LIVRES

Multidimensional Diffusion processes
D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan.
Springer, 2006. 338 p.
ISBN : 978-3-540-28998-2. $ 49,95

Nous proposons ici la recension du célèbre ouvrage *Multidimensional Diffusion Processes* de D.W. Stroock et S.R.S. Varadhan, à l'occasion de sa récente réimpression par les éditions Springer. Ce livre est le premier exposé pédagogique de la méthode dite du problème de martingale. Cette méthode s'est avérée avoir de nombreuses applications permettant la définition de processus markoviens à partir de leur générateur, sans passer par la construction directe de leur semi-groupe. Plutôt que de multiplier les exemples, les auteurs désireux de fournir un exposé accessible de leur méthode et des idées générales qui s'y rapportent, ont choisi de traiter en détail le cas des diffusions dans $\mathbb{R}^d$; ce choix est judicieux car les diffusions sont des processus markoviens familiers aux probabilistes pour lesquels deux approches bien balisées existent : la première approche, initiée par N. Kolmogorov et W. Feller, et à laquelle les chapitres 2 et 3 sont consacrés, consiste à construire les probabilités de transition de la diffusion comme solution de l'équation *forward*, qui dans le cas des diffusions se trouve être une équation aux dérivées partielles de type parabolique ; la seconde approche due à Itô utilise le calcul stochastique et permet de représenter les diffusions comme solutions d'une équation différentielle stochastique (les chapitres 4 et 5 y sont consacrés). L'exposé soigneux de ces deux approches place le lecteur en terrain connu et a l'avantage de rendre manifeste la nouveauté de la méthode de construction par problème de martingale, théorie exposée aux chapitres 6 et 7 de l'ouvrage. Les divers problèmes rencontrés par les méthodes classiques Kolmogorov-Feller/Itô ainsi que leurs limitations, permettent de mettre clairement en évidence les avantages de la technique de Stroock et Varadhan. Les principaux résultats sont exposés dans les chapitres 8 à 12 et ils sont confrontés aux résultats obtenus par les deux approches précédentes, à savoir l'unicité du problème de martingale en relation avec l'unicité des équations différentielles stochastiques, l'obtention d'estimées des probabilités de transition des diffusions, le phénomène d'explosion, des théorèmes-limite et approximation des diffusions ainsi qu'une discussion du cas où le problème de martingale ne trouve pas de solution unique.

Plus précisément, rappelons qu'un processus markovien $\mathbf{x} = (x(t), t \geqslant 0)$, défini sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ équipé d'une filtration $(\mathcal{F}_t, t \geqslant 0)$ et de lois d'entrée P_y, $y \in \mathbb{R}^d$, est une diffusion si son générateur infinitésimal est donné par

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} a^{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b^i \frac{\partial}{\partial x_i} , \tag{1}$$

où a est en tout point une matrice symétrique, positive et définie (pour simplifier notre résumé, nous rappelons les résultats de l'ouvrage dans le cas des diffusions homogènes en temps, c'est-à-dire des diffusions dont le générateur ne dépend pas du temps). Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ et tout $t > 0$, la loi de la position $x(t)$ de la diffusion à l'instant t admet une densité $z \mapsto p(y, t; z)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Les probabilités de transition $(p(y, t; \cdot), y \in \mathbb{R}^d, t > 0)$ satisfont à l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} p(y, t; \cdot) + Lp(y, t; \cdot) = 0 \; , \tag{2}$$

$$\lim_{t \to 0} p(y, t; \cdot) = \delta_y \; . \tag{3}$$

La première méthode permettant de construire et d'étudier les diffusions, due à Kolmogorv et à Feller, consiste à définir les densités de transition comme solutions de (2-3) ; ces densités satisfont alors à l'équation de Kolmogorov-Chapmann et permettent de construire une famille compatible de lois marginales. Cela permet, par des arguments standards soigneusement rappelés, de définir un processus markovien ; la continuité de la diffusion est obtenue via le théorème de Kolmogorov-Centov dont une version très générale est donnée au théorème 2.1.3. La principale difficulté de cette approche exposée au chapitres 2 et 3, est qu'elle repose sur un résultat technique, non-probabiliste, d'existence des solutions de (2-3) sous des hypothèses de régularité Hölder pour les coefficients a et b ; ce résultat est rappelé sans preuve au théorème 3.2.1 et une extension de ce théorème (due à Oleinik) dans les cas où a est dégénérée, est détaillée à la fin du chapitre 3.

Les chapitres 4 et 5 sont ensuite consacrés à l'approche des diffusions par les équations différentielles stochastiques, approche qui est due à Itô : l'idée consiste à considérer l'accroissement $x(t+h) - x(t)$ d'une diffusion de générateur L défini par (1), comme étant proche en loi, lorsque h est petit, d'une variable gaussienne de moyenne $b(x(t))$ et de matrice de covariance $a(x(t))$, qui peut se représenter informellement comme la somme suivante

$$x(t+h) - x(t) = \sigma(x(t))(\beta(t+h) - \beta(t)) + b(x(t))h \; ,$$

où $(\beta(t), t \geqslant 0)$ désigne un mouvement brownien d-dimensionnel et où σ est une racine carrée de la matrice a. Infinitésimalement, cette équation peut se ré-écrire sous la forme suivante :

$$dx(t) = \sigma(x(t))d\beta(t) + b(x(t))dt \; , \tag{4}$$

qui est une équation différentielle stochastique. Bien entendu, les symboles $dx(t)$ et $d\beta(t)$ n'ont pas un sens évident et leur définition fait tout l'objet du calcul stochastique, dont un exposé concis est donné au chapitre 4. Le chapitre 5 traite en détail des résultats essentiels permettant de résoudre l'équation différentielle stochastique (4) : le principal théorème d'existence et d'unicité (théorème 5.1.1) est établi sous des hypothèses Lipschitz sur σ et b ; il repose sur une généralisation stochastique de la technique d'itération de Picard pour les équations différentielles ordinaires. Le principal inconvénient de cette méthode est qu'il existe de nombreuses racines carrées σ de a et que les propriétés de régularité de σ ne se traduisent pas facilement en des conditions sur a : ces problèmes sont brièvement examinés aux sections 5.2 et 5.3.

Les chapitres 6 et 7 concernent le problème de martingale, qui peut se résumer succinctement de la manière suivante : si $\mathbf{x}$ est une diffusion de générateur L, la formule de Dynkin implique que pour toute fonction test φ, c'est-à-dire toute fonction infiniment différentiable à support compact, le processus défini par

$$M_{\varphi}(t) = \varphi(x(t)) - \int_0^t L\varphi(x(s))ds \ , \tag{5}$$

est une $(\mathcal{F}_t, t \geqslant 0)$-martingale sous toute probabilité P_y, $y \in \mathbb{R}^d$. La méthode dite du problème de martingale consiste à partir de cette propriété et à montrer ensuite qu'elle caractérise les distributions P_y, $y \in \mathbb{R}^d$, de la diffusion de générateur L. Plus précisément le problème de martingale se formule de la manière suivante : on prend $(\Omega, \mathcal{F})$ égal à l'espace canonique des fonctions continues de $[0, \infty)$ dans $\mathbb{R}^d$ muni de la tribu des boréliens correspondant à la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

– *Existence* : on dit que le problème de martingale associé à L admet une solution si pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, il existe une loi de probabilité P_y sur l'espace canonique des fonctions continues de $[0, \infty)$ dans $\mathbb{R}^d$ telle que pour toute fonction test φ, le processus $(M_{\varphi}(t), t \geqslant 0)$ défini par (5) est une martingale sous P_y et si de plus, on a $P_y(x(0) = y) = 1$ (ici $\mathbf{x}$ est le processus canonique, c'est-à-dire la variable aléatoire identité sur l'espace canonique).

– *Unicité* : on dit que le problème de martingale associé à L admet une unique solution si pour chaque $y \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique loi de probabilité P_y satisfaisant aux propriétés précédentes.

Le principal résultat peut s'énoncer comme suit : supposons que a et b sont mesurables bornés et que pour tout $R > 0$, le coefficient a satisfait aux conditions suivantes :

$$\inf_{|x| \leqslant R} \inf_{\substack{\theta \in \mathbb{R}^d \\ |\theta|=1}} \langle \theta, a(x).\theta \rangle \ > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\delta \to 0} \sup_{\substack{|x^1|,|x^2| \leqslant R \\ |x^1 - x^2| < \delta}} ||a(x^1) - a(x^2)|| = 0 \ . \tag{6}$$

Sous ces hypothèses, le problème de martingale admet une unique solution et les lois P_y, $y \in \mathbb{R}^d$, sont les lois d'un processus de markov fortement fellerien. Ce résultat est à comparer avec les hypothèses plus restrictives de l'approche analytique développée aux chapitres 2 et 3. Le résultat d'existence est prouvé au chapitre 6 ainsi qu'une série de lemmes techniques permettant de réduire le problème d'unicité qui est la principale difficulté de la preuve, preuve à laquelle est consacré le chapitre 7. Le résultat d'existence est énoncé au théorème 7.2.1. Un schéma de la preuve est donné au début du chapitre 7 (cette preuve repose en partie sur des estimées de type L^p de certains opérateurs qui sont prouvées dans l'appendice).

Comme déjà mentionné, les chapitres suivants examinent les différents résultats et propriétés des diffusions qu'il est possible de déduire par la technique du problème de martingale, et ce au regard des deux autres théories existantes : dans cet esprit, le chapitre 8 expose et compare soigneusement la notion d'unicité du problème de martingale et la notion d'unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique développée par Watanabé et Yamada, notion qui est liée à la mesurabilité de la solution $\mathbf{x}$ de (4) par rapport au mouvement brownien β ainsi qu'au choix de la racine carrée σ de a. Le chapitre 9 tire parti de l'approche probabiliste et de la définition des diffusions via le problème de martingale, pour obtenir des estimées des solutions des équations paraboliques associées à L, et plus particulièrement des probabilités de transition de la diffusion. Bien que ces estimées aient été obtenues par des méthodes analytiques, l'exposé des auteurs constitue une preuve accessible aux probabilistes. Au chapitre 10, les auteurs illustrent la souplesse de la méthode du problème de martingales, en montrant de quelle manière on peut traiter le cas des diffusions à coefficients non-bornés et d'aborder le problème de l'explosion (c'est-à-dire le cas des diffusions qui ne sont pas définies sur l'ensemble de temps $[0, \infty)$ tout entier mais qui peuvent exploser en temps fini). Ils comparent notamment les résultats obtenus par la méthode des équations différentielles stochastiques et traitent le cas unidimensionnel en détail. Le chapitre 11 illustre comment le problème de martingale permet d'obtenir des résultats d'invariance pour les diffusions, c'est-à-dire des théorèmes-limite, analogues au théorème de Donsker pour le mouvement brownien, montrant non seulement la convergence de processus discrets vers une diffusion, mais aussi la convergence de suites de diffusions vers une diffusion limite. Le dernier chapitre examine le cas où le problème de martingale ne trouve pas de solution unique : dans la formulation même du problème, on voit que les liens entre les différentes probabilités solutions ne sont pas clairs et il n'est alors pas forcément simple de voir qu'elles peuvent se « recoller » de manière à être la loi d'un processus markovien. L'objet du chapitre 12 est d'exposer une méthode due à Krylov qui permet de sélectionner une famille de solutions P_y, $y \in \mathbb{R}^d$, correspondant à une dynamique markovienne. Mentionnons la louable intention des auteurs de fournir un exposé précis et auto-contenu de leur théorie en donnant au chapitre 1 un exposé concis des outils fondamentaux de la théorie des processus. Ces résultats, bien que standards, sont redémontrés de manière originale (voir en particulier la preuve de l'existence d'une version régulière de lois conditionnelles sur les espaces polonais (théorème 1.1.6), la preuve du théorème d'extension de Tulcea (théorème 1.1.9) et des résultats de tension et de convergence fonctionnelle, adaptés aux techniques de martingale, tels que le théorème 1.4.6, utilisé au chapitre 11).

Il n'est plus nécessaire d'insister sur la clarté de cet ouvrage de référence, ni sur le grand intérêt qu'il a suscité. Contentons-nous de dire qu'il continue à être une excellente introduction à tout étudiant en thèse désireux de se familiariser avec les multiples aspects et la richesse de la théorie des diffusions d'un point de vue probabiliste. Il est également une référence très utile aux chercheurs voulant puiser à la source les idées fondamentales liées au problème de martingale qui, bien que développées dans ce livre sur un exemple précis, laissent entrevoir leur grande souplesse et leurs possibilités d'adaptation à des contextes très variés.

Thomas Duquesne,
Université Paris-Sud

Les Mathématiques dans la cité
MARIE-JOSÉ DURAND-RICHARD
Presses universitaires de Vincennes (Culture et société), 2006. 169 p.
ISBN : 0-521-54036-4. 20€

Qu'un livre traitant de mathématiques paraisse dans une collection ayant pour titre « Culture et Société » est un événement suffisamment rare pour qu'il soit apprécié. Une raison en est très certainement son ambition que le titre ne traduit qu'en partie. Il s'agit en effet d'un recueil de sept textes, écrits par des historiens des mathématiques ou des techniques, qui explore les « différents niveaux d'implication des mathématiques dans les affaires du monde » de la Renaissance aux années 1980. La réflexion qui nous est présentée, initialement menée dans le cadre du séminaire « Sciences, légitimités, médiations » de l'équipe d'histoire des sciences de Paris 8, s'appuie ainsi sur des études précises de cas – les ingénieurs de la Renaissance, l'école mécanico-mathématique russe des années 1810-1830, l'œuvre non académique d'Edouard Lucas en théorie des nombres dans les années 1870-1890, le passage des calculateurs électroniques à l'ordinateur dans l'immédiat après guerre et, enfin, le cas de l'IHÉS et des recherches qui y sont poursuivies dans les années 1960 et 1970. Une introduction et une conclusion conséquentes invitent dans le même temps à resituer les enjeux historiques et épistémologiques de cette thématique sur le long terme. Marie-José Durand-Richard ouvre le livre par cette fameuse question « Les maths, à quoi ça sert ? », pour aussitôt préciser que ce n'est pas d'abord de l'utilité des mathématiques dont il va être question, mais de leurs conditions de production et de légitimation. La diversité des exemples traités dans l'ouvrage, les perspectives et références historiques plus larges encore que M.-J. Durand-Richard développe dans son introduction, montrent à quel point le projet de « mathesis universalis » se décline et se légitime différemment en fonction des contextes, en fonction des milieux, comment les mathématiques d'un temps – leurs contenus, leurs légitimations – sont transmises et réinterprétées différemment à une époque suivante, tant les contours même d'une démarche rationnelle, les types d'audace inventive, les motivations, sont liés au groupe des acteurs, producteurs de ces savoirs...

Le premier chapitre (Pascal Brioist et Alexandre Bruneau) expose comment, au XVI^e^ siècle, en Italie et en France, la profession d'ingénieurs fortificateurs se constitue sur la base des mathématiques, se distinguant ainsi de celle des maçons et artilleurs et acquérant un statut social supérieur de par leur capacité d'abstraction et leur connaissance de la géométrie d'Euclide. Dans son introduction Marie-José Durand-Richard indique que cet usage de la géométrie, voisinant avec la pratique des instruments de mesure et de visée, n'a pas peu contribué à introduire des éléments de quantification absents des Éléments d'Euclide mais bien présents dans la relecture qu'en proposèrent des auteurs, eux-mêmes ingénieurs-mathématiciens, comme Simon Stevin de Bruges au début du XVII^e^ siècle. Le second chapitre (Irina et Dmitri Gouzevitch) met également en scène des ingénieurs, acteurs qui, à la lecture de ce livre et de sa problématique, apparaissent incontournables dans l'histoire des mathématiques mais qui en sont généralement un point aveugle. Le cadre est ici la Russie du début du XIX^e^ siècle, Saint Petersbourg et l'Institut des ingénieurs des voies de communication des années 1810 aux années 1830, lieu d'institutionnalisation d'une école de mécanique rationnelle et appliquée dont Ostrogradsky prit la direction dans les années 1830. Le but de ce chapitre est de ré-examiner la difficulté qu'ont eue les historiens des mathématiques et des sciences à qualifier cette école dite d'Ostrogradsky, considérée de façon parfois contradictoire comme la première école mathématique russe - Ostrogradsky étant présenté avant tout, avec son théorème, comme élève de Cauchy à Paris dans les années 1820 -, ou comme une école scientifique technique, une école de mécaniciens-analystes, une école d'ingénieurs, l'école russe de mécanique appliquée, etc. Nœud de cette contradiction historiographique, pour les auteurs, les débuts de cette école, avant Ostrogradsky, où sous la direction de Betancourt, ingénieur espagnol formé entre autres en France, Baird, ingénieur et entrepreneur privé écossais installé en Russie, et Bazaine, polytechnicien français, se développe à Saint Pétersbourg un cercle international aux compétences et formations théoriques et pratiques diverses – mais identifiables – dont « les travaux communs, qui portent à la fois sur la construction et la théorie des écluses à bassins d'épargne comme sur le mouvement des bateaux à vapeur, nourriront des rapprochements essentiels entre géométrie descriptive, mécanique analytique et mécanique appliquée ». C'est à un milieu qui n'est toujours pas un milieu mathématique académique habituel que s'intéresse Anne-Marie Décaillot dans le troisième chapitre. Production des savoirs mathématiques, légitimation, ces questions se posent d'une façon tout à fait originale dans le cadre de l'Association française pour l'avancement des sciences (AFAS), association créée en 1872 par des scientifiques, des industriels et des banquiers pour participer au redressement de la France aux lendemains de la défaite française contre la Prusse avec pour devise « Par la science, pour la patrie ». Le nombre et le type d'acteurs – mathématiciens professionnels, ingénieurs, amateurs – qui débordent largement le cercle académique, les intérêts influencés tout à la fois par les intervenants et les publics, sont à l'origine de la production de savoirs originaux comme ceux d'Edouard Lucas en théorie des nombres, sur la « géométrie des tissus » – rebaptisés « géométrie des quinconces » dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* – où il fait appel aux nombres premiers et obtient une classification des satins mettant en jeu des résultats de Fermat et Gauss. On y trouve également des travaux portant sur la réalisation d'instruments mathématiques, avec Lucas, pour tester la primalité de grands nombres, mais d'autres aussi dont Tchebychev et Torres y Quevedo avec une machine pour résoudre les équations algébriques. Ainsi, comme le fait remarquer l'introduction, la théorie des nombres s'est aussi développée, dès le XIX^e^ siècle, dans d'autres contextes que celui des mathématiques pures et s'est trouvée investie par des préoccupations concrètes.

Le chapitre suivant (Girolamo Ramunni) concerne l'après seconde guerre mondiale et la rupture provoquée dans le domaine du calcul par cet instrument scientifique de type nouveau qu'est l'ordinateur avec l'enregistrement du programme. L'ordinateur est né des collaborations étroites que la guerre a provoquées entre mathématiciens, ingénieurs électroniciens, logiciens, physiciens dans de nombreux domaines, en Angleterre comme aux États-Unis. Ces spécialistes ont mis en commun leurs diverses compétences pour analyser l'organisation logique et les fonctions des grands calculateurs. La notion de calcul en a été transformée, devenant pour les mathématiciens, les logiciens « une expérience que l'on peut rapprocher de l'expérimentation en laboratoire ». S'acquiert ainsi, dans ce domaine du calcul, une connaissance tacite, un savoir faire qui n'est plus seulement du ressort de la logique mais de l'empirisme. Le calcul est pensé dans un compromis entre les limites du matériel et du logiciel de la machine, les exigences de précision et la prise en compte du temps d'exécution. Von Neumann, Turing ont largement participé à ces ruptures conceptuelles qui, en France, ont été délibérément écartées par Louis Couffignal, père du projet de « machine universelle » porté par le CNRS. Expert en machines d'aide au calcul, sa culture est radicalement différente de celle des anglo-saxons. Il veut rester dans le cadre des calculateurs électroniques et de la mécanisation – son cadre de référence est l'automatisation du traitement des chèques postaux – et refuse le recours à la mémoire qu'il ne considère que comme un organe de stockage de données et non comme la possibilité de donner de la souplesse à la machine en les enregistrant avec instructions. C'est à cette volonté de ne considérer le calcul que d'un point de vue strictement théorique, à cette incapacité de prendre en compte les questions techniques posées par l'électronique que l'auteur attribue l'échec du projet français.

Dans le dernier chapitre, David Aubin s'intéresse à un lieu très particulier de production scientifique, l'Institut des hautes études scientifiques, institution privée de recherche fondamentale, cadre dans lequel apparaissent « de nouveaux aspects des conditions socio-culturelles » du travail du mathématicien qui vont favoriser l'élaboration de cadres théoriques nouveaux comme la théorie des catastrophes et le chaos déterministe. L'auteur poursuit deux propos, liés l'un à l'autre, et c'est tout l'intérêt de la thématique de ce livre. Il montre en premier lieu en quoi ces théories mathématiques, celles de René Thom ou David Ruelle par exemple, et leurs modèles qualitatifs se trouvent, y compris pour leurs auteurs, « entre mathématiques pures, qui s'ajustent au monde comme par miracle, et mathématiques appliquées qui permettent le calcul », constituant une troisième voie pour une légitimation épistémologique, certes, mais également, pour certains, politique. Il examine, en second lieu, les arguments avec lesquels le directeur L. Motchane promeut l'utilisation de ces recherches fondamentales, y compris les plus abstraites comme celles de Grothendieck, auprès de ses interlocuteurs du monde industriel, aussi bien du côté nationalisé que privé ou militaire. On y retrouve la promotion de cette troisième voie, l'IHÉS étant présenté comme le lieu où pourraient se former des « interprètes » de ces théories mathématiques les plus générales à des champs d'applicabilité particuliers, interprètes dont le monde industriel pourra avoir besoin entre les savants de l'IHÉS et leurs ingénieurs.

C'est justement autour de cette dichotomie pur versus appliqué, fondamental versus finalisé, qu'Amy Dahan construit la conclusion de cet ouvrage. Investissant à son tour le long terme, elle montre que cette césure, qui n'est ni univoque ni universelle, ni constante, a été à chaque fois construite comme argument de légitimation et d'autorité par des communautés scientifiques. On peut dater l'apparition d'une telle opposition des débuts de l'École polytechnique et de la place respective de la théorie et des applications, cette opposition se précisant en France avec le positivisme, alors que, parallèlement, se construit en Allemagne un discours sur la science pure cultivée dans des séminaires universitaires, hors du monde social. La science désintéressée – et les mathématiques placées à la première place – devient alors, au cours du XIX$^{\text{e}}$ siècle, porteuse de valeurs intellectuelles et morales qui donnent un nouveau statut à « l'homme de science ». Amy Dahan examine plus particulièrement les cinquante dernières années, avec, au sortir de la guerre, le renouveau du débat pur versus appliqué durant les années 1950-1970, particulièrement en France et aux États-Unis, faisant remarquer que cette dichotomie est invisible en revanche en Union soviétique. Elle note, enfin, le revirement dans les années 1980, avec le colloque de 1987 « Mathématiques à venir » où, la notion de modèle remplaçant celle de structure, l'autorité des mathématiques va s'en trouver déplacée.

Cette lecture, stimulante pour une historienne des mathématiques, devrait l'être tout autant pour des mathématiciens. Loin de prôner un relativisme désabusé quant à la validité de toute connaissance scientifique ou mathématique, l'ouvrage s'intéresse de très près aux contenus mathématiques. Les auteurs, tout en étant attentifs à des théories ou résultats mathématiques particuliers, souvent aux marges des sentiers battus de l'histoire des mathématiques, s'attachent à examiner les conditions intellectuelles, sociales, institutionnelles qui contribuent à leur élaboration et de leur légitimation dans leur temps. Ajoutons, pour terminer, que les articles proposent de riches bibliographies qui devraient permettre à celui qui le souhaite de continuer, par lui-même, cette réflexion sur les mathématiques et leurs enjeux, hier mais aussi aujourd'hui.

Hélène Gispert
Université Paris-Sud