

HOMMAGE À ADRIEN DOUADY

La thèse d'Adrien Douady sur l'espace modulaire des sous-espaces compacts d'un espace analytique complexe

Christian Houzel

Dans ce travail, publié en 1966 dans les *Annales de l'Institut Fourier*¹, A. Douady a entrepris de résoudre un problème posé par Grothendieck dans le séminaire Cartan de 1960-61. L'espace analytique complexe X étant donné, il s'agit d'établir que le foncteur contravariant R de la catégorie des espaces analytiques complexes dans la catégorie des ensembles, défini par $R(S) = \{Y \subset S \times X \setminus Y \text{ propre et plat sur } S\}$ est représentable ; le problème correspondant était résolu en géométrie algébrique.

Si H est l'espace analytique (unique à isomorphisme unique près) représentant R , on a une bijection fonctorielle $R(S) \approx \text{Hom}(S, H)$; à l'application identique de H correspond un élément R de $R(H)$, c'est-à-dire un sous-espace analytique de $H \times X$ propre et plat sur H . Pour tout morphisme f d'un espace analytique S dans H , l'élément de $R(S)$ correspondant est l'image inverse de R par $f \times \text{id}_X$. Dans le cas où $S = \{s\}$ est réduit à un point (avec le faisceau structural \mathbb{C}), $R(S)$ s'identifie à l'ensemble des sous-espaces analytiques compacts de X et $\text{Hom}(S, H)$ s'identifie à l'ensemble sous-jacent à H ; on peut donc identifier cet ensemble à celui des sous-espaces analytiques compacts de X , le sous-espace correspondant à un point s de H étant la fibre $R(s)$ de R au-dessus de s . Ainsi R s'interprète comme la famille universelle des sous-espaces analytiques compacts de X .

Un sous-espace de $S \times X$, tel que Y , est défini par l'annulation d'un idéal cohérent \mathcal{I}_Y de $\mathcal{O}_{S \times X}$, \mathcal{O}_Y s'identifiant à $\mathcal{O}_{S \times X} / \mathcal{I}_Y$; plus généralement, on peut considérer, avec Douady, un faisceau analytique cohérent \mathcal{E} sur X et le foncteur

$R_{\mathcal{E}} : S \mapsto \{\mathcal{F} \text{ analytique cohérent quotient de } \mathcal{E}_S, \text{ plat et à support propre sur } S\}$, où \mathcal{E}_S désigne bien sûr l'image inverse de \mathcal{E} par la projection $S \times X \rightarrow X$. Si ce foncteur est représentable par un espace analytique $H = H(\mathcal{E})$, l'ensemble sous-jacent à H s'identifie à celui des faisceaux cohérents quotients de \mathcal{E} dont le support est compact et on a un faisceau universel $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ quotient de \mathcal{E}_H , plat et à support propre sur H .

L'espace H s'obtient en recollement des morceaux locaux. Si \mathcal{F} est un faisceau cohérent quotient de \mathcal{E} et à support compact, on considère un recouvrement fini du support de \mathcal{F} par des ouverts de Stein X_i dans X ; pour chaque indice i , $\Gamma(X_i, \mathcal{F})$ est un quotient du $\Gamma(X_i, \mathcal{O}_X)$ -module $\Gamma(X_i, \mathcal{E})$. On aimerait définir une structure d'espace analytique sur l'ensemble G_i des quotients de ce type et trouver

¹ (16, 1, p. 1-98)

un voisinage du point s de H qui correspond à \mathcal{F} comme le sous-espace du produit $\prod G_i$ défini par une condition de recollement dans les $X_i \cap X_j$. Bien entendu, cette description est très grossière et il faut l'affiner; Douady a introduit à cet effet des moyens techniques efficaces : les espaces analytiques banachiques, et les cuirasses privilégiées.

Il nous faut des Banach

On doit passer par la géométrie analytique en dimension infinie car les espaces $\Gamma(X_i, \mathcal{E})$ sont de dimension infinie. De plus, ce sont, au mieux, des espaces de Fréchet; même en définissant convenablement les applications analytiques d'un ouvert d'espace de Fréchet dans un espace de Fréchet, on ne dispose pas de théorème de l'inversion locale, ce qui est un sérieux obstacle à l'édification d'une géométrie analytique fréchétienne. C'est ce qui a conduit Douady à remplacer les ouverts X_i par des compacts d'un type particulier, privilégiés, pour pouvoir définir des espaces de sections qui soient des espaces de Banach, et à bâtir une géométrie analytique banachique. Il avait coutume de chantonner « *Il nous faut des Banach, n'en fût-il plus au monde...* » sur un air de *La belle Hélène*.

Si K est un polycylindre de \mathbb{C}^n (c'est-à-dire un produit $K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$ où chaque K_i est une partie compacte convexe de \mathbb{C}) et F un espace de Banach, on note $C(K, F)$ l'espace de Banach des applications continues de K dans F muni de la norme de la convergence uniforme dans K et $B(K, F)$ l'adhérence dans $C(K, F)$ de l'espace des applications analytiques au voisinage de K ; lorsque l'intérieur de K n'est pas vide, $B(K, F)$ est le sous-espace de $C(K, F)$ formé des applications analytiques à l'intérieur de K . Il est facile d'établir que $B(K, F)$ s'identifie au produit tensoriel complété $B(K) \hat{\otimes}_\varepsilon F$, où $B(K) = B(K, \mathbb{C})$; si $K = K' \times K''$, où K' et K'' sont des polycylindres de dimensions inférieures, $B(K) = B(K') \hat{\otimes}_\varepsilon B(K'')$.

Il faut maintenant définir un espace de Banach de sections $B(K, \mathcal{F})$, \mathcal{F} étant un faisceau analytique cohérent au voisinage de K . C'est l'espace qui représente le foncteur contravariant $B_{\mathcal{F}} : E \mapsto L(E, B(K)) \otimes_{O(K)}^L \mathcal{F}(K)$, si du moins ce foncteur est représentable dans la catégorie des espaces de Banach (il s'agit du produit tensoriel au sens des catégories dérivées), ce qui exige des conditions sur K et \mathcal{F} . En particulier les $Tor_q^{O(K)}(L(E, B(K)), \mathcal{F}(K))$ doivent s'annuler pour tout $q \geq 1$ et tout espace de Banach E ; c'est le cas lorsque $\mathcal{F} = O_{\mathbb{C}^n}^r$ car $\mathcal{F}(K) = O_{\mathbb{C}^n}(K)^r$ et on a donc $B(K, O_{\mathbb{C}^n}^r) = B(K)^r$.

D'une manière générale, si le foncteur $B_{\mathcal{F}}$ est représentable, en prenant $E = \mathbb{C}$, on voit que $B(K, \mathcal{F}) \approx B(K) \otimes_{O(K)} \mathcal{F}(K)$ muni d'une norme convenable.

On sait qu'un faisceau analytique cohérent \mathcal{F} au voisinage de K admet une résolution libre finie $\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ au voisinage de K , où chaque \mathcal{L}_i est de la forme $O_{\mathbb{C}^n}^{r_i}$; de plus, on a un quasi-isomorphisme de complexes de $O_{\mathbb{C}^n}(K)$ -Modules $\mathcal{L} \cdot (K) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(K)$ (théorèmes A et B de Cartan). Il en résulte que, si $B_{\mathcal{F}}$ est représentable, pour tout espace de Banach E , on a un quasi-isomorphisme $L(E, B(K, \mathcal{L} \cdot)) \xrightarrow{\sim} L(E, B(K, \mathcal{F}))$; cela revient à dire que le complexe d'espaces de Banach $B(K, \mathcal{L} \cdot)$ est direct, acyclique en degrés ≥ 1 et que

$$(1) \quad H_0(B(K, \mathcal{L} \cdot)) \approx B(K, \mathcal{F}).$$

Dans ce contexte, on dit qu'une application linéaire continue entre des espaces de Banach est directe lorsque son noyau et son image sont facteurs directs topologiques; on dit qu'un complexe est direct lorsque tous ses morphismes de transition sont directs. Ainsi, on peut définir l'espace de Banach $B(K, \mathcal{F})$ si \mathcal{F} admet, au voisinage de K , une résolution libre finie \mathcal{L} . telle que le complexe $B(K, \mathcal{L})$ soit direct et acyclique en degrés ≥ 1 ; on dit alors que le polycylindre K est \mathcal{F} -privilegié et on peut définir $B(K, \mathcal{F})$ par la formule (1). Si K est \mathcal{F} -privilegié, pour toute résolution finie libre \mathcal{L} . de \mathcal{F} au voisinage de K , $B(K, \mathcal{L})$ est direct et acyclique en degrés ≥ 1 et on a un isomorphisme (1).

On déduit immédiatement de cette définition que si $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de faisceaux analytiques cohérents au voisinage d'un polycylindre K privilegié pour \mathcal{F}' et pour \mathcal{F}'' , K est aussi privilegié pour \mathcal{F} et la suite

$$0 \rightarrow B(K, \mathcal{F}') \rightarrow B(K, \mathcal{F}) \rightarrow B(K, \mathcal{F}'') \rightarrow 0$$

est exacte et directe. Si K est privilegié pour \mathcal{F} et pour \mathcal{F}'' , il est aussi privilegié pour \mathcal{F}' . Soient maintenant $f : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ et $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$ des morphismes de faisceaux analytiques cohérents au voisinage d'un polycylindre K privilegié pour \mathcal{F} , \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' ; si $g \circ f = 0$ et que la suite $B(K, \mathcal{F}') \rightarrow B(K, \mathcal{F}) \rightarrow B(K, \mathcal{F}'')$ est exacte et directe, alors la suite $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$ est exacte sur K . Toute suite exacte directe $B(K, \mathcal{F}') \rightarrow B(K, \mathcal{F}) \rightarrow B(K, \mathcal{F}'')$ induit sur l'ouvert $\overset{\circ}{K}$ une suite exacte de faisceaux $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$.

Soit $K = K' \times K''$, où K' et K'' sont des polycylindres de dimensions inférieures, et soient \mathcal{F}' , \mathcal{F}'' des faisceaux analytiques cohérents respectivement au voisinage de K' et au voisinage de K'' ; si K' est \mathcal{F}' -privilegié et K'' \mathcal{F}'' -privilegié, alors, en posant $\mathcal{F} = p'^*(\mathcal{F}') \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}} p''^*(\mathcal{F}'')$ (où p' et p'' sont les deux projections), K est \mathcal{F} -privilegié et $B(K, \mathcal{F}) \approx B(K', \mathcal{F}') \hat{\otimes}_{\varepsilon} B(K'', \mathcal{F}'')$. Soit x' un point intérieur à K' , \mathcal{F} est un faisceau analytique au voisinage de K isomorphe à $i_{x' \times i_{x''}}^*(\mathcal{F})$, où $i_{x'}$ désigne l'injection $x'' \mapsto (x', x'')$; lorsque K'' est $i_{x''}^*(\mathcal{F})$ -privilegié on en conclut que K est \mathcal{F} -privilegié et que $B(K, \mathcal{F}) \approx B(K'', i_{x''}^*(\mathcal{F}))$.

Platitude et privilège

Pour établir l'existence de polycylindres privilegiés, Douady utilise la notion un peu plus forte de voisinage \mathcal{F} -privilegié d'un point x . On considère un ouvert U de \mathbb{C}^n , un point x de U , un faisceau analytique cohérent \mathcal{F} sur U , et un polycylindre K contenu dans U ; on dit que K est un voisinage \mathcal{F} -privilegié de x si c'est un voisinage de x qui est \mathcal{F} -privilegié et si de plus l'application naturelle $B(K, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_x$ est injective. Le théorème principal, établi par récurrence sur n , assure que pour tout $x \in U$ et pour toute suite finie $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_k$ de faisceaux analytiques cohérents sur U , il existe un K qui est un voisinage \mathcal{F}_i -privilegié de x pour $i = 1, 2, \dots, k$. Pour faire le pas de la récurrence, Douady se sert de la propriété de « platitude et privilège » : on suppose que $U = U' \times U''$ et on considère un point $x = (x', x'')$ de U et un faisceau analytique cohérent \mathcal{F} sur U plat sur U' ; alors, si K'' est un voisinage $i_{x''}^*(\mathcal{F})$ -privilegié de x'' , il existe un voisinage V' de x' tel que, pour tout polycylindre $K' \subset V'$, $K' \times K''$ soit un voisinage \mathcal{F} -privilegié de x . Comme le remarque Douady, dans le cas où U'' est de dimension 1, l'énoncé de « platitude et privilège » s'interprète comme une forme du théorème de préparation de Weierstrass; le cas général est donc une sorte d'extension de ce théorème.

La démonstration de cette propriété repose sur la définition de la *grassmannienne* $\mathbf{G}(E)$ d'un espace de Banach E comme la variété analytique banachique représentant le foncteur contravariant Q qui, à une variété analytique banachique V , fait correspondre l'ensemble des fibrés quotients directs du fibré banachique trivial $V \times E$; ainsi $\mathbf{G}(E)$ est l'ensemble des quotients directs de E muni d'une structure de variété banachique. On construit $\mathbf{G}(E)$ localement, en s'intéressant d'abord à la représentation du foncteur Q_G qui, à une variété V associe l'ensemble des quotients de $V \times E$ par un sous-fibré supplémentaire topologique de $V \times G$, où G est un facteur direct de E fixé. Un tel quotient est isomorphe au fibré trivial $V \times G$ et il est donc défini par une famille $(p_s)_{s \in V}$ d'applications linéaires continues de E sur G telles que

$$p_s \circ i = id_G,$$

où i est l'injection naturelle de G dans E ; si (q_s) est une autre famille du même type, on voit que $q_s - p_s$ se factorise à travers E/G , définissant un élément de $L(E/G, G)$. On voit de plus que l'application $s \mapsto q_s - p_s$ de V dans $L(E/G, G)$ ainsi définie est analytique; il en résulte que Q_G est représenté par un espace affine sous l'espace de Banach $L(E/G, G)$. Si H est un autre facteur direct de E , le foncteur $Q_{G,H} = Q_G \cap Q_H$ est représenté par un ouvert de $L(E/G, G)$ et par un ouvert de $L(E/H, H)$ (éventuellement vides); ceci permet le recollement de ces morceaux en une variété analytique banachique $\mathbf{G}(E)$ représentant Q .

On définit ensuite, pour deux espaces de Banach E, E' la variété analytique banachique $\mathbf{S}(E, E')$ qui représente le foncteur qui, à une variété V , associe l'ensemble des morphismes *directs* $V \times E \rightarrow V \times E'$ de fibrés vectoriels banachiques au-dessus de V ; à un tel morphisme f , on associe une application analytique de V dans $\mathbf{G}(E) \times L(E, E') \times \mathbf{G}(E')$, qui transforme un point s de V en le triplet $(Coimf_s, f_s, Cokerf_s)$. On voit ainsi que $\mathbf{S}(E, E')$ n'est autre que l'ensemble des (F, h, F') où F et F' sont des quotients directs de E et de E' respectivement et h est une application linéaire continue de E dans E' , de coimage F et de conoyau F' ; c'est une sous-variété directe de $\mathbf{G}(E) \times L(E, E') \times \mathbf{G}(E')$. Enfin, à trois espaces de Banach E', E, E'' on associe la variété analytique banachique $\mathbf{S}(E', E, E'') = \mathbf{S}(E', E) \times_{\mathbf{G}(E)} \mathbf{S}(E, E'')$ représentant le foncteur contravariant qui, à une variété banachique V , fait correspondre l'ensemble des suites *exactes* et *directes* de fibrés

$$V \times E' \rightarrow V \times E \rightarrow V \times E'';$$

c'est une sous-variété directe de $L(E', E) \times L(E, E'')$. On utilise cette variété en prenant pour E', E, E'' trois termes successifs de $B(K'', \mathcal{L})$ où \mathcal{L} est une résolution finie libre de \mathcal{F} au voisinage de $\{x'\} \times K''$.

Espaces analytiques banachiques

Considérons maintenant une algèbre de Banach A et un A -module de Banach E ; on a besoin de définir une structure banachique sur l'ensemble $\mathbf{G}_A(E)$ des A -modules de Banach quotients de E qui sont quotients directs pour la structure sous-jacente d'espaces de Banach. C'est une partie de $\mathbf{G}(E)$, définie au voisinage d'un élément G de la manière suivante : soit F le noyau de $E \rightarrow G$ et soit G_0 un supplémentaire topologique de F (F est un sous- A -module de E mais pas G_0). On a donc $E = F \oplus G_0$ et une carte locale de $\mathbf{G}(E)$ au voisinage de G à valeurs

dans $L(F, G_0)$; à une application linéaire continue φ de F dans G_0 correspond le quotient de E par le graphe F_φ de $-\varphi$. On s'intéresse aux φ tels que F_φ soit un sous- A -module de E , c'est-à-dire ceux tels que $a(x - \varphi(x)) \in F_\varphi$ pour tout $a \in A$ et tout $x \in F$. Soit $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ la matrice de la multiplication par a dans $E = F \oplus G_0$; α est la multiplication par a dans F et $\beta : G_0 \rightarrow F, \delta : G_0 \rightarrow G_0$ sont les composantes de la multiplication par a dans G_0 . La condition sur F_φ s'écrit $\delta(\varphi(x)) = \varphi(\alpha(x) - \beta(\varphi(x)))$; à φ , on associe donc l'application bilinéaire continue

$$(a, x) \rightarrow \delta \circ \varphi(x) - \varphi \circ \alpha(x) + \varphi \circ \beta \circ \varphi(x)$$

de $A \times F$ dans G_0 , ou aussi bien l'élément $f(\varphi)$ correspondant de $L(A \hat{\otimes}_\pi F, G_0)$. La partie de $L(F, G_0)$ qui nous intéresse est définie par l'annulation du polynôme

$$(2) \quad f : L(F, G_0) \rightarrow L(A \hat{\otimes}_\pi F, G_0)$$

de degré 2.

D'une manière générale, Douady définit les espaces analytiques banachiques comme étant localement définis par l'annulation d'applications analytiques à valeurs dans des espaces de Banach et définies dans des ouverts d'espaces de Banach. Pour définir les morphismes entre de tels espaces, la connaissance d'un faisceau structural, c'est-à-dire des morphismes à valeurs dans \mathbb{C} , ne suffit pas; il faut se donner les morphismes à valeurs dans tous les ouverts d'espaces de Banach, d'où la notion des « espaces fonctés ».

Soit \mathcal{K} la catégorie dont les objets sont les ouverts d'espaces de Banach et les morphismes les applications analytiques; on en fait un site en prenant comme familles couvrantes les recouvrements ouverts pour la topologie usuelle, d'où un topos $\tilde{\mathcal{K}}$ (la catégorie des faisceaux d'ensembles sur les ouverts d'espaces de Banach). On appelle espace *foncté* un espace topologique X muni d'un morphisme géométrique $(\Phi, \Psi) : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}$, où $\tilde{\mathcal{X}}$ est le topos des faisceaux d'ensembles sur X ; rappelons qu'un tel morphisme est un couple de foncteurs adjoints $\Phi : \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}, \Psi : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}$ tel que Φ commute aux limites projectives finies. Bien entendu, le morphisme (Φ, Ψ) est entièrement déterminé par Φ et même par la restriction de Φ à la catégorie \mathcal{K} des faisceaux représentables par un ouvert d'espace de Banach; c'est ainsi que Douady définit les espaces fonctés. Les morphismes d'espaces fonctés sont les morphismes géométriques au-dessus de $\tilde{\mathcal{K}}$. Les ouverts d'espaces de Banach sont naturellement fonctés; il en résulte que les variétés analytiques banachiques sont fonctées.

Soient U un ouvert d'un espace de Banach E et f une application analytique de U dans un espace de Banach F ; le noyau de la double flèche $(f, 0)$ de U dans F est représentable dans la catégorie des espaces fonctés. L'objet qui le représente est le sous-espace $X = f^{-1}(0)$ de U muni de la structure fonctée ainsi définie : f s'interprète comme une section de $\Phi_U(F)$ et définit donc, pour tout espace de Banach G , un morphisme (linéaire) de $\Phi_U(L(F, G))$ dans $\Phi_U(G)$; le conoyau de ce morphisme a pour support X , et on note $\Phi_X(G)$ sa restriction à X . Chaque section de $\Phi_X(G)$ dans un ouvert V de X définit une application continue de V dans G ; pour tout ouvert W de G , on note $\Phi_X(W)$ le sous-faisceau de $\Phi_X(G)$ dont les sections définissent des applications à valeurs dans W . On vérifie que $\Phi_X(W)$ est fonctoriel en W et l'espace foncté X ainsi défini est, par définition, le sous-espace foncté fermé de U d'équation $f(x) = 0$.

Un espace analytique banachique est un espace foncté localement isomorphe à un sous-espace foncté fermé d'un ouvert d'espace de Banach. La catégorie des espaces analytiques banachiques possède des limites projectives finies.

L'espace $\mathbf{G}_K(\mathcal{E})$ et les faisceaux anaplats

On peut maintenant considérer le sous-espace analytique banachique de $L(F, G_0)$ défini par l'annulation de f (dans (2)) et on vérifie que, F et G_0 variant, ces espaces se recollent en un espace analytique banachique $\mathbf{G}_A(E)$. On s'intéresse en particulier à l'espace $\mathbf{G}_{B(K)}(B(K, \mathcal{E}))$, où \mathcal{E} est un faisceau analytique cohérent au voisinage d'un polycylindre K de \mathbb{C}^n tel que K soit privilégié pour \mathcal{E} , et à l'ouvert $\mathbf{G}_K(\mathcal{E})$ de cet espace formé des $B(K)$ -modules quotients directs de $B(K, \mathcal{E})$ qui admettent une résolution libre finie directe. L'espace $\mathbf{G}_K(\mathcal{E})$ possède une propriété universelle approximative analogue à celle des grassmanniennes : à un morphisme $f : S \rightarrow \mathbf{G}_K(\mathcal{E})$, on peut associer un faisceau quotient $\mathcal{F} = \gamma_K(f)$ de \mathcal{E}_S sur $S \times \overset{\circ}{K}$ et, inversement, à certains faisceaux quotients \mathcal{F} de \mathcal{E}_S au voisinage de $S \times K$, on peut associer un morphisme $\beta_K(\mathcal{F})$ d'un ouvert S_1 de S dans $\mathbf{G}_K(\mathcal{E})$ et cela de manière que $\gamma_K(\beta_K(\mathcal{F}))$ soit égal à la restriction de \mathcal{F} à $S_1 \times \overset{\circ}{K}$.

La construction est assez délicate. On construit $\gamma_K(f)$ localement sur S ; si $s \in S$, il lui correspond un quotient direct $F = f(s)$ de $B(K, \mathcal{E})$ admettant une résolution libre finie directe. Il existe donc une suite exacte et directe

$$(3) \quad 0 \rightarrow L_p \rightarrow L_{p-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \rightarrow B(K, \mathcal{E})$$

telle que les L_i soient des $B(K)$ -modules libres de type fini et que F s'identifie au conoyau de la dernière flèche. Les modules L_i et $B(K, \mathcal{E})$ étant fixés, on définit sans peine l'espace analytique banachique $\mathbf{S} = \mathbf{S}(L_p, \dots, L_0, B(K, \mathcal{E}))$ des suites finies directes du type (3) et le morphisme $K : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{G}_K(\mathcal{E})$ associant à un point de \mathbf{S} le conoyau de la dernière flèche; ce morphisme est lisse, c'est-à-dire localement isomorphe à une projection $V \times U \rightarrow V$ où U est un ouvert d'espace de Banach. Il en résulte qu'il existe un voisinage V de F dans $\mathbf{G}_K(\mathcal{E})$ et une section $\sigma : V \rightarrow \mathbf{S}$ de k dans V ; si $S' = f^{-1}(V)$, on dispose donc d'un relèvement $g = \sigma \circ f_{S'} : S' \rightarrow \mathbf{S}$ de $f_{S'}$. Chaque point de \mathbf{S} définit une suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{L}_p \rightarrow \mathcal{L}_{p-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{E}_{\overset{\circ}{K}}$, où les \mathcal{L}_i sont des $\mathcal{O}_{\overset{\circ}{K}}$ -Modules libres de type fini indépendants du point considéré; on en déduit une suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{L}_{p,S} \rightarrow \mathcal{L}_{p-1,S} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_{0,S} \rightarrow \mathcal{E}_{S \times \overset{\circ}{K}}$, dont l'image inverse par g donne $0 \rightarrow \mathcal{L}_{p,S'} \rightarrow \mathcal{L}_{p-1,S'} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{L}_{0,S'} \rightarrow \mathcal{E}_{S' \times \overset{\circ}{K}}$. La restriction de $\gamma_K(f)$ à $S' \times \overset{\circ}{K}$ est le conoyau de $\mathcal{L}_{0,S'} \rightarrow \mathcal{E}_{S' \times \overset{\circ}{K}}$;

on vérifie que les faisceaux ainsi définis se recollent en un faisceau $\gamma(f)$ sur $S \times \overset{\circ}{K}$.

Par définition, le faisceau $\gamma_K(f) = \mathcal{F}$ ainsi obtenu est un $\mathcal{O}_{S \times \overset{\circ}{K}}$ -Module admettant localement des résolutions libres finies $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}$ telles que, pour $s \in S$, $i_s^*(\mathcal{L}) \rightarrow i_s^*(\mathcal{F})$, où i_s désigne l'injection $x \mapsto (s, x)$ de $\overset{\circ}{K}$ dans $S \times \overset{\circ}{K}$. Douady dit qu'un tel faisceau est *S-anaplat*; lorsque S est de dimension finie, cela signifie simplement que \mathcal{F} est cohérent et plat sur S . La notion de faisceau anaplat est stable par changement de la base S . Soient $f : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ et $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$ des morphismes de faisceaux *S-anaplats* sur $S \times U$ tels que $g \circ f = 0$; si, pour un

$s \in S$, la suite $i_s^*(\mathcal{F}') \rightarrow i_s^*(\mathcal{F}) \rightarrow i_s^*(\mathcal{F}'')$ est exacte en un point x de U , alors $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$ est exacte au voisinage de (s, x) . Soit $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{O}_{S \times U}$ -Modules; si \mathcal{F}' (resp. \mathcal{F}) et \mathcal{F}'' sont S -anaplats, il en est de même de \mathcal{F} (resp. \mathcal{F}'); si \mathcal{F}' et \mathcal{F} sont S -anaplats, pour que \mathcal{F}'' le soit, il faut et il suffit que $i_s^*(\mathcal{F}') \rightarrow i_s^*(\mathcal{F})$ soit injectif pour tout point s de S . Lorsque $U = U' \times U''$ et que $\mathcal{F}', \mathcal{F}''$ sont des faisceaux S -anaplats, respectivement sur $S \times U'$ et sur $S \times U''$, le faisceau $p'^*(\mathcal{F}') \otimes_{\mathcal{O}_{S \times U}} p''^*(\mathcal{F}'')$ est S -anaplat. On étend facilement la notion de faisceau S -anaplat au cas d'un produit $S \times X$ où X est un espace analytique de dimension finie : il suffit d'utiliser des cartes locales de X .

Considérons maintenant un espace analytique banachique S , un ouvert U de \mathbb{C}^n muni d'un faisceau analytique cohérent \mathcal{E} , un polycylindre \mathcal{E} -privilegié K contenu dans U et un faisceau \mathcal{F} sur $S \times U$, quotient de \mathcal{E}_S et S -anaplat; soit S_1 l'ouvert des points s de S tels que K soit $i_s^*(\mathcal{F})$ -privilegié. Si $s \in S_1$, il existe une résolution libre finie \mathcal{L} . du noyau \mathcal{F}^\vee de $\mathcal{E}_S \rightarrow \mathcal{F}$ au voisinage de $\{s\} \times K$; cela résulte d'une forme relative du théorème A au-dessus de S au voisinage de $\{s\} \times K$ que Douady a établie. Une telle résolution définit un complexe $B(K, \mathcal{L}.)$ de fibrés banachiques au voisinage de s et acyclique en degrés ≥ 1 . Si on change de résolution, on définit un complexe quasi-isomorphe, et il en résulte que les $H_0(B(K, \mathcal{L}.)$) se recollent en un fibré banachique localement trivial $B(K, \mathcal{F}^\vee)$ sur S_1 ; la fibre de $B(K, \mathcal{F}^\vee)$ au-dessus d'un point s est l'espace de Banach $B(K, i_s^*(\mathcal{F}^\vee))$. Dans un voisinage V de s , la suite exacte directe de fibrés banachiques triviaux $0 \rightarrow B(K, \mathcal{L}_p) \rightarrow B(K, \mathcal{L}_{p-1}) \rightarrow \dots \rightarrow B(K, \mathcal{L}_0) \rightarrow B(K, \mathcal{E}_S)$ définit un morphisme à valeurs dans l'espace \mathbf{S} défini comme plus haut, avec $L_i = B(K)^{r_i}$ si $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}_V^{r_i}$. En composant avec k , on obtient un morphisme de V dans $\mathbf{G}_K(\mathcal{E})$; on vérifie que ces morphismes se recollent en un morphisme $\beta_K(\mathcal{F}) : S_1 \rightarrow \mathbf{G}_K(\mathcal{E})$ possédant la propriété annoncée.

En appliquant ce qui précède au morphisme identique u de $\mathbf{G}_K(\mathcal{E})$, on définit un faisceau quotient $\mathbf{G}_K(\mathcal{E})$ -anaplat \mathcal{R} sur $\mathbf{G}_K(\mathcal{E}) \times \overset{\circ}{K}$ comme la restriction de $\gamma_K(u)$; on l'appelle le quotient « universel » de \mathcal{E} relatif à K . Si $K' \subset \overset{\circ}{K}$ est un polycylindre \mathcal{E} -privilegié, le faisceau \mathcal{R} définit un ouvert $\mathbf{G}_K(\mathcal{E})_1$ de $\mathbf{G}_K(\mathcal{E})$ et un morphisme $\beta_{K'}(\mathcal{R})$ de $\mathbf{G}_K(\mathcal{E})_1$ dans $\mathbf{G}_{K'}(\mathcal{E})$. Ce morphisme est compact au sens suivant : localement, on peut l'exprimer dans des cartes locales à valeurs dans des sous-espaces fermés d'ouverts U, U' d'espaces de Banach et le prolonger en une application analytique h de U dans U' dont l'application linéaire tangente est compacte. Cette propriété résulte du fait que les applications de restriction $B(K) \rightarrow B(K')$ et $B(K, \mathcal{E}) \rightarrow B(K', \mathcal{E})$ sont compactes.

Cuirasses

On appelle *cuirasse* sur un espace analytique X de dimension finie la donnée d'une famille finie M de cartes locales $\varphi_i : X_i \rightarrow U_i, X_i$ ouvert de X, U_i ouvert de $\mathbb{C}^{n_i}, \varphi_i$ isomorphisme sur un sous-espace fermé; pour chaque i d'un polycylindre $K_i \subset U_i$ et d'un compact $V_i \subset \overset{\circ}{K}_i$ et pour tout couple (i, j) d'indices d'une carte locale $X_i \cap X_j \rightarrow U_{ij} \subset \mathbb{C}^{n_{ij}}$ et d'une famille finie $K_{ij\alpha}$ de polycylindres contenus dans U_{ij} et telle que $V_i \cap V_j \subset \bigcup_{\alpha} \varphi_{ij}^{-1}(\overset{\circ}{K}_{ij\alpha}) \subset \varphi_i^{-1}(\overset{\circ}{K}_i) \cap \varphi_j^{-1}(\overset{\circ}{K}_j)$;

on se donne de plus une partie fermée L de X telle que les $\overset{\circ}{V}_i$ recouvrent son

complémentaire. Si \mathcal{F} est un faisceau analytique cohérent sur X , on dit que la cuirasse M est \mathcal{F} -semi-privilegiée lorsque les polycylindres K_i et $K_{ij\alpha}$ sont tous \mathcal{F} -privilegiés; si de plus le support de \mathcal{F} ne rencontre pas L , on dit que M est \mathcal{F} -privilegiée. Soient \mathcal{E} un faisceau cohérent sur X et \mathcal{F} un quotient de \mathcal{E} cohérent et à support compact; on établit sans peine l'existence d'une cuirasse \mathcal{E} -semi-privilegiée et \mathcal{F} -privilegiée.

Dans toute la suite, X est un espace analytique séparé de dimension finie, \mathcal{E} est un faisceau cohérent sur X et on considérera seulement des cuirasses sur X \mathcal{E} -semi-privilegiées. Soit M une telle cuirasse et \mathcal{F} est un faisceau quotient de \mathcal{E}_S S -anaplat et à support propre sur S ; l'ensemble S_1 des points s de S tels que M soit $i_s^*(\mathcal{F})$ -privilegiée est ouvert. À la cuirasse M on associe, pour chaque indice i , un espace analytique banachique $\mathbf{G}_{K_i}(\mathcal{E})$ muni d'un quotient universel R_i de E sur $\mathbf{G}_{K_i}(\mathcal{E}) \times \overset{\circ}{K}_i$ et pour chaque triplet (i, j, α) un espace analytique banachique $G_{ij\alpha} = \mathbf{G}_{K_{ij\alpha}}(\mathcal{E})$. On note G_i l'ouvert de $\mathbf{G}(\mathcal{E})$ formé des points s tels que le support de $i_{s*}(\mathcal{R}_i)$ ne rencontre pas $L \cap V_i$ et que chaque $K_{ij\alpha}$ soit $i_s^*(\mathcal{R}_i)$ -privilegié, et $\rho_{ij\alpha}'$ la restriction à G_i du morphisme $\beta_{K_{ij\alpha}}(\mathcal{R}_i)$; on pose encore $\rho_{ij\alpha}'' = \rho_{ji\alpha}'$. Ceci permet de définir deux morphismes ρ' et ρ'' de $\prod_i G_i$ dans $\prod_{i,j,\alpha} G_{i,j,\alpha}$; le noyau de la double flèche (ρ', ρ'') est un espace analytique banachique Θ . L'espace Θ est muni d'un faisceau quotient $\tilde{\mathcal{R}}$ de \mathcal{E}_Θ , obtenu en recollant les $(p_i \times id_{\overset{\circ}{K}_i})^*(\mathcal{R}_i)$; il est Θ -anaplat et son support est fermé dans $\Theta \times \overline{X - L}$, donc propre sur Θ .

Reprenons l'espace S et le faisceau quotient S -anaplat \mathcal{F} de \mathcal{E}_S , à support propre sur S ; pour tout indice i et tout $s \in S_1$, le polycylindre K_i est $i_s^*(\mathcal{F})$ -privilegié et on a donc un morphisme $\beta(\mathcal{F}) : S_1 \rightarrow G_i$. On en déduit un morphisme $\beta_M(\mathcal{F}) : S_1 \rightarrow \prod G_i$; on vérifie sans peine que $\rho' \circ \beta_M(\mathcal{F}) = \rho'' \circ \beta_M(\mathcal{F})$ et il en résulte que $\beta_M(\mathcal{F})$ peut être considéré comme un morphisme de S_1 dans Θ . On établit alors facilement que l'image inverse de $\tilde{\mathcal{R}}$ par le morphisme $\beta_M(\mathcal{F}) \times id_X$ est la restriction de \mathcal{F} à $S_1 \times X$.

Une cure d'amaigrissement

En appliquant ce qui précède à $S = \Theta$, on définit un ouvert Θ_1 de Θ et un morphisme $\theta = \beta_M(\tilde{\mathcal{R}})$ de Θ_1 dans Θ . Il est clair que, pour tout espace analytique banachique S et tout quotient S -anaplat \mathcal{F} de \mathcal{E}_S , à support propre sur S , on a $\theta \circ \beta_M(\mathcal{F}) = \beta_M(\mathcal{F})$; en particulier, on a $\theta \circ \theta = \theta$. On note $H_M(\mathcal{E})$ le noyau de la double flèche (i, θ) , où i est l'injection canonique de Θ_1 dans Θ . Si j est l'injection canonique de $H_M(\mathcal{E})$ dans Θ , on note \mathcal{R} l'image inverse de $\tilde{\mathcal{R}}$ par $j \times id_X$; c'est un faisceau quotient de $\mathcal{E}_{H_M(\mathcal{E})}$ qui est $H_M(\mathcal{E})$ -anaplat et tel que M soit $i_h^*(\mathcal{R})$ -privilegiée pour tout $h \in H_M(\mathcal{E})$. Soient S un espace analytique banachique et \mathcal{F} un faisceau quotient de \mathcal{E}_S , S -anaplat; si on suppose que, pour tout $s \in S$, la cuirasse M est $i_s^*(\mathcal{F})$ -privilegiée, $\beta_M(\mathcal{F})$ définit un morphisme f de S dans $H_M(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{F} = (f \times id_X)^*(\mathcal{R})$. L'espace $H_M(\mathcal{E})$ représente le foncteur R_M qui, à chaque espace analytique banachique S , associe l'ensemble des quotients S -anaplots \mathcal{F} de \mathcal{E}_S tels que la cuirasse M soit $i_s^*(\mathcal{F})$ -privilegiée pour tout $s \in S$ et le faisceau \mathcal{R} mérite le nom de quotient universel de \mathcal{E} relatif à M .

Comme Θ , $H_M(\mathcal{E})$ est un sous-espace analytique de $\prod G_i$ et il est donc séparé. Montrons qu'il est de dimension finie. Pour toute cuirasse M' , l'ensemble des points

h de $H_M(\mathcal{E})$ tels que M' soit $i_h^*(\mathcal{R})$ -privilegiée est un ouvert $U_{M'}$ de $H_M(\mathcal{E})$; on vérifie que les $U_{M'}$ pour lesquels la cuirasse M' est construite avec les mêmes cartes locales φ_i que M et des polycylindres $K'_i \subset \overset{\circ}{K}_i$ pour tout i forment un recouvrement de $H_M(\mathcal{E})$, et il suffit donc d'établir que les $U_{M'}$ sont de dimension finie. Or $\beta_{M'}(\mathcal{R})$ définit un morphisme de $U_{M'}$ dans $H_{M'}(\mathcal{E})$ et ce morphisme est compact puisqu'il en est ainsi des $\beta_{K'_i}(\mathcal{R}_i)$ d'après ce qu'on a vu plus haut. L'ouvert $U_{M'}$ représente le foncteur $R_{M,M'}$ qui, à chaque espace analytique banachique S associe l'ensemble des faisceaux quotients \mathcal{F} de \mathcal{F}_S qui sont S -anaplat et tels que, pour tout $s \in S$, les cuirasses M et M' soient $i_s^*(\mathcal{F})$ -privilegiées; il en est de même de l'ouvert U_M de $H_{M'}(\mathcal{E})$ formé des points h tels que M soit $i_h^*(\mathcal{R}')$ -privilegiée, où \mathcal{R}' désigne le quotient universel de \mathcal{E} relatif à M' . Il en résulte que $\beta_{M'}(\mathcal{R})$ définit un isomorphisme de $U_{M'}$ sur U_M et on en déduit que $U_{M'}$ est de dimension finie.

On se ramène en effet à établir qu'un espace analytique banachique U dont le morphisme identique est compact est de dimension finie. En prenant une carte locale au voisinage d'un point s de U , on peut supposer que U est un sous-espace fermé d'un ouvert V d'un espace de Banach E . L'application id_U se prolonge en une application g de V dans lui-même; comme l'application linéaire $\lambda : E \rightarrow E$ tangente à g en s est compacte, $id_E - \lambda$ est un morphisme direct dont le noyau et le conoyau sont de dimension finie. Soit E' l'image de $id_E - \lambda$ et soit p la projection de E sur E' parallèlement au noyau; au voisinage de s , on peut identifier U au sous-espace fermé de V défini par l'équation $p(x - g(x)) = 0$. Comme $p \circ (id_E - g) : V \rightarrow E'$ est une submersion directe, V est, au voisinage de s , isomorphe au produit d'un ouvert de E' par un ouvert de dimension finie et il en résulte que U est de dimension finie. Ainsi, en rétrécissant la cuirasse M , on a fait subir à l'espace Θ « une cure d'amaigrissement », comme disait Douady, pour le ramener à un espace de dimension finie $H_M(\mathcal{E})$.

On vient de voir que, si M et M' sont deux cuirasses, le foncteur $R_{M,M'}$ est représenté par un ouvert de $H_M(\mathcal{E})$ et par un ouvert de $H_{M'}(\mathcal{E})$; cela permet de recoller les $H_M(\mathcal{E})$ en un espace analytique $H(\mathcal{E})$ de dimension finie qui représente le foncteur

$$R : S \mapsto \{\mathcal{F} \text{ quotient } S\text{-anaplat de } \mathcal{E}_S \text{ à support propre sur } S\}.$$

L'espace $H(\mathcal{E})$ est muni d'un faisceau \mathcal{R} quotient de $\mathcal{E}_{H(\mathcal{E})}$, cohérent sur $H(\mathcal{E}) \times X$, plat et à support propre sur $H(\mathcal{E})$; pour tout espace analytique banachique S et tout faisceau \mathcal{F} quotient de \mathcal{E}_S , S -anaplat et à support propre sur S , il existe un unique morphisme f de S dans $H(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{F} = (f \times id_X)^*(\mathcal{R})$. Remarquons que si $A \subset H(\mathcal{E})$ est un ensemble fini, il existe une cuirasse M $i_s^*(\mathcal{R})$ -privilegiée pour tout $s \in A$ et il en résulte que $A \subset H_M(\mathcal{E})$; on voit donc que $H(\mathcal{E})$ est séparé.

Espaces de morphismes

Comme application de la construction précédente, Douady propose celle de l'espace analytique $Mor(X, Y)$ d'un espace analytique compact X dans un espace analytique Y (X et Y de dimension finie et séparés). Il représente le foncteur $M : S \mapsto \{u : S \times X \rightarrow Y\}$, c'est-à-dire qu'il est muni d'un morphisme universel $m : Mor(X, Y) \times X \rightarrow Y$ tel que, pour tout morphisme $u : S \times X \rightarrow Y$ (où S est

un espace analytique), il existe un unique morphisme $f : S \rightarrow \text{Mor}(X, Y)$ vérifiant $u = m \circ (f \times \text{id}_X)$.

Il suffit de considérer l'espace H des sous-espaces analytiques compacts de $X \times Y$, avec le sous-espace universel $R \subset H \times X \times Y$ (propre et plat sur H) et de prendre pour $\text{Mor}(X, Y)$ l'ensemble des points s de H tels que $R(s) \subset X \times Y$ soit le graphe d'un morphisme de X dans Y ; on démontre que cet ensemble est ouvert dans H et l'intersection de R avec $\text{Mor}(X, Y) \times X \times Y$ est le graphe du morphisme universel m .

Si X et X' sont compacts, il y a un morphisme de composition $\text{Mor}(X, X') \times \text{Mor}(X', Y) \rightarrow \text{Mor}(X, Y)$. On l'obtient en partant du morphisme canonique $m : \text{Mor}(X, X') \times X \rightarrow X'$ et en le multipliant par $\text{Mor}(X', Y)$, d'où $m \times \text{id} : \text{Mor}(X, X') \times \text{Mor}(X', Y) \times X \rightarrow \text{Mor}(X', Y) \times X'$; il suffit de composer ce morphisme avec $m' : \text{Mor}(X', Y) \times X' \rightarrow Y$ pour obtenir un morphisme

$$\text{Mor}(X, X') \times \text{Mor}(X', Y) \times X \rightarrow Y$$

qui définit le morphisme de composition cherché.

Douady démontre que, lorsque X est réduit, la topologie de $\text{Mor}(X, Y)$ est celle de la convergence compacte. Il en résulte que si A est une partie finie de X , deux applications analytiques de X dans Y qui coïncident en tous les points de A et qui sont suffisamment voisines au sens de la convergence compacte sont égales. Douady tire encore de la construction de l'espace des morphismes que si X est un espace analytique compact, l'ensemble des automorphismes de X est un ouvert de $\text{Mor}(X, X)$ et que la composition des automorphismes en fait un groupe de Lie complexe.

J'espère avoir montré, à propos de ce travail, avec quelle audace Adrien Douady se lançait à l'aventure pour résoudre des problèmes exigeant de l'imagination et la mise en œuvre d'outils techniques difficiles à manipuler. Quelques années plus tard, il a employé les mêmes techniques pour résoudre « Le problème des modules locaux pour les espaces \mathbb{C} -analytiques compacts² ». Il s'agit de construire une déformation « verselle » d'un espace analytique compact donné et Douady y utilise des 2-cuirasses car la construction s'apparente au calcul d'un H^1 (tandis que celle de sa thèse ressemble à la construction d'un H^0). D'autre part, il localise l'espace de Banach $B(K)$ sur le polycylindre K pour y définir une structure annelée; sur un produit $S \times K$, où S est analytique banachique, il y a une structure fonctée, dont Douady considère les sous-espaces fonctés fermés. Enfin, il doit se servir d'une variante relative de l'espace des morphismes, au-dessus d'un espace analytique banachique.

² *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 4^e série, t. 7, fasc. 4, 1974, p. 569-602