(x, \xi) = \frac{\xi^2}{2} + V(x) \in C^\infty(T^*M, \mathbb{R})$$

– Hamiltonien quantique

On associe à la fonction  $p$  définie ci dessus, son quantifié de Weyl  $\widehat{P}$ , opérateur linéaire à domaine agissant sur une sous partie de  $L^2(M)$  :

$$\widehat{P} = -\frac{h^2}{2}\Delta_g + V$$

Pour finir, donnons une notation utile :

**Notation 1.** Soient  $u_h$  et  $v_h$  deux fonctions dépendant d'un paramètre  $h > 0$ , alors si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists C_k > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |u_h(x) - v_h(x)| \leq C_k h^k$$

on dira alors que les deux fonctions  $u_h$  et  $v_h$  sont égales à  $O(h^\infty)$  près, et on notera  $u_h = v_h + O(h^\infty)$ .

**Définition 2.** Le spectre semi-classique d'un opérateur linéaire auto-adjoint  $\widehat{H}$  est l'ensemble  $\Sigma_h(\widehat{H})$  des  $\mu_h \in \mathbb{R}$  tels que

$$\exists u_h \in L^2(M), u_h \neq 0, \left( \widehat{H} - \mu_h I_d \right)(u_h) = O(h^\infty)$$

$I_d$  étant l'opérateur identité.

Moralement le spectre semi-classique (ou microlocal) correspond aux valeurs propres approchées avec une précision d'ordre  $O(h^\infty)$ .

Le lien précis entre spectre exact et semi-classique est donné par la

**Proposition 1.** [54] *Sur un compact  $K$  de  $\mathbb{R}$ , le spectre semi-classique  $\Sigma_h(\widehat{H})$  et le spectre exact  $\sigma(\widehat{H})$  de l'opérateur linéaire auto-adjoint  $\widehat{H}$  sont liés par :*

$$\Sigma_h(\widehat{H}) \cap K = \sigma(\widehat{H}) \cap K + O(h^\infty)$$

au sens où si  $\lambda_h \in \Sigma_h(\widehat{H}) \cap K$ , alors  $\exists \mu_h \in \sigma(\widehat{H}) \cap K$  tel que  $\lambda_h = \mu_h + O(h^\infty)$ ; et si  $\mu_h \in \sigma(\widehat{H}) \cap K$ , alors  $\exists \lambda_h \in \Sigma_h(\widehat{H}) \cap K$  tel que  $\mu_h = \lambda_h + O(h^\infty)$ .

## 4.2. Un exemple de calcul de spectre semi-classique : le double puits

Dans une série de trois articles [20], [21] et [24] Y. Colin de Verdière et B. Parisse se sont intéressés au spectre semi-classique de l'opérateur de Schrödinger

$$\widehat{P} = -\frac{h^2}{2}\Delta + V$$

sur la variété  $M = \mathbb{R}$ , avec un potentiel  $V$  type double puits ayant un unique maximum local non dégénéré. Dans [21] et [24] les deux auteurs donnent une condition nécessaire et suffisante pour trouver le spectre semi-classique de l'opérateur  $\widehat{P}$  dans une boule de taille  $h$  centrée autour de l'origine. Dans [41] on donne, à partir de la formule de Colin de Verdière-Parisse, la forme de ce spectre.

### 4.2.1. Le contexte

Soit  $V \in C^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ , et  $V$  possédant exactement un maximum local non dégénéré, que l'on supposera atteint en 0, ainsi :  $V(0) = 0$ ,  $V'(0) = 0$ ,  $V''(0) < 0$ . Un exemple typique est la fonction :  $V(x) = x^4 - x^2$ .

On notera par  $p$  l'hamiltonien classique définie sur le fibré cotangent de  $\mathbb{R}$  par :

$$p(x, \xi) = \frac{\xi^2}{2} + V(x) \in C^\infty(T^*\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

On associe à cette fonction, l'hamiltonien quantique  $\widehat{P}$ , vu comme opérateur linéaire non-borné sur  $L^2(\mathbb{R})$  :

$$\widehat{P} = -\frac{h^2}{2}\Delta + V$$

Pour étudier le spectre de l'opérateur  $\widehat{P}$  dans un voisinage de taille  $h$  autour de l'origine, fixons nous un  $C > 0$ , et pour  $\lambda \in [-C, C]$  considérons l'opérateur :

$$\widehat{H}_\lambda = \widehat{P} - h\lambda I_d$$

Ainsi par définition du spectre semi-classique, nous avons que

$$\exists u_h \in L^2(\mathbb{R}), u_h \neq 0, \widehat{H}_\lambda(u_h) = O(h^\infty) \iff \lambda h \in \Sigma_h(\widehat{P})$$

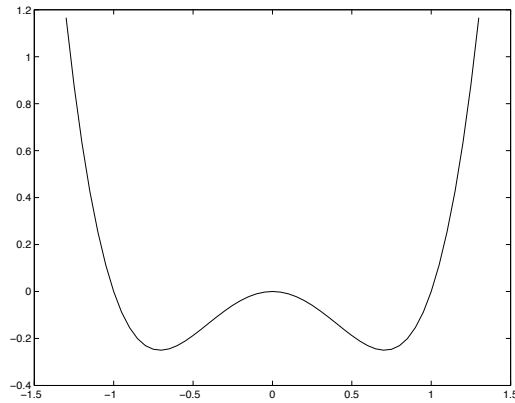


FIG. 1. La courbe représentative de la fonction potentiel  $V(x) = x^4 - x^2$ . On distingue les deux puits (les minimums) du potentiel, le droit et le gauche.

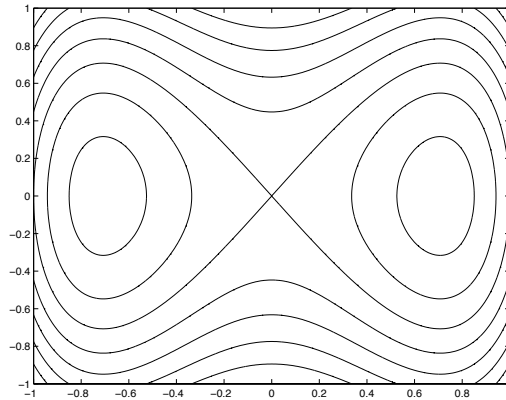


FIG. 2. Courbes de  $p^{-1}(c)$  dans le fibré cotangent  $T^*\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ . Avec des  $c > 0$  : une seule composante connexe,  $c = 0$  : le huit hyperbolique,  $c < 0$  : deux composantes connexes elliptiques.

#### 4.2.2. La formule de Colin de Verdière-Parisse

Y. Colin de Verdière et B. Parisse, à l'aide de techniques fines d'analyse microlocale, et en utilisant des formes normales, ont démontré la formule suivante [21], [24] :

**Théorème 7.** *L'équation  $\widehat{H}_\lambda(u_h) = O(h^\infty)$  admet une solution  $u_h \in L^2(\mathbb{R})$  non triviale, avec son microsupport  $MS(u_h) = p^{-1}\{0\}$ , si et seulement si  $\lambda$  vérifie l'équation suivante :*

$$(4) \quad \frac{1}{\sqrt{1+e^{2\pi\varepsilon}}} \cos\left(\frac{\theta_g - \theta_d}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta_g + \theta_d}{2} + \frac{\pi}{2} + \varepsilon \ln(h) + \arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\varepsilon\right)\right)\right)$$

où  $\varepsilon = \varepsilon(h, \lambda)$ ,  $\theta_{g/d} = \theta_{g/d}(h, \lambda)$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  par rapport à  $\lambda$  et admettant des développements asymptotiques en puissance de  $h$ . Plus précisément :

$$\varepsilon(h, \lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{-V''(0)}} + \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j(\lambda) h^j$$

$$\theta_{g/d}(h, \lambda) = \frac{1}{h} A_{g/d}(0) - \lambda \sigma_{g/d}(0) + \sum_{j \geq 1} \theta_{g/d,j}(\lambda) h^j$$

où  $A_{g/d}(0)$  désigne l'intégrale d'action du puit gauche/droit, et  $\sigma_{g/d}(0)$  l'invariant symplectique associé [54].

#### 4.2.3. Le spectre est un doublet en quinconce

En utilisant la formule de Colin de Verdière-Parisse, on peut en déduire des informations sur la forme du spectre semi-classique de l'opérateur

$$\widehat{P} = -\frac{h^2}{2} \Delta + V$$

autour de l'origine. A cause de la présence des deux puits de potentiel on s'attend à avoir deux spectres qui s'entremêlent ; dans [41] on montre que dans une bande  $[-Ch, Ch]$ , où  $C$  est une constante réelle strictement positive et indépendante du paramètre  $h$ , le spectre semi-classique de l'opérateur  $\widehat{P}$  est constitué de deux familles de réels en quinconce, et l'interstice est d'ordre  $O(h/|\ln(h)|)$  :

**Théorème 8.** *Le spectre semi-classique de l'opérateur  $\widehat{P}$  sur un compact de la forme  $[-Ch, Ch]$  où  $C > 0$ , s'écrit comme la réunion disjointe de deux suites :*

$$(h\alpha_k(h))_k \amalg (h\beta_l(h))_l$$

avec  $\alpha_k(h) = \mathcal{A}_h(k)$  et  $\beta_l(h) = \mathcal{B}_h(l)$ ,  $\mathcal{A}_h$  et  $\mathcal{B}_h$  étant des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$ . Les deux suites  $(h\alpha_k(h))_k$  et  $(h\beta_l(h))_l$  sont strictement décroissantes et en quinconce :

$$h\beta_{k+1}(h) < h\alpha_k(h) < h\beta_k(h) < h\alpha_{k-1}(h)$$

En outre l'interstice est de l'ordre de  $O(h/|\ln(h)|)$  :

$$|h\alpha_k(h) - h\alpha_{k-1}(h)| = O\left(\frac{h}{|\ln(h)|}\right) \quad \text{et} \quad |h\beta_l(h) - h\beta_{l-1}(h)| = O\left(\frac{h}{|\ln(h)|}\right)$$

## 5. Références

- [1] C. ANNÉ, *Majoration de multiplicités pour l'opérateur de Schrödinger*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie de Grenoble 8 : 53-60, 1989-1990.
- [2] P. BÉRARD, *Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques*, Astérisque 177-178 : 127-154, 1989.
- [3] P. BÉRARD, *Transplantation et isospectralité I*, Math. Ann. 292 : 547-559, 1992.
- [4] P. BÉRARD, *Transplantation et isospectralité II*, J. London Math. Soc. 48 : 565-576, 1993.
- [5] P. BÉRARD, *The isospectral problem for Riemannian manifolds*, Cours de DEA, Grenoble 1993. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/isos-dea93.ps>
- [6] P. BÉRARD, *On ne peut pas entendre la forme d'un tambour : Introduction*, Auxerre 2001. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/tambours.pdf>
- [7] P. BÉRARD, *On ne peut pas entendre la forme d'un tambour : Exposé 1*, Auxerre 2001. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/auxerre1.pdf>
- [8] P. BÉRARD, *On ne peut pas entendre la forme d'un tambour : Exposé 2*, Auxerre 2001. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/auxerre2.pdf>
- [9] P. BÉRARD & M. BERGER, *Le spectre d'une variété riemannienne en 1982*, Kaigai (Tokyo) 1983.
- [10] M. BERGER, P. GAUDUCHON & E. MAZET, *Le spectre d'une variété Riemannienne*, Lectures Notes in Mathematics 194, Springer-Verlag 1971.
- [11] G. BESSON, *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Ann. Inst. Fourier. 30 : 109-128, 1980.
- [12] T. CARLEMAN, *Sur la théorie mathématique de l'équation de Schrödinger*, Ark. Mat. Astr. Fys. 24B 11 :1-7, 1934.
- [13] S. Y. CHENG, *Eigenvalues comparison theorems and geometric applications*, Math. Z. 143 : 289-290, 1975.
- [14] S. Y. CHENG, *Eigenfunctions and nodal sets*, Comment. Math. Helv. 51 : 43-55, 1979.
- [15] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I*, Compositio Mathematica, 27 : 80-106, 1973.
- [16] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II*, Compositio Mathematica, 27 : 159-184, 1973.
- [17] Y. COLIN DE VERDIÈRE & J. VEY, *Le lemme de Morse isochore*, Topology, 18 : 283-293, 1979.
- [18] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien*, Comment. Math. Helv. 61 : 254-270, 1986.
- [19] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris, 20 : 599-615, 1987.
- [20] Y. COLIN DE VERDIÈRE & B. PARISSÉ, *Equilibre instable en régime semi-classique I : Concentration microlocale*, Comm PDE, 19 : 1535-1564, 1994.
- [21] Y. COLIN DE VERDIÈRE & B. PARISSÉ, *Equilibre instable en régime semi-classique II : Conditions de Bohr-Sommerferld*, Ann IHP, 61 : 347-367, 1994.
- [22] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Le spectre du laplacien : survol partiel depuis le Berger-Gauduchon-Mazet et problèmes*, Actes de la table tournante en l'honneur de Marcel Berger, Séminaires et Congrès SMF, 1 : 233-252, 1996.
- [23] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectres de graphes*, Cours Spécialisés numéro 4, SMF, 1998.
- [24] Y. COLIN DE VERDIÈRE & B. PARISSÉ, *Singular Bohr-Sommerfeld rules*, Commun. Math. Phys, 205 : 459-500, 2000.

- [25] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Méthodes semi-classiques et théorie spectrale*, Cours de DEA, 2006.
- [26] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectrum of the Laplace operator and periodic geodesics : thirty years after*, Ann. Inst. Fourier. 57 (7) : 2429-2463, 2008.
- [27] R. COURANT & D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, Intersciences Publishers, New York, 1953.
- [28] M. DIMASSI & J. SJÖSTRAND, *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, London Math Society Lecture Note Series 268, 1999.
- [29] L. EVANS & M. ZWORSKI, *Lectures on semiclassical analysis*. <http://math-berkeley.edu/~zworski/semiclassical.pdf>.
- [30] G. FABER, *Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kriesförmige den tiefsten Grundton gibt*. *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München Jahrgang*, 169-172, 1923.
- [31] K. FRIEDRICHS, *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren*, Math. Ann. 109 : 465-487, 685-713, 1934.
- [32] C. GORDON & E. N. WILSON, *Isospectral deformations on compact solvmanifolds*, J. Diff. Geom. 19 : 241-256, 1984.
- [33] C. GORDON, D. WEBB & S. WOLPERT, *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, *Inventiones mathematicae* 110 : 1-22, 1992.
- [34] C. GORDON, D. WEBB & S. WOLPERT, *One cannot hear the shape of a drum*, *Bulletin of the AMS* 27 : 134-138, 1992.
- [35] C. GORDON, *Isospectral closed riemannian manifolds which are not locally isometric*, J. Diff. Geom. 37 : 639-649, 1993.
- [36] M. KAC, *Can one hear the shape of a drum ?*, *American Mathematical Monthly* 73 (4) : 1-23, 1966.
- [37] T. KATO, *Schrödinger operators with singular potentials*, *Israel J. Math.* 13 : 135-148, 1972.
- [38] V. A. KONDRAT'EV & M.A. SHUBIN, *Discreteness of the spectrum for Schrödinger operators on manifolds of bounded geometry*, *Proceedings of the conference "Functional Analysis, Partial Differential Equations and Applications" dedicated to the V. G. Maz'ya 60th birthday*, Rostock, 1998.
- [39] V. A. KONDRAT'EV & M.A. SHUBIN, *Conditions for the discreteness of the spectrum for Schrödinger operators on manifolds*, *Funct. Anal. and Appl.* 33, 1999.
- [40] E. KRAHN, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*, *Math. Ann.* 94 : 97-100, 1925.
- [41] O. LABLÉE, *Sur le calcul du spectre semi-classique de l'opérateur de Schrödinger autour d'une singularité hyperbolique*. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~lablee/hyperbolique.pdf>
- [42] P. LÉVY-BRUHL, *Introduction à la théorie spectrale*, Dunod, 2003.
- [43] A. MARTINEZ, *An introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*, Springer, 2001.
- [44] J. MILNOR, *Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds*, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 51 : 542, 1964.
- [45] N. NADIRASHVILI, *Multiple eigenvalues of the Laplace operator*, *Math. USSR Sbornik*, 61 : 225-238, 1988.
- [46] I. M. OLEINIK, *On the essential self-adjointness of the Schrödinger operators on a complete Riemannian manifold*, *Math. Notes.* 54 : 934-939, 1993.

- [47] I. M. OLEINIK, *On the connection of the classical and quantum mechanical completeness of a potential at infinity on complete Riemannian manifolds*, Math. Notes. 55 : 380-386, 1994.
- [48] I. M. OLEINIK, *On the essential self-adjointness of the Schrödinger-type operators on a complete Riemannian manifold*, PhD thesis, Northeastern University, 1997.
- [49] M. REED & B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press, 1975.
- [50] D. ROBERT, *Autour de l'approximation semi-classique*, volume 68 of Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1987.
- [51] B. SEVENNEC, *Majoration topologique de la multiplicité du spectre des surfaces*, Séminaire de Théorie spectrale et géométrie de Grenoble, 12 : 29-35, 1993-1994.
- [52] T. SUNADA, *Riemannian covering and isospectral manifolds*, Ann. of Math. 121 : 169-186, 1985.
- [53] M. E. TAYLOR, *Noncommutative harmonic analysis*, Mathematical Surveys and Monographs, AMS, 1986.
- [54] S. VU NGOC, *Systèmes intégrables semi-classiques : du local au global*, Panoramas et synthèses 22, SMF, 2006.
- [55] S. ZELDITCH, *Spectral determination of analytic bi-axisymmetric plain domains*, Geom. And Func. Ana. 10 : 628-677, 2000.

*L'auteur remercie les prélecteurs de ces notes, en particulier, Stéphane Baseilhac, Pierre Bérard, Gérard Besson, Yves Colin de Verdière, Gilles Leborgne et Hervé Pajot.*