LIVRES

Une introduction aux motifs - (Motifs purs, motifs mixtes, périodes)
Y. André
Société Mathématique de France, Panoramas et Synthèse n° 17, 2004. 261 p.
ISBN : 2-85629-164-3. 26 €

Il était grand temps.

Comme le dit André dans le résumé de son livre, « la théorie des motifs... a connu depuis une quinzaine d'années des développements spectaculaires. Ce texte a pour objectifs de rendre ces avancées accessibles au non-spécialiste. »

Même avant d'entrer dans les détails, qu'il soit dit que les avancées traitées dans ce texte, ne sont pas seulement rendues accessibles. Elles sont présentées, tout comme les fondements de la théorie qui les précède, de façon limpide, claire, nette, exhaustive, et avec le plus grand soin. Ce livre fait honneur à la série dans laquelle il est paru : *Panoramas et Synthèses*. Car il représente bien la synthèse la plus importante faite de cette théorie depuis la parution des *Motives (Seattle, 1991)*. En plus, les tarifs pratiqués par la SMF font que l'accessibilité de ces avancées ne restera pas une question purement théorique : toute bibliothèque, et tout mathématicien travaillant dans ce domaine, se doit de disposer de ce livre.

Après une telle ouverture, le lecteur sentira bien le besoin d'y ajouter une petite critique. Il est vrai qu'en tant que rapporteur, je suis obligé de garder une position neutre, et ce d'autant plus qu'une copie du livre me sera offerte par l'éditeur, une fois ce rapport rendu. Alors, comment faire pour rééquilibrer le jeu ? Il n'y aurait pas quelque chose qui ne va pas ? Mais si, rassurez vous. À savoir : contrairement à ce que le résumé cité ci-dessus pourrait laisser entendre, *toutes* les avancées depuis 1990 ne sont pas traitées dans ce texte. Celle dont l'absence m'a surpris, concerne les techniques *($\mathbb{A}^1$-)homotopiques*, introduites par Voevodsky pour attaquer la conjecture de Milnor, et qui se sont depuis avérées incontournables pour le développement de la théorie « mixte », notamment pour la construction du formalisme des 6 foncteurs sur les catégories des motifs « relatifs ». Je dis *homotopiques* pour les distinguer des techniques *homologiques* classiques : catégories (pseudo-)Abéliennes, additives, Tannakiennes, dérivées. Peut-être même de Kimura–O'Sullivan. Mais pas catégories de modèles, homotopiques, et pas homotopiques stables non plus. Bien sûr, le livre a déjà plus de 250 pages, et comme je l'ai déjà dit : les matières qui y sont traitées, le sont de façon exhaustive. Il s'agit donc d'un choix, d'un choix nécessaire et je dirais même : d'un bon choix. L'auteur aurait juste pu le dire, de préférence tout au début de son texte.

Là, j'ai peut-être fait un peu fort. Il convient quand-même de ne pas oublier le titre du livre, « Une introduction aux motifs ». Aussi, le lecteur commence sans doute à avoir envie de savoir ce qu'il y a dans ce livre, maintenant qu'il sait ce qu'il n'y a pas. Choisissons donc, au moins pour un moment, le registre purement descriptif. Ce texte est structuré en trois parties : *Partie I : Motifs purs* (pp. 1–132), *Partie II : Motifs mixtes* (pp. 133–198), *Partie III : Périodes* (pp. 199–243).

Les premiers chapitres (1–8) de la *Partie I* posent les bases pour tout ce qui suit. Leur intersection avec le matériel présenté dans *Motives* est donc considérable : sont traités les catégories Tannakiennes, les cycles algébriques et relations adéquates, la définition des motifs purs à la Grothendieck, les conjectures standard... À mon avis, le point le plus important parmi ceux traités lors de ces chapitres, et allant au-delà de Seattle, reste la preuve de la semi-simplicité de la catégorie des motifs numériques (Section 4.5), publiée par Jannsen en 1992 [J92] (ici comme par la suite, on se servira des références de la bibliographie, très exhaustive, du livre d'André). À noter aussi la définition de l'équivalence de « smash-nilpotence » $\sim_{\otimes \mathrm{nil}}$ (Section 3.2.4), introduite par Voevodsky [Vo95]. Le point de vue des $\otimes$-idéaux (Section 4.4) est utile : il lie notamment l'équivalence numérique $\sim_{\mathrm{num}}$ au $\otimes$-idéal maximal $\mathcal{N}$, et l'équivalence de « smash-nilpotence » au $\otimes$-idéal $\sqrt[\otimes]{0}$ de la $\otimes$-catégorie *CHM* des motifs de Chow. Ainsi, la conjecture de nilpotence de Voevodsky « $\sim_{\otimes \mathrm{nil}} = \sim_{\mathrm{num}}$ » devient un énoncé concernant la structure de la catégorie *CHM*, à savoir « $\sqrt[\otimes]{0} = \mathcal{N}$ ». Comme le dit André dans son avant-propos, « nous avons cherché à mettre l'accent sur les aspects structurels... » Effectivement. Si on voulait concentrer la motivation de l'auteur et la raison d'être principale de ce livre en une seule phrase, on choisirait bien celle-là : mettre l'accent sur les aspects structurels. Car il s'agit de « hiérarchiser et...mettre en valeur la cohérence et la complémentarité des nombreuses conjectures qui forment l'armature idéale au sein de laquelle continue de s'échafauder la théorie » (continuation et fin de l'avant-propos). Ah ! Comme ceci est bien dit. Le chapitre 7 est une bonne illustration de ce principe. À partir de la conjecture de plénitude concernant la réalisation de Hodge, de Tate, d'Ogus, de DeRham–Betti,..., la conjecture de semi-simplicité des objets dans l'image essentielle de cette réalisation se voit réduite à deux propriétés structurelles de la catégorie des motifs homologiques (Section 7.1.1) : (1) $\sim_{\mathrm{hom}} = \sim_{\mathrm{num}}$, (2) cette catégorie (après modification de la contrainte de commutativité) devient, *via* la réalisation en question, une sous-catégorie Tannakienne de la catégorie des structures de Hodge, des modules sous l'action du groupe de Galois,... À noter que les conjectures de plénitude et de semi-simplicité concernant la réalisation de DeRham–Betti (Section 7.5) sont des conséquences formelles de la conjecture des périodes de Grothendieck, qui prédit que le degré de transcendance du corps engendré par les périodes, est maximal ; cette question sera illustrée très concrètement dans la *Partie III*.

Le chapitre 9 décrit deux manières de contourner les conjectures standard. « L'idée est de partir de la catégorie des motifs homologiques..., et de modifier cette catégorie de manière minimale pour la rendre Abélienne semi-simple. » Deux voies sont possibles : modification *par excès* (Section 9.2) et *par défaut* (Section 9.3). (Bien entendu, si $\sim_{\mathrm{hom}} = \sim_{\mathrm{num}}$, alors ces modifications ne changent rien.) Il s'agit du premier chapitre dans lequel l'auteur décrit surtout des travaux et des idées largement dus à lui-même. Notons que la modification par excès remplace les cycles algébriques par les cycles dits *motivés*. *Grosso modo*, un cycle est motivé s'il appartient à l'algèbre engendrée par les cycles algébriques et les inverses des isomorphismes de Lefschetz. Comme le montre le chapitre 10, cette notion est assez efficace. Elle permet d'apporter une précision au résultat classique de Deligne « Hodge implique Hodge absolu sur les variétés Abéliennes » [D82].

Car en fait, un cycle de Hodge sur une telle variété est même motivé. On pourrait dire que la stratégie de preuve suit celle de Deligne, puisque l'analyse clé reste celle des propriétés du *transport parallèle* (Section 10.1) dans une famille de variétés projectives et lisses. Mais on pourrait aussi dire que l'auteur, soucieux de « mettre l'accent sur les aspects structurels », a réussi à en identifier un dont la nature n'avait pas été complètement saisie auparavant : le transport parallèle est motivé, et non seulement « Hodge absolu » ! Le chapitre 11 redevient plus conjectural. Sont énoncées les conjectures de Bloch–Beilinson–Murre (BBM) concernant l'existence d'une certaine filtration sur les anneaux de Chow. Parmi les points post-Seattliens, je mentionnerai : la construction par S. Saito d'un candidat pour la filtration BBM (Section 11.3), et le lien entre BBM et la conjecture de nilpotence de Voevodsky (à savoir : BBM implique Voevodsky ; Section 11.5). À mon avis, le matériel du chapitre suivant représente l'avancée la plus importante depuis Jannsen en matière de motifs purs : « D'après Jannsen, la catégorie des motifs numériques est Abélienne semi-simple. Que peut-on dire de la structure de la catégorie des motifs pour d'autres équivalences adéquates, notamment pour l'équivalence rationnelle ? » Rappelons que l'énoncé de Jannsen va dans les deux sens : pour que la catégorie des motifs soit Abélienne semi-simple et non-triviale, il faut et il suffit que l'équivalence adéquate soit égale à $\sim_{\mathrm{num}}$. Ce qui nous empêche de rêver inutilement.

Définition. — Une *catégorie de Kimura–O'Sullivan* sur un corps F de caractéristique nulle est une $\otimes$-catégorie rigide $\mathcal{T}$ sur $F = \mathrm{End}(\mathbf{1})$, pseudo-Abélienne, et telle que tout objet M de $\mathcal{T}$ se décompose en $M^+ \oplus M^-$, où

$$\wedge^n M^+ = Sym^n M^- = 0 \quad \text{pour} \quad n \gg 0$$

Au milieu des années 1990, Kimura et O'Sullivan ont proposé, indépendamment l'un de l'autre, la conjecture selon laquelle la catégorie des motifs, après $\otimes_{\mathbb{Q}}$, serait une catégorie de Kimura–O'Sullivan sur $\mathbb{Q}$ (ils ont dû utiliser une autre terminologie), et ce pour toute équivalence adéquate $\sim$. Cette conjecture est connue pour les motifs « de type Abélien », en particulier pour les courbes. Sa validité pour les surfaces avec $p_g = 0$ entraînerait la conjecture de Bloch concernant la bijectivité du morphisme d'Abel–Jacobi pour de telles surfaces. Voici une autre conséquence importante de la conjecture de Kimura–O'Sullivan : étant données deux équivalences adéquates $\sim^1$ et $\sim^2$, donnant lieu aux catégories de motifs $M^1_{\mathbb{Q}}$ et $M^2_{\mathbb{Q}}$, et dont la première est plus fine que la seconde, alors le foncteur plein

$$M^1_{\mathbb{Q}} \longrightarrow M^2_{\mathbb{Q}}$$

est surjectif. Le point essentiel étant la possibilité de relever des idempotents modulo $\sim^2$ en des idempotents modulo $\sim^1$. Ceci aurait des conséquences très concrètes. Prenons le cas où $\sim^1 =$ rat et $\sim^2 =$ hom, *i.e.*, considérons le foncteur

$$\pi : CHM_{\mathbb{Q}} \longrightarrow M_{\mathrm{hom},\mathbb{Q}}$$

associant à tout motif de Chow son motif de Grothendieck. Souvenons-nous que d'après Scholl [Sc90], on sait associer à toute forme elliptique cuspidale f, qui est forme propre sous l'action de l'algèbre de Hecke, nouvelle *etc.etc.*, un motif de Grothendieck M_f tel que les valeurs propres du morphisme de Frobenius sur les réalisations de Tate de M_f soient liées aux valeurs propres de Hecke sur f. Alors si on savait que π est surjectif, on saurait qu'il est possible de relever M_f en un motif de Chow. En fait, il me semble que les résultats de [Ki04] montrent même que la conjecture de Kimura-O'Sullivan impliquent l'existence d'un relèvement *canonique*. Mais je me trompe peut-être... Le chapitre 13 est le dernier de la *Partie I*. Considérons le foncteur

$$h : P \longrightarrow M_\sim$$

associant à toute variété projective lisse son motif. Ce foncteur induit un foncteur au niveau des groupes K_0 :

$$\chi_c := K_0(h) : K_0(P) \longrightarrow K_0(M_\sim)$$

La question, posée par Grothendieck en 1964, est de savoir si (lorsque la caractéristique du corps de base k est nulle) χ_c se factorise à travers $K_0(Var)$, où on note Var la catégorie des variétés, *i.e.*, des schémas réduits, séparés et de type fini sur k. Précisons que par définition, toute représentation

$$X = U \coprod Z$$

d'une variété X comme union d'un ouvert U et de son complément fermé Z donne une relation $[X] = [U] + [Z]$ dans $K_0(Var)$; pareil pour $K_0(P)$ (en observant que dans P, toute telle union est une union disjointe de variétés). Gillet–Soulé [GS96] et Guillen–Navarro-Aznar [GNa02] ont donné une réponse plus qu'affirmative à cette question : en fait, ils attachent à toute variété un complexe borné de motifs de Chow, bien défini à homotopie près, et ce de manière *contravariante* (pour les morphismes propres). À noter que dans un travail récent [Bi04], Bittner, en se servant du théorème de « factorisation faible » [AKMW02] a réussi à identifier le noyau de l'épimorphisme $K_0(P) \twoheadrightarrow K_0(Var)$: il est engendré par les

$$[\widetilde{X}] - [X] - [E] + [Z]$$

où Z est un fermé lisse de $X \in P$, $\widetilde{X}$ l'éclaté de X en Z, et E le diviseur exceptionnel. Puisque d'après Manin, ces relations deviennent nulles dans $K_0(M_\sim)$, l'existence de

$$\chi_c : K_0(Var) \longrightarrow K_0(M_\sim)$$

devient une conséquence directe de l'analyse de Bittner.

Pour conclure la partie « pure » de ce rapport, je note la grande utilité des « tableaux synoptiques » à la fin des chapitres 5, 10, et 12, pour « hiérarchiser et...mettre en valeur la cohérence et la complémentarité des nombreuses conjectures. »

La *Partie II* (chapitres 14–22) s'ouvre sur la question « pourquoi des motifs mixtes » ? Le chapitre 14 esquisse « la philosophie de la mixité (due principalement à Deligne)...ainsi que le fil conducteur de la théorie de Voevodsky des motifs mixtes. » (L'existence des approches de Levine et de Hanamura, et leur équivalence avec celle de Voevodsky, sont mentionnées.) Le développement de cette dernière occupe les chapitres 15–19, soit une bonne moitié de la *Partie II*, dont il constitue donc le thème principal. On y trouve un survol de *Cycles, transfers, and motivic* *homology theories (Princeton, 2000).* Cet ouvrage a fait l'objet d'un rapport de Bloch (2001d :14026) paru dans les *AMS Reviews*, ce qui me permettra de ne pas entrer dans les détails mathématiques des chapitres 15–19 du livre d'André. Ceci dit, vu la façon non-linéaire dont *Cycles, transfers, and motivic homology theories* a été rédigé, le survol d'André paraît plus qu'utile. Il nous montre comment il faut lire cet ouvrage : à partir de sa fin ! Après avoir posé les bases de la théorie des *correspondances finies* (chapitre 15), on se tourne donc vers la construction de $DM_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}$, la *catégorie triangulée des motifs mixtes effectifs* (chapitre 16). L'inversion des twists de Tate permet ensuite de construire DM_{gm}, la *catégorie triangulée des motifs mixtes* (chapitre 17) ; c'est dans le cadre de ces catégories que l'on définit les groupes de *cohomologie motivique* de façon absolument naturelle, à savoir, comme étant les groupes des morphismes. Le chapitre 18 « passe en revue les propriétés fondamentales de $DM_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}$ et DM_{gm}, et de la cohomologie motivique. Ces résultats, dus à Voevodsky, en partie en collaboration avec Friedlander et Suslin...représentent les avancées majeures de la théorie des motifs mixtes de la dernière décennie. » Donc, de celle qui précède fin 2004... L'auteur profite de l'occasion pour préciser que certains résultats, énoncés dans *Cycles, transfers, and motivic homology theories* sous l'hypothèse supplémentaire de caractéristique nulle, ont été prouvés en caractéristique arbitraire (au moins, après $\otimes\mathbb{Q}$) depuis la parution de *loc.cit.* Ceci concerne notamment le fait que la $\otimes$-catégorie $DM_{\mathrm{gm},\mathbb{Q}}$ est rigide. Les résultats du chapitre 18 « se démontrent...en plongeant $DM_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}$ dans une certaine catégorie de 'complexes de faisceaux motiviques' et en réinterprétant la cohomologie motivique en termes de ces objets... » Le chapitre 19 est consacré à l'étude de ce plongement. Pour résumer : ceux qui n'ont pas encore lu *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, (devraient le faire en toute urgence, mais) sont invités à faire précéder leur lecture de *loc.cit.* par celle des chapitres 15–19 du livre d'André. Ils gagneront forcément du temps. Le chapitre 20 présente brièvement deux classes importantes de motifs mixtes sur un corps de caractéristique nulle : les 1-*motifs* à la Deligne, et les *motifs de Tate*. D'après une observation de Voevodsky (voir [Or04] pour la démonstration), les premiers forment canoniquement une sous-catégorie pleine de $DM_{\mathrm{gm},\mathbb{Q}}^{\mathrm{eff}}$. La question de savoir si les extensions successives de twists de Tate dans $DM_{\mathrm{gm},\mathbb{Q}}$ forment encore une catégorie Abélienne, mène naturellement à l'énoncé de la conjecture d'annulation de Beilinson–Soulé. (Rappelons que d'après Borel, celle-ci est valable pour un corps de nombres.) Plus généralement, elle mène au problème de l'existence d'une « bonne » t-structure sur $DM_{\mathrm{gm},\mathbb{Q}}$. C'est à ce problème qu'est consacré le chapitre suivant. La Section 21.1 (« Problème de t-structures et peines de cœur ») décrit quelques propriétés « raisonnables » que devrait satisfaire cette structure. La Section 21.2 en donne une proposition conjecturale, due à Voevodsky et Beilinson. Le dernier chapitre de la *Partie II* traite les réalisations et régulateurs pour les motifs mixtes. C'est dans ce contexte que André a choisi d'énoncer les conjectures de Deligne et de Beilinson sur les valeurs spéciales des fonctions L, c'est-à-dire d'en donner les généralisations aux *motifs mixtes sur* $\mathbb{Z}$ dues à Scholl [Sc91].

Voilà donc la partie « mixte » de ce rapport. Elle est devenue moitié plus courte que la partie « pure », à peu près comme le texte sur lequel elle s'appuie. Le lecteur souhaitant aller au-delà d'« Une introduction aux motifs », concentrera ses efforts sans doute sur cette partie de la théorie, une fois qu'il aura digéré le contenu du livre d'André. La théorie $\mathbb{A}^1$-homotopique a déjà été mentionnée ; je mentionnerai également la thèse d'Ayoub (qui n'était pas encore disponible en 2004), concernant le formalisme des 6 (voire, 7...) foncteurs, ainsi que les résultats qui ont été obtenus en s'appuyant sur ses résultats.

La *Partie III* occupe les trois derniers chapitres de ce livre. Le chapitre 23 revient sur la conjecture des périodes de Grothendieck. On précise d'abord son lien avec les conjectures de plénitude et de semi-simplicité de la réalisation de DeRham–Betti. Puis, un exemple concret est traité en détail : celui d'une variété Abélienne A définie sur un sous-corps k des nombres complexes. Si en plus k est algébrique sur $\mathbb{Q}$, la conjecture entraîne que les deux nombres suivants sont égaux : (a) le degré de transcendance du « module » τ de A sur $\mathbb{Q}$, (b) la dimension complexe de la variété de Shimura engendrée par le morphisme $\mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ du tore de Deligne associé au « point » A, et des conjugués de ce morphisme (Proposition 23.2.4.1). D'autres exemples, très instructifs, de conséquences concrètes de la conjecture sont donnés, notamment celui d'un 1-motif dont la partie Abélienne est une courbe elliptique. Dans ce contexte, certaines de ces conséquences ont pu être établies inconditionnellement par Nesterenko [N96]. Le chapitre 24 a pour objectif « d'élucider le réseau de relations algébriques que satisfont les nombres réels $\Gamma(a)$, $a \in \mathbb{Q} \setminus -\mathbb{N}$, et de les interpréter dans le contexte des motifs. » Il s'avère que pour cela, on est conduit « à étudier les relations entre périodes de variétés Abéliennes à multiplication complexe, et à prouver que toutes celles connues s'expliquent...par la présence de cycles algébriques. » Voilà donc la structure de ce chapitre. On établit d'abord le lien entre les $\Gamma(a)$ (ou au moins, de certaines de leurs puissances) et de certaines « périodes de Shimura », à savoir, celles qui sont associées aux variétés Abéliennes (toujours à multiplication complexe) définies sur une extension Abélienne de $\mathbb{Q}$ (Sections 24.1–24.3, 24.5). Les périodes de Shimura satisfont certaines relations « évidentes » (Section 24.4) ; que ces relations, dites *de Shimura* soient motiviques, résulte du fait que « Hodge implique motivé sur les variétés Abéliennes », passé en revue au chapitre 10. La conjecture des périodes (ou plus précisément, sa restriction à la catégorie Tannakienne engendrée par les motifs des variétés Abéliennes à multiplication complexe) est équivalente à l'énoncé suivant : les relations de Shimura engendrent toutes les relations polynomiales à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ entre périodes de Shimura (Proposition 24.6.3.1). Des variantes de ce dernier existent quand on restreint le corps de définition k des variétés Abéliennes. Vu l'interprétation des valeurs $\Gamma(a)$, cette variante, pour k égale à l'extension Abélienne maximale de $\mathbb{Q}$, équivaut à la conjecture de Lang sur les relations possibles entre les valeurs $\Gamma(a)$, $a \in \mathbb{Q} \setminus -\mathbb{N}$. La même interprétation permet de lier la conjecture de plénitude de la réalisation de DeRham–Betti à la conjecture de Rohrlich. Le chapitre 25 suit à peu près le même schéma, cette fois pour les motifs de Tate mixtes sur $\mathbb{Z}$ au lieu des motifs (purs) des variétés Abéliennes à multiplication complexe. Les périodes de certains motifs de Tate, à savoir ceux qui apparaissent comme sous-quotient du π_1 unipotent motivique de la droite projective moins trois points rationnels, sont identifiées aux *nombres polyzêta*, définis sous forme de séries, ou encore, comme intégrales itérées. Vu la forme de ces séries et de ces intégrales, les nombres polyzêta satisfont un système de relations, dites *de double mélange régularisé* (DMR). D'après Goncharov [Go'], celles-ci sont motiviques. La conjecture des périodes (ou plus précisément, sa restriction à la catégorie Tannakienne engendrée par le π_1 de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$) est équivalente à l'énoncé suivant : toute relation polynomiale à coefficients dans $\mathbb{Q}$ entre nombres polyzêta est d'origine motivique. Conjecturer, comme le font certains, que toutes les relations polynomiales entre nombres polyzêta sont engendrées par DMR, signifie donc aller au-delà de la conjecture des périodes de Grothendieck.

Vu les développements spectaculaires que la théorie des motifs a connus depuis 1990, le manque d'une synthèse de ces progrès commençait à se faire remarquer de plus en plus cruellement. Le livre « Une introduction aux motifs » de Yves André constitue non seulement, comme son titre le promet, une introduction à cette théorie ; il fournit une synthèse d'une partie importante de ces progrès. Personellement, j'ai bien apprécié sa lecture, et je suis convaincu que tout lecteur de ce livre arrivera à la même conclusion. Je ne peux donc qu'encourager vivement son achat. À mon avis, la théorie $\mathbb{A}^1$-homotopique des motifs est à la fois suffisamment importante, et dans un état suffisamment mature, pour mériter à elle seule un tome de la série « Panoramas et Synthèses ». La SMF, si elle le souhaite, n'aura aucun mal à trouver parmi les anciens habitants de Jussieu–Chevaleret, un auteur capable de se charger de cette tâche.

Jörg Wildeshaus,
Institut Galilée, Villetaneuse

Lectures on Quasiconformal Mappings

L.V. Ahlfors, with additional chapters by C. J. Earle and I. Kra, M. Shishikura, J. H. Hubbard

American Mathematical Society, 2006. 162 p. ISBN : 978-0-8218-3644-6. \$35

Ce livre est la réédition de notes mises en forme par C. Earle d'un cours donné par Lars Ahlfors à Harvard en 1964. Ces notes furent publiées en 1966 par Van Nostrand, mais, depuis quelques années, cet ouvrage de référence était indisponible en librairie. L'étude des applications quasiconformes a été initiée dans les années 1920-1930 par, entre autres, Grötzsch, Lavrentiev, Teichmüller, Ahlfors. Elles apparaissent pour la première fois sous ce nom dans l'article *Zur theorie der überlagerungsfläschen* d'Ahlfors qui fut publié en 1935 dans Acta Mathematica et qui vaudra à son auteur (d'après ses commentaires dans le premier volume de ses œuvres complètes) de partager avec J. Douglas la première médaille Fields en 1936. Décrivons maintenant le livre d'Ahlfors qui fut un des premiers sur le sujet et pour cela, commençons comme Ahlfors dans son chapitre 1 par le début de la théorie, à savoir le problème de Grötzsch (1928). Considérons un carré C et un rectangle R dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Si R n'est pas un carré, il est impossible de trouver une application conforme de C dans R qui envoie les côtés de C sur ceux de R. H. Grötzsch se demandait quelle est l'application la plus conforme possible qui peut réaliser cette représentation. Le lecteur aura deviné que la réponse est : une application quasiconforme. Avant d'exhiber des définitions plus précises, essayons de donner une idée intuitive de ce qu'est une telle application. Une application quasiconforme (entre deux domaines de $\mathbb{C}$) envoie infinitésimalement un faisceau de cercles concentriques sur un faisceau d'ellipses concentriques (qui ne sont pas forcément de la même taille que les cercles initiaux) dont on contrôle uniformément (au sens où cela ne dépend pas du centre des cercles initiaux) l'excentricité (alors que les applications conformes envoient infinitésimalement des cercles sur des cercles). Comme l'écrit Ahlfors dans l'introduction de son livre, les applications quasiconformes sont moins rigides que les applications conformes et plus faciles à manipuler (d'où de nombreuses applications à divers domaines des mathématiques) tout en ayant des propriétés similaires. De plus, leur généralisation à la dimension supérieure (et aussi dans des cas généraux abstraits) se fait très bien comme nous allons le voir plus tard, ce qui n'est pas le cas pour les applications conformes. Notons que le livre d'Ahlfors ne traite que des applications quasiconformes entre domaines de $\mathbb{C}$ dans la mesure où la théorie dans les espaces euclidiens de dimension supérieure n'en est alors qu'à ses balbutiements.

Nous allons maintenant donner une première définition des applications quasiconformes (QC) qui ne se trouve pas dans le livre d'Ahlfors, mais qui traduit bien l'idée intuitive précédente. Elle a aussi l'intérêt de pouvoir s'énoncer dans le cadre général des espaces métriques.

La définition métrique. Considérons un homéomorphisme $f : X \to Y$ entre deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y). En tout point $x \in X$, nous définissons

$$L_f(x,r) = \sup\{d_Y(f(y), f(x)); d_X(x,y) \leqslant r\}$$

et $l_f(x,r) = \inf\{d_Y(f(y), f(x)); d_X(x,y) \geqslant r\}$, puis nous considérons l'excentricité $H_f(x) = \limsup_{r\to 0} \dfrac{L_f(x,r)}{l_f(x,r)}$. Nous dirons que f est K-quasiconforme si $H_f(x) \leqslant K$ pour tout $x \in X$. Il faut noter que si X et Y sont des domaines de $\mathbb{R}^n$, nous pouvons remplacer lim sup par lim inf dans la définition de H_f ou demander qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $L_f(x,r)/l_f(x,r) \leqslant M$ pour tout x et tout r (on parle alors d'application quasisymétrique, voir plus bas), et nous obtenons des définitions équivalentes de la quasiconformité. Il existe une autre notion, globale et a priori plus forte, que nous avons déjà évoquée un peu plus haut. Nous allons la définir dans un cadre général. Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme entre deux espaces métriques. Nous dirons que f est quasisymétrique s'il existe un homéomorphisme $\eta : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ tel que si x, y $z \in X$ et $t > 0$, alors

$$d_X(x,y) \leqslant t d_X(x,z) \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) \leqslant \eta(t) d_Y(f(x), f(z)).$$

Si X et Y sont deux domaines de $\mathbb{R}^n$, cette définition est (encore une fois !) équivalente à la quasiconformité.

Dans les deux premiers chapitres de son livre, L. Ahlfors donne trois définitions de ce qu'est une application quasiconforme entre domaines du plan complexe. Un point important est que les applications quasiconformes admettent des définitions équivalentes de nature très différente (analytique, géométrique ou métrique). Ce fut un long travail d'étendre ces définitions (et de démontrer leur équivalence) à $\mathbb{R}^n$, puis aux groupes de Carnot et enfin aux espaces métriques à géométrie bornée (espaces de Loewner). Nous en discuterons dans la suite même si cela n'est pas évoqué dans le livre d'Ahlfors.

La définition de Grötzsch. Soit f une application de classe C^1 entre deux domaines de $\mathbb{C}$. On définit sa dilatation en un point par la formule :

$$D_f = \frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|}$$

où, $f_z = 1/2\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ et $f_{\overline{z}} = 1/2\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Notons que D_f est toujours supérieur à 1 et que si f est conforme, $D_f = 1$ en tout point. La dilatation D_f correspond à l'excentricité H_f définie plus haut. L'application f est dite K-quasiconforme si $D_f \leqslant K$ en tout point. Une application est ainsi conforme si et seulement si elle est 1-quasiconforme. Ahlfors donne ensuite quelques propriétés des applications quasiconformes, en particulier liées à la notion de longueur extrémale que nous allons introduire maintenant. Soit Γ une famille de courbes. Une fonction mesurable $\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ est dite admissible si $A(\rho) = \int\int \rho^2 dxdy$ n'est ni nulle, ni infinie. Pour une courbe γ, posons $L_\gamma(\rho) = \int_\gamma \rho|dz|$. Enfin, considérons $L(\rho) = \inf_{\gamma\in\Gamma} L_\gamma(\rho)$. Alors, la longueur extrémale de Γ est

$$\lambda(\Gamma) = \sup \frac{L(\rho)^2}{A(\rho)}$$

où le supremum est pris sur toutes les fonctions admissibles ρ. Cette définition peut sembler bien mystérieuse. Supposons que Γ soit l'ensemble des courbes joignant deux côtés opposés de longueur a dans un rectangle fermé dont la longueur de l'autre côté est b. Alors, $\lambda(\Gamma) = a/b$. Supposons maintenant que Γ soit l'ensemble des courbes joignant deux cercles concentriques de rayons $R_1 < R_2$. Alors, $\lambda(\Gamma) = (1/2\pi)\log(R_2/R_1)$. D'un autre côté, si Γ est l'ensemble des courbes séparant deux cercles concentriques de rayons $R_1 < R_2$ (en ne faisant qu'un seul tour), c'est-à-dire une famille « transverse » à la précédente, alors $\lambda(\Gamma) = 2\pi/\log(R_2/R_1)$. Cette quantité s'appelle le module de Γ et aussi de l'anneau $\{z \in \mathbb{C}; R_1 < |z| < R_2\}$. Nous reviendrons sur ceci plus tard. Si toutes les courbes de la famille Γ restent dans un domaine Ω et si $f : \Omega \to \Omega'$ est K-quasiconforme, alors

$$K^{-1}\lambda(\Gamma) \leqslant \lambda(f(\Gamma)) \leqslant K\lambda(\Gamma).$$

Fred Gehring, qui avant d'être un expert en applications quasiconformes fut un ingénieur, adore faire l'analogie suivante avec la physique. Si Γ est une famille de fils électriques homogènes, la longueur extrémale de Γ est la résistance du système. Celle-ci est grande si les fils sont longs ou peu nombreux, petite si les fils sont courts ou nombreux.

Les deux prochaines définitions vont être valables pour des applications qui ne sont pas de classe C^1. Ceci est un point important, car en se débarrassant de cette régularité a priori, nous pouvons obtenir des propriétés de compacité des applications quasiconformes.

La définition géométrique. Un quadrilatère Q dans un domaine Ω est un domaine de Jordan bordé par 4 points distincts et dont l'adhérence $\overline{Q}$ est dans Ω. Nous pouvons envoyer Q de façon conforme sur un rectangle de longueur de côté $a < b$. Le module $m(Q)$ de Q est alors b/a. Un homéomorphisme préservant l'orientation f

entre deux domaines Ω et Ω' de $\mathbb{C}$ est K-quasiconforme si pour tout quadrilatère Q de Ω, nous avons

$$K^{-1}m(Q) \leqslant m(f(Q)) \leqslant Km(Q). \tag{1}$$

Si f est C^1, cette définition est équivalente à celle de Grötszch. Il est aussi facile de voir que si f est QC, il en est de même de f^{-1} et que la composée de deux applications QC est QC. En fait, cette définition (qui est suggérée dans un article de Pfluger en 1950) est due à Ahlfors en 1954 et dans cet article, il donne toutes les propriétés élémentaires des applications QC (par exemple un principe de réflexion de Schwarz qui est discuté aussi dans son livre) en seulement 9 pages ...

Comment étendre cette définition pour des applications entre domaines de $\mathbb{R}^n$? Nous devons donner une autre définition du module. Étant donnée une famille de courbes Γ dans $\mathbb{R}^n$, le module de Γ est $\mathrm{mod}(\Gamma) = \inf_\rho \int_{\mathbb{R}^n} \rho^n dx$ où l'infimum est pris sur toutes les fonctions mesurables $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ qui vérifient $\int_\gamma \rho ds \geqslant 1$ pour toute courbe rectifiable γ dans Γ. Par exemple, le module de la famille des courbes joignant deux cercles concentriques de rayons $R_1 < R_2$ est $1/2\pi \log(R_2/R_1)$, c'est-à-dire l'inverse de la longueur extrémale. Par analogie, la longueur extrémale d'une famille Γ de courbes de $\mathbb{R}^n$ peut être définie par $\lambda(\Gamma) = \mathrm{mod}(\Gamma)^{1/(1-n)}$. Un homéomorphisme $f : \Omega \to \Omega'$ entre deux domaines de $\mathbb{R}^n$ est dit quasiconforme s'il quasi-préserve uniformément le module des familles de courbes de Ω comme dans (1). Notons que le module définit une mesure extérieure sur l'ensemble des courbes. Un condenseur est la donnée de deux continua (c'est-à-dire des ensembles compacts, connexes du plan) disjoints et non dégénérés. La capacité $\mathrm{cap}(E, F)$ de ce condenseur est le module de la famille de courbes joignant E à F. D'après ce que nous avons écrit plus haut sur la longueur extrémale, la capacité $\mathrm{cap}(E, F)$ se comporte comme une fonction décroissante de la distance relative $d(E, F)/\min(\mathrm{diam}E, \mathrm{diam}F)$. Il est possible de définir la capacité d'un condenseur dans un espace métrique et cet espace sera un espace de Loewner si le comportement de la capacité est le même que celui décrit précédemment. Les espaces de Loewner semblent être le bon cadre, depuis les travaux de J. Heinonen et P. Koskela, pour développer une théorie des applications quasiconformes entre espaces métriques.

La définition analytique. Nous dirons qu'une application est ACL (absolutely continuous on lines) dans un domaine Ω de $\mathbb{C}$ si pour tout rectangle fermé $R \subset \Omega$ dont les côtés sont parallèles aux axes, f est absolument continue le long de presque tout segment horizontal ou vertical contenu dans R. Un homéomorphisme f entre deux domaines Ω et Ω' de $\mathbb{C}$ est K-quasiconforme si f est ACL dans Ω et $|f_{\bar{z}}| \leqslant k|f_z|$ (où $k = (K-1)/(K+1)$) presque partout dans Ω. Ahlfors démontre que cette définition coïncide avec la définition géométrique précédente. La condition ACL peut paraître surprenante, mais si f a des dérivées partielles (au sens des distributions) qui sont localement intégrables, alors f est ACL. Voyons comment étendre cette définition aux applications entre domaines de $\mathbb{R}^n$. Un homéomorphisme $f : \Omega \to \Omega'$ entre deux domaines de $\mathbb{R}^n$ est K-quasiconforme si les dérivées premières partielles de f (au sens des distributions) sont dans l'espace L^n (c'est-à-dire f est dans l'espace de Sobolev $W^{1,n}$) et la matrice jacobienne $Df = (\partial_{x_i})f_j$ vérifie $\sup_{||h||=1} |Df(x)(h)|^n \leqslant K det Df(x)$ pour presque tout

$x \in D$. Nous laissons le soin au lecteur de se convaincre que toutes les définitions données suivent la même philosophie : une application est quasiconforme si nous pouvons contrôler uniformément sa distorsion (de façon métrique, géométrique ou analytique). Cependant, nous insistons sur le fait que démontrer l'équivalence de ces définitions est très difficile et a été un des grands challenges de la théorie.

Le chapitre 3 traite de problèmes géométriques extrémaux. Ahlfors démontre le théorème de Mori : si f est une application K-quasiconforme du disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$ dans lui-même (normalisée par $f(0) = 0$), alors, pour tout couple de points distincts z_1, z_2 de $\mathbb{D}$, $|f(z_1) - f(z_2)| < 16|z_1 - z_2|^{1/K}$, la constante 16 étant optimale. Il en déduit un théorème de compacité pour les applications quasiconformes du disque unité sur lui-même et que si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est K-quasiconforme, alors f s'étend en un homéomorphisme du disque unité fermé. Le problème d'extension des applications QC est d'ailleurs le sujet principal du chapitre 4. Quitte à composer par des applications conformes, nous pouvons nous ramener au cas des applications QC du demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ sur lui-même. Nous dirons qu'une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie la condition M si pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $t > 0$,

$$M^{-1} \leqslant \frac{h(x+t) - h(x)}{h(x) - h(x-t)} \leqslant M.$$

Cette condition est de type « quasisymétrique » comme expliquée plus haut. Si $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ est K-quasiconforme, alors f s'étend au bord de $\mathbb{H}$ en une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie la condition M pour un M explicite, dépendant de K. Réciproquement, toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie la condition M est l'extension au bord de $\mathbb{H}$ d'une application K-quasiconforme $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ où K dépend de M. En fait, f est une quasi-isométrie du demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ muni de sa métrique hyperbolique. Ce résultat reste vrai en dimensions supérieures et il est un des points clés de la démonstration de G. D. Mostow de son célèbre théorème de rigidité. A la suite, des versions ont même été données dans des espaces hyperboliques au sens de Gromov. Ce qui a permis d'obtenir des théorèmes de rigidité dans des cadres variés (espaces symétriques non compacts de rang 1 ou immeubles hyperboliques par exemple). Si $f : \Omega \to \Omega$ est K-quasiconforme (au sens géométrique par exemple), alors f est différentiable presque partout et sa dilatation complexe $\mu_f = \frac{f_{\overline{z}}}{f_z}$ est mesurable et satisfait $|\mu_f| \leqslant k = (K-1)/(K+1)$ presque partout dans Ω. Dans le chapitre 5, Ahlfors démontre ce qui est connu sous le nom de théorème de Riemann mesurable. Si μ est une fonction mesurable (complexe) avec $|\mu| \leqslant k < 1$ presque partout, alors il existe une solution de l'équation de Beltrami $f_{\overline{z}} = \mu f_z$ qui est quasiconforme. Cette démonstration (inspirée de Bojarski) utilise la théorie (en plein développement à l'époque) des intégrales singulières de Calderòn et Zygmund. Ensuite, Ahlfors explicite la dépendance de la solution f^μ de la solution de l'équation de Beltrami en fonction de μ. Enfin, le chapitre 6 est une introduction à la théorie de Teichmüller, qui semble être la motivation d'Ahlfors pour étudier les applications QC. Rappelons de quoi il est question. Soit S_0 une surface de Riemann dont le revêtement universel est conformément isomorphe au demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ de $\mathbb{C}$. Une telle surface est hyperbolique. Nous dirons qu'une application quasiconforme $f : S_0 \to S_0$ est triviale si elle admet un relevé $\tilde{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ qui fixe point par point la droite réelle achevée. Soit S_i $(i = 1, 2)$ une surface de Riemann et $f_i : S_0 \to S_i$ $(i = 1, 2)$ une application quasiconforme. Nous dirons que deux paires (S_1, f_1) et (S_2, f_2) sont équivalentes s'il existe une application conforme $g : S_1 \to S_2$ telle que $f_2^{-1} \circ g \circ f_1$ est triviale au sens précédent. L'espace de Teichmüller $T(S_0)$ de la surface de Riemann S_0 est alors l'espace des classes d'équivalence de toutes ces paires. Cette définition, due à Bers, est plus générale que celle donnée par Ahlfors. On peut la trouver dans le chapitre écrit par Earle et Kra, dans lequel ils expliquent comment modifier les arguments du livre d'Ahlfors. On définit ensuite sur cet espace la distance de Teichmüller par :

$$d_T(t_1, t_2) = 1/2 \log K$$

où K est le plus petit nombre tel que $f_2^{-1} \circ f_1$ soit K-quasiconforme pour des paires $(S_1, f_1) \in t_1$ et $(S_2, f_2) \in t_2$. Alors, $(T(s_0), d_T)$ est un espace métrique complet. En utilisant des résultats des chapitres précédents, Ahlfors étudie les propriétés de $T(S_0)$ et en particulier, il démontre que $T(S_0)$ possède une structure de variété complexe.

Nous sommes nombreux à avoir appris la théorie des applications quasiconformes par la lecture de la première édition du livre d'Ahlfors. Le succès de ce livre vient peut-être du fait que, tout en étant court, il traite de façon rigoureuse des diverses facettes des applications QC. Depuis 1964, cette théorie a connu de nombreux développements, et ce dans des domaines très divers des mathématiques. Les trois chapitres ajoutés décrivent certains de ces prolongements. Le premier, par Earle et Kra, discute des progrès récents concernant essentiellement la théorie de Teichmüller (les cinq premières pages concernent plutôt des extensions de résultats donnés au début du livre d'Ahlfors). Le second par M. Shishikura explique l'apport, depuis les travaux de D. Sullivan, des applications quasiconformes en dynamique holomorphe. Enfin, le troisième par J.H. Hubbard décrit comment les applications quasiconformes peuvent jouer un rôle dans l'étude de la géométrie des variétés de dimension 3. Les deux premiers de ces chapitres sont plutôt des survols avec une longue bibliographie. Dans le troisième, Hubbard esquisse une preuve du théorème d'hyperbolisation de Thurston pour les variétés fibrées. Ce livre d'Ahlfors reste un livre de référence, même s'il ne traite que des applications QC dans le plan complexe. Dans la mesure où il permet de bien comprendre la théorie dans ce cadre, il est une excellente introduction à la théorie des applications quasiconformes et de ses utilisations (grâce aux appendices), et s'adresse à tous ceux, étudiants ou chercheurs confirmés, qui souhaitent s'initier à cette théorie. La lecture de ce livre permet d'aborder plus facilement des ouvrages plus récents comme par exemple *Quasiconformal Mappings in the Plane*, O. Lehto et K.I. Virtanen, Springer (1973), *Lectures on n-Dimensionnal Quasiconformal Mappings*, J. Väisälä, Springer (1971), *Quasiregular Mappings*, S. Rickman, Springer (1993), *Lectures on analysis on metric spaces*, J. Heinonen, Springer (2001). Le lecteur attentif aura noté que tous ces auteurs, comme Ahlfors, sont finlandais et donc que les applications quasiconformes sont bien, depuis Ahlfors, une spécialité finlandaise.

Je dédie modestement ces quelques lignes à Adrien Douady. Il aurait bien mieux parlé que moi du livre d'Ahlfors (et des finlandais !). Mais, malheureusement, il n'est plus là pour le faire.

Hervé Pajot,
Institut Fourier, Grenoble

Les impasses de la démocratisation scolaire. Sur une prétendue crise des vocations scientifiques
Bernard Convert
Raison d'Agir, 2006. 93 p. ISBN : 2912107334. 6 €

Le mode d'esprit scientifique n'est pas naturel ; plutôt que de chercher à déconstruire les apparences, il est plus simple et plus réconfortant d'admettre les évidences qui se présentent à nous, et de penser que la terre est plate, puisque ça se voit. C'est particulièrement visible quand les scientifiques sortent de leur domaine, et, agressés par des changements qui les touchent directement, tentent d'analyser l'univers qui les entourent. On les voit alors perdre la rigueur critique qu'ils manifestent dans leur profession, et accepter des raccourcis simples et évidents : puisque les inscriptions pour les études de sciences baissent en France, en Allemagne et aux USA, c'est qu'il y a une crise mondiale des sciences ; et si les étudiants ne s'inscrivent plus en sciences, c'est parce qu'ils n'aiment plus la science. Pourquoi n'aiment-ils plus la science ? pour plein de raisons : Tchernobyl, la vache folle, la pollution ; parce que ça eût payé, mais que ça ne paye plus ; parce que c'est trop difficile... Que faire pour qu'ils aiment la science à nouveau ? La réponse est dans la question : il suffit de la rendre aimable. Mettons la main à la pâte, et les étudiants se précipiteront en foule dans les amphis. Faisons une option de physique au lycée, et nous remplirons les licences de physique. Et si ça ne marche pas, c'est qu'on n'en a pas fait assez ; demandons moins de maths, ajoutons une épreuve de calcul sur machine pour s'adapter au monde moderne, formons mieux les profs, et ça finira forcément par marcher. Chaque année, un nouveau rapport (Ourisson, Porchet, Dercourt, Rolland, OCDE...) s'ajoute à la pile, et conforte les arguments : qui oserait contredire un raisonnement repris par des gens aussi prestigieux ? Et qu'importe qu'ils soient physiciens ou géologues, mais jamais spécialistes (ou compétents) sur le sujet dont ils parlent, c'est-à-dire les comportements des élèves et leurs motivations ?

Malheureusement, on fait cela depuis dix ans, et les remèdes ne connaissent aucun succès, au contraire. Le premier effondrement du DEUG de physique est exactement contemporain de la création de la spécialité physique en terminale qui devait l'alimenter.

Bernard Convert est sociologue ; il a commencé à travailler sur le sujet il y a 10 ans, pour comprendre la soudaine chute des inscriptions en sciences dans son université. Il publie cet automne un petit livre (moins de 100 pages) où il reprend l'essentiel de son travail sur ce thème. Il met en pièce l'argumentation développée dans le premier paragraphe, en s'appuyant sur des enquêtes auprès des lycéens, et sur une étude minutieuse des réalités sociologiques. Non, il n'y a pas de crise des vocations scientifiques en France : il y a une crise des formations universitaires générales non professionnalisées, qui prend un tour plus aigu en sciences pour des raisons bien précises. Non, il n'y a pas de crise mondiale : la situation est complètement différente entre la France, l'Allemagne et l'Italie, et c'est une coïncidence particulière à la fin des années 90 qui a pu laisser croire le contraire ; d'ailleurs, les inscriptions remontent en Allemagne. Ailleurs dans le monde, c'est encore plus varié, et cela dépend à la fois des pays et des disciplines. Non, les lycéens de terminale scientifique n'ont pas une mauvaise image de la science : ils en ont une image bien plus positive que celle que j'ai ! Quand on leur demande, dans une liste de 12 professions, celles qui les intéressent, la profession qui les intéressent le plus est celle de chercheur (62,9%), suivie par médecin (57,6%), ingénieur en informatique (43,9%) ; l'avant-dernière est expert financier (18,9%) ; comment peut-on espérer améliorer encore une opinion aussi positive, quand les élèves pensent à plus de 90% que la science améliore le monde et contribue au développement ?

Et pourtant, ils ne viennent pas en fac. de science, et Bernard Convert explique bien pourquoi. Il montre pourquoi l'afflux des années 80 était dû bien plus à l'incapacité des filières sélectives à accueillir l'accroissement énorme du nombre de bacheliers qu'à un choix positif. Il montre aussi comment la tentative de démocratiser la filière C a échoué, en reconstruisant une filière d'élite, la spécialité maths, aussi sélective, mais deux fois plus petite, et plus dissimulée (sauf de ceux qui savent). Il donne une analyse remarquable de l'effet de la création de la filière physique, qui a donné le résultat exactement inverse de celui voulu par ses créateurs.

Je recommande très vivement ce livre à tous ceux qui essaient de réfléchir sur l'avenir des filières universitaires, il y trouveront des faits et des considérations qui sont généralement absents de tous les rapports habituels, et des journaux dits d'information, et qui me semblent expliquer beaucoup plus de choses que les platitudes habituelles sur l'image de la science et la perte du sens de l'effort. Une telle quantité d'idées reçues dynamitées en moins de 100 pages, et pour 6 euros, c'est une occasion à saisir de suite !

La conclusion du livre est intitulée « l'impuissance des remèdes pédagogiques ». Cela ne condamne bien sûr pas nos efforts : c'est notre devoir, en tant qu'enseignants, d'améliorer nos cours, de réfléchir à la pédagogie (et j'ajouterai, en tant qu'ancien élève qui s'est ennuyé comme un rat mort au fond de bien des cours de maths ou d'autres matières, que c'est une question de simple respect humain envers nos élèves de rendre nos cours plus intéressants), et nous devons faire le possible pour améliorer l'efficacité de nos enseignements et de notre transmission du savoir. Mais il ne faut pas croire qu'en faisant cela, nous résoudrons la crise provoquée par la chute des inscriptions en université : comme le montre Bernard Convert, cette chute dépend d'autres facteurs, de nature profondément politique.

Une dernière remarque, en forme de regret : comme le montre très bien Convert, les formations qui tirent leur épingle du jeu aujourd'hui sont les formations professionnalisées, qui conduisent à un métier : médecin, ingénieur. Or il y a un métier pour lequel la seule voie d'accès est l'université, c'est celui d'enseignant. Comment se fait-il que nous n'arrivions pas, ou mal, à faire reconnaître le caractère professionnel des formations dans ce domaine ? Je hasarderai une réponse, que le lecteur pourra facilement mettre à l'épreuve : quand on émet l'idée, dans une réunion d'organisation de licence ou de master, qu'on pourrait envisager que ce diplôme forme entre autres des enseignants, il se trouve toujours quelqu'un pour répondre, avec l'assentiment général, qu'il ne faut pas restreindre le diplôme à la formation des enseignants, et qu'il faut avoir d'autres ambitions (implicitement considérées comme plus prestigieuses). Vouloir devenir prof, c'est considéré comme un manque d'ambition, et un quasi-échec ; croyez-vous que les étudiants ne le sentent pas ?

Pierre Arnoux,
IML, Marseille