LIVRES

Introduction à l'étude des espaces de Banach
D. Li et H. Queffélec
Société Mathématique de France, Cours spécialisés 2004. 627 p.
ISBN : 2-85629-155-4. 72 €

Le livre écrit par Daniel Li et Hervé Queffélec est un ouvrage bien plus ambitieux qu'une simple introduction. En effet, le lecteur y trouvera une grande partie de l'évolution de l'étude des espaces de Banach des années 50 jusqu'au début des années 2000. Les prérequis à la lecture de cet ouvrage se limitent cependant à un bon cours d'analyse fonctionnelle de M1 complété par une certaine culture générale en analyse harmonique qui permettra de mieux appréhender les questions étudiées.

Ainsi, ce livre s'adresse aussi bien à des étudiants de troisième cycle qu'à des chercheurs confirmés. Les auteurs insistent tout au long de cet ouvrage sur les interactions entre l'analyse classique et l'étude des espaces de Banach et présentent en détail l'application aux ensembles minces en analyse harmonique. Un autre objectif consiste à présenter la très forte influence de l'utilisation de méthodes probabilistes variées dans l'étude des espaces de Banach, aussi bien dans les résultats de structure que dans la théorie locale des espaces de Banach (c'est à dire l'étude des sous-espaces de dimension finie).

De par la grande variété des thèmes abordés, il s'agit d'un livre d'érudit indispensable à toute bibliothèque d'analyste ou de probabiliste. Je vais essayer de motiver sa lecture en présentant quelques fils conducteurs de cet ouvrage. Dès l'apparition des espaces de Banach (dans le livre de Banach lui-même en 1932), la question de l'existence d'une base (dite de Schauder) dans un espace de Banach séparable est posée. Evidemment, il ne s'agit pas seulement d'une base au sens algébrique du terme mais on dit que $(e_n)_{n\geq 1}$ est une *base* de l'espace de Banach X lorsque pour tout élément x de X, il existe une unique suite de scalaires $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n.$$

Cette égalité veut dire que la convergence de la série a lieu au sens de la norme et c'est ici qu'apparaît l'aspect analytique de la question. L'existence de bases apporte des techniques pour étudier la structure des espaces de Banach. Les chapitres 1, 2 et 9 exposent des résultats essentiels sur ce sujet. Il était bien connu que tout espace de Banach contient un sous-espace possédant une base. Cependant, la question de l'existence d'une base dans un espace séparable est restée ouverte très longtemps. Elle a été résolue par la négative par Enflo (1972) puis par Davie (1973).

En fait, cette question est liée au problème de l'approximation, moins exigeant à priori, et présenté en détail au chapitre 9. On y trouvera alors la preuve du théorème de Davie disant que pour tout $p > 2$, ℓ_p contient un sous-espace fermé sans la propriété d'approximation. Ce résultat est très surprenant puisqu'il prouve qu'il existe des espaces de Banach séparables avec de fortes propriétés de structure (uniformément convexes, uniformément lisses) qui n'ont pas la propriété d'approximation et en particulier pas de base ! Le chapitre 2 traite des séries inconditionnellement convergentes. Une série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ dans un espace de Banach est dite *inconditionnellement convergente* si pour toute permutation π des entiers la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{\pi(n)}$ converge. Pour expliquer un peu le point de départ, il est bon de rappeler qu'en dimension finie, la convergence inconditionnelle de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ équivaut à la convergence absolue, c'est à dire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$. Ce n'est plus le cas en dimension infinie puisqu'en 1950, Dvoretzky et Rogers ont montré que pour toute suite $(\lambda_n)_{n\geq 1} \in \ell_2$, il existe une série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ inconditionnellement convergente dans X telle que pour tout $n \geq 1$, $\|x_n\| = |\lambda_n|$. Il est alors naturel de parler de *base inconditionnelle* lorsque $(e_n)_{n\geq 1}$ est une *base* de l'espace de Banach X et pour tout $x \in X$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} e_n^*(x)e_n$ converge inconditionnellement. L'intérêt des espaces ayant une base inconditionnelle est qu'ils vérifient de bons théorèmes de structure. Par exemple, un des théorèmes de James (1950) dit que lorsque l'espace de Banach X possède une base inconditionnelle alors il est réflexif si et seulement s'il ne contient ni c_0 ni ℓ_1. On pouvait alors se demander si un espace de Banach X contenait un sous-espace avec une base inconditionnelle ou encore si tout espace de Banach contenait un sous-espace réflexif ou ℓ_1 ou c_0. Ces deux questions ont été résolues négativement par Gowers et Maurey (1991) et par Gowers (1994). La preuve de ces résultats conclut le chapitre 2.

Un second fil conducteur de ce livre consiste à présenter la pertinence de l'introduction des méthodes probabilistes dans l'étude des espaces de Banach et en particulier le lien entre les propriétés des séries de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un espace de Banach X et la géométrie de cet espace. Cette étude commence au chapitre 3. On y trouvera par exemple les inégalités de Kahane, généralisant au cadre vectoriel les inégalités de Khintchine (bien connues en analyse classique) et qui permettent de voir que lorsque $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ sont des variables aléatoires de Bernoulli et $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs de X, on a équivalence entre le fait que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega)x_n$ converge presque sûrement, la série converge dans L_p pour un $p \in]0, +\infty[$, la série converge dans L_p pour tout $p \in]0, +\infty[$. L'un des points d'orgue de ce thème est l'introduction au chapitre 4 de la notion de type et de cotype des espaces de Banach présentée sous sa forme la plus fructueuse par Maurey et Pisier en 1974. On dit que X est de *type p* (avec $1 \leq p \leq 2$) s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que

$$\left(\int \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\omega)x_i\|^2 d\omega\right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{1/p}$$

pour tous $x_1, ..., x_n \in X$, $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ étant une suite de Bernoulli. On dit que X est de cotype q (avec $2 \leq q \leq +\infty$) s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que

$$\left(\int \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\omega)x_i\|^2 d\omega\right)^{1/2} \geq \frac{1}{C} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q\right)^{1/q}.$$

Tout espace de Banach est de type 1 (par l'inégalité triangulaire) et de cotype $+\infty$ (à cause de la symétrie des variables de Bernoulli). Il est important d'observer que ces notions ne dépendent que des sous-espaces de dimension finie de X. Ce sont donc des notions *locales*. Il résulte des inégalités de Kahane que X est de type p si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de X telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^p < +\infty$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega)x_n$ converge presque sûrement. Grâce à l'identité du parallélogramme, il est clair que tout espace de Hilbert est à la fois de type 2 et de cotype 2. Un objectif essentiel du chapitre 4 est de démontrer une réciproque de cette observation. Il s'agit d'un théorème de Kwapien qui assure que si X est un espace de Banach de type 2 et de cotype 2 alors il est isomorphe à un espace de Hilbert. Ce résultat s'appuie sur des théorèmes de factorisation par un espace de Hilbert.

Signalons en marge de ce livre que la notion de cotype a été très récemment généralisée au cadre des espaces métriques par Mendel et Naor (« Metric cotype ») et que cela permet d'étendre ces théorèmes de factorisation à un cadre non-linéaire. De nombreux autres résultats sur les propriétés de type et de cotype sont présentés au chapitre 4. Ces notions apparaîtront régulièrement durant la lecture de cet ouvrage. Par exemple, au chapitre 11, les auteurs étudient les sous-espaces réflexifs de L_1 et montrent qu'ils ne contiennent pas les ℓ_1^n uniformément. Mais un théorème de Pisier établit un résultat de structure pour les espaces de Banach : les espaces de Banach ne contenant pas les ℓ_1^n uniformément sont exactement ceux possédant un type $p > 1$. Ainsi les sous-espaces réflexifs de L_1 possèdent un type non trivial !

Au chapitre 5, les auteurs s'intéressent à la théorie des opérateurs p-sommants, $T : X \to Y$ où X et Y sont des espaces de Banach, généralisation des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur un espace de Hilbert. En particulier, l'inégalité de Grothendieck se reformule en termes d'opérateurs p-sommants : tout opérateur $u : \ell_1 \to \ell_2$ est 1-sommant. A la fin de ce chapitre, les auteurs définissent les *ensembles de Sidon*. Cette importante notion en analyse harmonique va leur permettre d'illustrer les résultats présentés dans cet ouvrage. Une façon d'exprimer que $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ est un *ensemble de Sidon* est de dire que la transformation de Fourier $\mathcal{F} : f \mapsto \left(\hat{f}(\gamma)\right)_{\gamma\in\Lambda}$ réalise un isomorphisme entre $\mathcal{C}_\Lambda$, l'espace des fonctions continues à spectre dans Λ, et $\ell_1(\Lambda)$. Un résultat essentiel montré indépendamment par Pisier, et Kwapien et Pełczynski est que Λ est un ensemble de Sidon si et seulement si $\mathcal{C}_\Lambda$ est de cotype 2. En fait, Bourgain et Milman en 1985 ont montré qu'il suffisait que $\mathcal{C}_\Lambda$ soit de cotype fini comme ce sera démontré au chapitre 13.

Le chapitre 6 est consacré à une étude très détaillée de l'analyse classique des espaces L_p. On y verra en particulier que le système trigonométrique forme une base de $L_p(0,1)$ pour $p > 1$ non inconditionnelle pour $p \neq 2$, tandis que le système de Haar forme une base inconditionnelle de $L_p(0,1)$, le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz, ainsi qu'une autre preuve du théorème de Grothendieck. L'objet du chapitre 7 est d'étudier l'espace ℓ_1. Son absence dans un espace de Banach X entraîne de bonnes propriétés de convergence faible pour les suites bornées. C'est l'occasion de découvrir des résultats dont la démonstration dans le cas réel ne s'étend pas de façon évidente au cas complexe et nécessite l'utilisation d'outils combinatoires (que l'on reverra au chapitre 10).

Les chapitres 8, 10 et 11 sont plus orientés vers l'étude de la théorie locale des espaces de Banach, c'est à dire l'étude des sous-espaces de dimension finie d'un espace de Banach X. C'est l'occasion d'insister à nouveau sur la pertinence de l'utilisation de méthodes probabilistes en analyse. Un théorème de structure des espaces de Banach est le théorème de Dvoretzky qui établit que pour tout espace de Banach X, pour tous $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$, il existe un sous-espace de X de dimension n proche à ε près de l'espace hilbertien ℓ_2^n. C'est en fait un résultat de nature locale puisque tout espace E de dimension N contient de grands sous-espaces F de dimension de l'ordre de $\log N$ qui sont presque hilbertiens. Les auteurs présentent deux preuves distinctes basées sur des méthodes probabilistes : la preuve originale de Milman (1971) reposant sur le *phénomène de concentration de la mesure* ainsi qu'une seconde preuve reposant sur des théorèmes de comparaison de vecteurs gaussiens dus à Slepian (1962) et Gordon (1985). Le chapitre 10 établit quelques résultats essentiels sur les processus gaussiens et se conclut par le théorème d'Elton-Pajor (1983) qui assure que si $x_1, ..., x_N$ sont des vecteurs de la boule unité d'un espace de Banach X tels que

$$\int \| \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i(\omega) x_i \| d\omega \geq \delta N$$

alors on peut extraire de ces vecteurs une sous-suite équivalente à la base canonique de $\ell_1^{C(\delta)N}$ (où $C(\delta)$ est une fonction ne dépendant que de δ). Le passage du cas réel au cas complexe est délicat et nécessite ici aussi l'utilisation d'outils combinatoires. Dans le chapitre 11, on trouvera aussi bien des résultats de structure sur les sous-espaces réflexifs de L_1 avec par exemple le théorème de Rosenthal montrant que les sous-espaces réflexifs de L_1 se plongent dans L_p pour un $p > 1$, que des résultats de nature locale concernant les sous-espaces de dimension finie de L_1.

Pour conclure, le chapitre 12 présente de nouveaux exemples d'utilisation de la méthode des sélecteurs qui consiste, à partir d'une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ prenant les valeurs 0 et 1, à introduire l'ensemble aléatoire $I_\omega = \{n \geq 1, \varepsilon_n(\omega) = 1\}$. En particulier, ils montreront comment caractériser les ensembles de Sidon à partir d'extraction de sous-ensembles particuliers, ainsi qu'un résultat de majoration d'une somme de sinus dû à Bourgain établissant qu'il existe $C \geq 1$ tel que pour tout entier $N \geq 1$, il existe une partie $\Lambda \subset \mathbb{N}^*$ de cardinal N telle que

$$\| \sum_{k\in\Lambda} \sin kx \|_\infty \leq C\, N^{2/3}.$$

Le chapitre 13 est l'occasion pour les auteurs d'illustrer une grande partie des méthodes décrites dans ce livre par l'étude d'un exemple d'espace de Banach très important en analyse harmonique, l'espace de Pisier des fonctions presque sûrement continues. Ils établissent par exemple la dualité entre cet espace et l'espace des multiplicateurs $M_{2,\psi 2}$ (résultat aussi difficile que la dualité H_1-BMO de Fefferman et Stein) ainsi qu'une nouvelle caractérisation des ensembles de Sidon.

Je n'ai fait qu'effleurer le contenu de chacun des chapitres de ce livre pour en motiver sa lecture. En fait, ces chapitres sont très détaillés et se finissent toujours par des commentaires précisant les références et présentant les recherches récentes sur le sujet ainsi que des exercices bien développés permettant de mieux comprendre ou d'approfondir les notions abordées. Je dirais qu'il s'agit d'un ouvrage de référence en analyse, très agréable à lire et très riche. Un dernier conseil, n'hésitez pas à vagabonder à votre gré dans cet imposant livre. Un lecteur non initié au sujet pourrait commencer par les chapitres 1, 6 et 8 puis affiner ses connaissances en lisant les chapitres 3, 4 et 5 ou bien 2, 9 et 11. D'autres peuvent aller lire un chapitre dont le thème les intéresse, puis se laisser guider par les indications très claires des auteurs pour apprendre les notions nécessaires à la lecture de ce chapitre.

Olivier Guédon,
Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris

Analyse sur les groupes de Lie, une introduction
Jacques Faraut
Calvage & Mounet, 2006. 314 p. ISBN : 2-916352-00-72-916352-00-7. 33 €

La jeune maison d'édition **Calvage** & **Mounet**, née de la volonté de quelques collègues mathématiciens, publie dans la collection *Mathématiques en devenir*, le livre de J. Faraut : *Analyse sur les groupes de Lie*. C'est le premier livre de cette collection, qui en comporte déjà trois, et qui vise un public situé entre le L3 et le M2.

Le livre de J. Faraut s'adresse aux étudiants de M1 (voire de M2), mais pas seulement, et est issu d'un cours donné par l'auteur à l'Université Pierre-et-Marie Curie (anciennement Paris VI). Si l'on en croit la quatrième de couverture, l'objectif affiché est d'initier les étudiants aux méthodes et outils de l'analyse harmonique non commutative. Disons le tout de suite : l'objectif est largement atteint. La tâche n'était pas aisée, car l'analyse harmonique sur les groupes présuppose une certaine connaissance des objets manipulés, à savoir les groupes de Lie et leurs représentations.

En général, un livre d'introduction sur les groupes et algèbres de Lie comporte déjà 300 pages. Il existe peu de livres analogues, citons l'ouvrage de Mneimné & Testard *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques* et bien sûr *La Référence*, je veux parler du triptyque de S. Helgason sur les espaces symétriques ; mais cet ouvrage n'est pas destiné au même public. Il est donc utile d'expliquer ici, comment J. Faraut réussit en un seul ouvrage, d'une part l'introduction des groupes de Lie et leurs représentations et d'autre part l'introduction de l'analyse harmonique invariante sur le groupe $SU(2)$, le groupe unitaire $U(n)$, sur la sphère $\mathbb{S}^n$ vue comme un espace homogène et sur les espaces de matrices symétriques (c'est le cas dégénéré des espaces riemanniens symétriques).

Avant de commenter en détail le livre de J. Faraut faisons quelques remarques générales sur la présentation et le contenu. La présentation est soignée et chacun des douze chapitres est introduit avec précision et complété par de nombreux exercices. Ces derniers seront d'une grande utilité pour les étudiants, car ils traitent de compléments fort utiles. On peut regretter l'absence de correction, mais le livre aurait alors comporté cent pages de plus. Le tout est complété par un index fourni qui se révèle pratique et utile. La rédaction est dans l'ensemble très précise, notamment dans les premiers chapitres ; les calculs sont détaillés, sans équivoques ni longueurs excessives. L'étudiant pourra suivre les raisonnements sans difficultés.

On regrettera peut-être le manque de commentaires (il y a très peu de notes de pages par exemple) ou si l'on veut d'enrobage littéraire. Clairement le parti pris est celui du résultat ; je dirai celui des mathématiques concrètes, celles-là mêmes qui nécessitent l'usage d'un crayon. Celui qui se dit allergique au calcul et prétend comprendre sans pouvoir aligner trois lignes explicites découvrira via cet ouvrage qu'il faisait fausse route.

Abordons maintenant le contenu du livre en détail.

Les cinq premiers chapitres, représentant une centaine de pages, portent sur les groupes et algèbres de Lie. L'écueil étant clairement dans ce domaine le bourbakisme pédant, ce qui au passage n'est pas le cas des livres de Bourbaki sur le sujet. L'auteur adopte le point de vue de C. Chevalley ; les groupes de Lie seront des sous-groupes fermés du groupe linéaire $GL(n,\mathbb{R})$. Cette restriction n'est pas absurde, compte tenu de l'objectif. Elle a l'avantage d'aller à l'essentiel.

Le premier chapitre aborde les groupes topologiques, puis les exemples fondamentaux des sous-groupes classiques de $GL(n,\mathbb{R})$, à savoir les groupes orthogonaux et symplectiques. Les différentes décompositions sont abordées en précisant les équivalences de langage ; Cartan= polaire, Iwasawa= LU. L'introduction de l'application exponentielle au second chapitre prend alors un sens clair pour le lecteur compte tenu du fait que l'on manipule des groupes de matrices. La différentielle y est calculée avec quelques longueurs peut-être, mais cela ne sera pas inutile pour l'étudiant-lecteur. On conseillera les exercices de ce chapitre que nous avons trouvés particulièrement bien choisis.

Le troisième chapitre introduit l'algèbre de Lie d'un groupe linéaire, via les sous-groupes à 1-paramètre et l'application exponentielle. La formule de Campbell-Hausdorff est présentée par le calcul classique de la dérivée de

$$F(t) = \ln\big(\exp(X)\exp(tY)\big).$$

Le quatrième chapitre porte sur les algèbres de Lie et sur la notion de différentielle d'une représentation (de dimension finie). Les algèbres de Lie résolubles, nilpotentes et semi-simples sont traitées rapidement et le théorème de Lévi-Malcev est présenté sans démonstration. Les exercices de cette partie devront être faits par les étudiants.

Le chapitre suivant est assez original dans sa forme, car il traite de la mesure de Haar par l'exemple. Le cas des groupes topologiques compacts est admis, mais celui des groupes de Lie est traité via la géométrie différentielle. D'une certaine manière cela suffit. L'originalité réside dans les exemples ; cas d'un groupe ouvert d'un espace affine, produit de deux groupes, cas du groupe de matrices triangulaires, du groupe $SO(n)$ via la transformée de Cayley.

Le chapitre 6 est à mon sens le chapitre théorique le plus important. Il donne en moins de trente pages, l'essentiel de la théorie spectrale pour les groupes compacts, c'est-à-dire la décomposition des fonctions définies sur le groupe en utilisant l'ensemble des représentations unitaires irréductibles. La théorie spectrale des opérateurs autoadjoints compacts est utilement rappelée, ce qui permet à l'auteur d'aborder le théorème de Peter-Weyl (décomposition de $L^2(G)$, théorème 4.1), l'orthogonalité des coefficients (théorème 3.3), les fonctions centrales, le théorème de Plancherel L^2 (théorème 4.2)

$$f(g) = \sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi tr(\hat{f}(\pi)\pi(g))$$

et la convergence uniforme des séries de Fourier pour les fonctions $\mathcal{C}^k$ pour $k > \frac{1}{2}\dim G$; plus de détails sur le théorème de Plancherel n'auraient pas été inutiles. L'opérateur de Casimir outil central pour la suite apparaît pour la première fois dans ce chapitre ; c'est essentiellement le Laplacien.

Les deux chapitres suivants sont une mise en pratique exhaustive des théories abordées précédemment dans le cas des groupes $SU(2)$ et $SO(3)$. On y démontre notamment la convergence des séries de Fourier pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $SU(2)$, et on y résout l'équation de la chaleur. Le noyau de la chaleur s'exprime comme série faisant intervenir les caractères centraux χ_n des représentations irréductibles de $SU(2)$

$$p_t(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)e^{-n(n+2)t}\chi_n(xy^{-1}).$$

Le chapitre sur l'analyse harmonique sur la sphère $\mathbb{S}^n$ est un chapitre important. Il montre en effet comment l'introduction de l'espace homogène

$$SO(n)/SO(n-1)$$

est la clé géométrique de l'analyse sur la sphère. C'est le cœur du sujet. Dans notre cas, les harmoniques sphériques apparaissent comme des coefficients de représentations sphériques, c'est-à-dire admettant un vecteur invariant par $SO(n-1)$ et les harmoniques zonales (le coefficient associé au vecteur "pôle nord") sont liées aux polynômes de Gegenbauer. On peut regretter ici le manque d'une note concernant les polynômes classiques. Tout ceci permet de revisiter le problème de Dirichlet et de Poisson dans $\mathbb{R}^n$ et de traiter complètement le noyau de la chaleur sur la sphère.

Le chapitre 10 porte sur l'introduction de l'analyse sur les espaces de déplacements de Cartan. Ici, on traite le cas des matrices symétriques ou hermitiennes. C'est l'occasion d'introduire la formule d'intégration de Weyl. L'équation de la chaleur sur l'espace vectoriel de matrices symétriques conduit à l'évaluation des intégrales orbitales plates. Le lien avec le déterminant de Vandermonde est clairement expliqué. On trouvera dans les exercices des résultats complémentaires autour de l'intégrale de Metha.

Les deux derniers chapitres sont consacrés au groupe unitaire $U(n)$. Les représentations sont paramétrées par un plus haut poids entier $\lambda \in P^+$. On calcule la dimension d_λ par la formule de Weyl et on fait le lien avec les représentations holomorphes de $GL(n,\mathbb{C})$. C'est l'occasion d'introduire les fonctions de Schur, ce qui n'est pas banal à ce niveau. Elles seront utiles pour calculer les intégrales orbitales. On termine avec la convergence uniforme des séries de Fourier sur $U(n)$, le noyau de la chaleur sur $U(n)$

$$p_t(x,y) = \sum_{\lambda \in P^+} d_\lambda e^{\kappa_\lambda t} \chi_\lambda(xy^{-1})$$

et le développement en série des fonctions centrales via les caractères (ici interviennent les fonctions de Schur). La trame de cette partie suit la présentation de $SU(2)$, ce qui en rend la lecture aisée.

En conclusion, le livre de J. Faraut est à conseiller à tous ceux qui veulent découvrir (ou redécouvrir) l'utilisation des groupes de Lie dans les problèmes d'analyse classique. C'est l'occasion d'apprendre les idées essentielles d'un sujet mathématique très dynamique jetant un pont entre la géométrie, l'analyse et la théorie des groupes.

Charles Torossian,
Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris

Lie algebras and algebraic groups
P. Tauvel et R.W.T. Yu
Springer, 2005. 653 p. ISBN : 978-3-540-24170-6. $89,95

La théorie des groupes algébriques et des algèbres de Lie est une théorie centrale en mathématiques. Pour cause, son omniprésence dans des domaines aussi variés que la théorie des invariants, l'analyse harmonique, la physique mathématique, la combinatoire algébrique. Pour certains, elle est aussi l'occasion de voir l'algèbre en action, dans son efficacité, sa richesse et son esthétique ; ainsi on peut constater d'année en année son pouvoir de séduction sur bon nombre d'étudiants de troisième cycle. Justement, ces étudiants qui veulent aborder la thématique des groupes algébriques se doivent de parcourir une vaste littérature ; d'expérience, les livres de Dixmier, [2], Humphreys, [3], [4], Springer, [5], peut-être aussi Borel, [1], quelques articles de Kostant et j'en passe. Le plus souvent, les ouvrages sur la question divisent les sujets, pourtant très liés, « algèbres de Lie » d'une part et ses développements vers l'algèbre enveloppante, et « groupes algébriques » d'autre part et leurs pré-requis de géométrie algébrique. La prouesse du livre de Patrick Tauvel et Rupert Yu est de regrouper en un seul volume les deux sujets, leur interaction, ainsi que tout le matériel nécessaire pour les traiter.

Pour résumer en une phrase précise qui évitera toute équivoque, l'objet du livre est l'étude des algèbres de Lie de dimension finie et des groupes algébriques sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Les résultats sont exhaustifs, les preuves sont complètes, bien écrites et tout le matériel nécessaire pour ces preuves est réuni dans l'ouvrage, à l'exception peut-être du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt pour les algèbres enveloppantes, ce qui est plutôt une bonne chose. Entre autres et c'est ce qui fait la particularité du livre, on y décrit les relations entre les groupes algébriques et leurs algèbres de Lie, trop souvent laissées au folklore. Ceci résulte bien sûr du point de vue des auteurs : rassembler algèbres et groupes de Lie sous l'égide de la caractéristique zéro.

Le choix de réunir tous les pré-requis à la théorie est un choix ambitieux et courageux. Le livre est composé de quarante chapitres, introduisant pour commencer des résultats sur les espaces topologiques, puis quelques chapitres d'algèbre commutative. Vient ensuite une introduction à la géométrie algébrique qui expose des résultats utiles par la suite. Le thème évoqué par le titre du livre n'est abordé qu'au milieu, par exemple les algèbres de Lie ne sont définies qu'au chapitre 19 et les groupes algébriques au chapitre 21.

On l'aura compris, on ne parcourt pas ce livre de la première à la dernière page.

Après ces généralités, détaillons un peu le plan du livre. La première partie (chapitres 1 à 9) traite principalement d'algèbre commutative. On y trouve le matériel classique sur les anneaux et modules, anneaux factoriels et les fameux théorèmes « going up » et « going down ». Il est plaisant de voir qu'un chapitre est consacré aux filtrations, outil essentiel en algèbre non commutative, inscrit, on le devine, en prévision de l'étude des algèbres enveloppantes. On a ensuite le théorème de normalisation de Noether, le théorème de l'idéal principal de Krull et le célèbre Nullstellensatz. Plus loin, un chapitre fournit quelques rudiments de théorie des faisceaux et on termine cette première partie avec la décomposition de Jordan.

La géométrie algébrique fait l'objet de la seconde partie (chapitres 10 à 17). On y introduit les notions de variété algébrique, variété projective, morphisme de variétés, dimension, espace tangent. Enfin, on s'attarde sur la notion importante de normalité, et en particulier sur l'existence de la normalisation d'une variété algébrique et sur le théorème de Zariski.

Les algèbres de Lie sont étudiées aux chapitres 18 à 20, en commençant par un préliminaire sur un objet combinatoire bien connu lié aux algèbres de Lie semi-simples : le système de racines et leur groupes de Weyl associés. Les auteurs définissent ensuite les algèbres de Lie et on retrouve les grands classiques du domaine : théorèmes d'Engel, Lie, Cartan et leurs incidences sur les algèbres de Lie nilpotentes et résolubles. Il est alors temps de définir les algèbres de Lie semi-simples, d'introduire le théorème de Weyl, de Levi-Malcev, et de classifier ces algèbres à l'aide des systèmes de racines vus précédemment. Notons que les auteurs ont jugé bon de joindre des tables pour chaque système de racines. Cela n'ajoute bien sûr rien aux tables bien connues de Bourbaki, mais cela possède l'avantage de les avoir à disposition pendant la lecture du livre.

Les chapitres 21-22 présentent des généralités sur les groupes algébriques et on trouve la description des liens entre groupes algébriques et algèbres de Lie dans les chapitres 23-24. Plus précisément, le chapitre 23 traite de l'association d'une algèbre de Lie à un groupe de Lie et inversement le chapitre 24 s'applique à trouver les groupes ayant une algèbre de Lie fixée. C'est, je le rappelle, une des parties pour laquelle le livre constituera certainement une précieuse référence.

On peut maintenant attaquer les espaces homogènes et les orbites de groupes algébriques. Enfin de « l'action » se dit le lecteur impatient. Le chapitre 26 considère les groupes résolubles avec le théorème de Lie-Kolchin, le théorème du point fixe de Borel et le théorème de conjugaison des tores maximaux. Puis, dans le chapitre 27, il est question de groupes réductifs, avec le théorème de Hilbert-Nagata sur les invariants de groupes réductifs agissant rationnellement ainsi que le théorème de Peter-Weyl et ses raffinements. On étudie ensuite les sous-groupes de Borel et les paraboliques, avec le théorème de conjugaison des sous-groupes de Borel.

Les outils importants pour la théorie des représentations des algèbres de Lie semi-simples sont introduits dans le chapitre 30. On y trouve les algèbres enveloppantes, qui d'ailleurs auraient pu être placées un peu plus tôt, le théorème PBW et les modules de Verma qui fournissent un accès facile (et standard) à la classification des modules simples de dimension finie. On s'intéresse ensuite à un peu de théorie des invariants en étudiant les algèbres d'invariants pour un sous-groupe engendré par des réflexions (théorème de Chevalley). On voit l'important théorème de Kostant qui peut s'énoncer ainsi : une algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple est libre sur son centre. Les auteurs fournissent la preuve de Bernstein et Lunts, infiniment plus simple que la preuve originale.

Le chapitre 32 ouvre la voie à la dernière partie du livre, certainement la plus spécifique. On démontre ici le théorème de Jacobson-Morozov sur les S-triplets et son application aux éléments nilpotents dans les algèbres de Lie semi-simples. Ces résultats sont essentiels pour l'étude des orbites nilpotentes. On fournit aussi des résultats importants de Kostant sur les éléments principaux et les éléments nilpotents dits réguliers.

Le chapitre 33 se consacre au théorème de Richardson qui associe une orbite nilpotente à une sous-algèbre parabolique d'une algèbre de Lie semi-simple. Il s'agit d'un théorème fondamental pour l'étude des algèbres de Lie semi-simples. Pour cela, les auteurs introduisent la notion de polarisation, notion qui, en un sens, généralise la notion de sous-algèbre de Cartan.

Le chapitre 35 étudie le problème naturel du centralisateur d'un élément dans une algèbre de Lie semi-simple. Il y est question d'éléments distingués, du théorème de Bala-Carter et de sous-algèbres paraboliques distinguées. On trouvera ensuite la notion de classes de Jordan (liée aux centralisateurs), de feuillets de Dixmier. Notons aussi que de nombreux résultats évoqués trouvent dans ce livre leur généralisation au cas symétrique. L'outil de base présenté étant la décomposition d'Iwasawa.

Dans les derniers chapitres du livre, les auteurs retrouvent un de leurs sujets de prédilection : le problème de l'indice d'une sous-algèbre de Borel dans une algèbre de Lie semi-simple. Notons enfin le dernier chapitre sur les représentations coadjointes et l'indice d'une représentation qui clôt cet excellent ouvrage.

Si je devais émettre une petite critique, je dirais que les chapitres finissent de façon un peu abrupte. Le sujet, et surtout l'exercice de style qui consiste à tout démontrer, se prête particulièrement à des discussions ouvertes de fin de chapitre, tel que cela est fait par exemple dans le livre de Dixmier, [2]. Ce serait l'occasion de parler sans preuves de sujets liés et de développements récents, comme par exemple la méthode des orbites et pourquoi pas, la base canonique. De même, les introductions de chapitres pourraient être plus fournies et ainsi guider le lecteur tout au long du livre.

En conclusion, c'est un travail énorme que les auteurs ont accompli. P. Tauvel et R. Yu ont su regrouper dans un seul volume tout le matériel nécessaire en théorie de Lie. Il s'agit d'un livre particulièrement recommandé à tous ceux qui veulent aborder la théorie des algèbres de Lie, et les spécialistes, quant à eux, trouveront dans la dernière partie des informations nouvelles et intéressantes. Il va sans dire que cet ouvrage s'insérera avec profit dans toutes les bibliothèques.

Références

[1] Borel, Armand. Linear algebraic groups. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 126. Springer-Verlag, New York, 1991.
[2] Dixmier, Jacques. Algèbre enveloppantes. Reprint of the 1974 original. Les Grands Classiques Gauthier-Villars.[Gauthier-Villars Great Classics] Édition Jacques Gabay, Paris, 1996.
[3] Humphreys, James E. Introduction to Lie algebras and representation theory. Second printing, revised. Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.
[4] Humphreys, James E. Linear algebraic groups. Graduate Texts in Mathematics, N°. 21. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.
[5] Springer, T. A. Linear algebraic groups. Second edition. Progress in Mathematics, 9. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998.

Philippe Caldero,
Université Claude Bernard, Lyon