MATHÉMATIQUES

La preuve originale de S. Mazur pour son théorème sur les algèbres normées

Pierre Mazet[1]

1. Introduction

Théorème 1. *Toute $\mathbb{C}$-algèbre normée qui est un corps est isomorphe au corps des nombres complexes.*

C'est une version classique d'un énoncé connu sous le nom de Théorème de Gelfand-Mazur.

Historiquement le premier énoncé de ce type est celui de Stanislaw Mazur publié dans les *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques* [9] daté du 25 juin 1938 sous la forme :

Théorème 2. *Si, dans un anneau linéaire $\mathfrak{A}$, une norme est définie satisfaisant – outre des conditions habituelles – à la condition $\|A.B\| = \|A\|.\|B\|$, l'anneau $\mathfrak{A}$ équivaut (c.-à-d. peut être représenté en conservant les opérations et la norme) soit au corps des nombres réels, soit à celui des nombres complexes, soit au corps des quaternions réels ; si $\mathfrak{A}$ est un corps (non nécessairement commutatif) et la norme satisfait à la condition plus faible $\|A.B\| \leqslant \|A\|.\|B\|$, il est isomorphe (c.-à-d. représentable homéomorphiquement avec conservation des opérations) à un des trois corps mentionnés.*

Ces résultats sont repris sous une forme légèrement différente dans une note aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* du 28 novembre 1938 [1] où l'on trouve :

Théorème 3. *Chaque domaine de rationalité du type (B^*) est isomorphe au domaine de rationalité des nombres réels, des nombres complexes ou des quaternions.*

(Dans la terminologie de Mazur, un domaine de rationalité est une $\mathbb{R}$-algèbre qui est un corps ; elle est dite de type B^* lorsqu'elle est munie d'une norme d'algèbre.)

En restreignant cet énoncé au cas des $\mathbb{C}$-algèbres on obtient immédiatement l'énoncé 1

Peu de temps après, Israil Moiseevic Gelfand dans une note aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS* du 27 mars 1939 [2] présente son programme d'études des $\mathbb{C}$-algèbres normées et énonce :

[1] Université Pierre et Marie Curie, Institut de mathématiques de Jussieu (UMR 7586)

Théorème 4. *The ring of residues to a maximal ideal is the corpus of complex numbers.*

Ce qui est équivalent à l'énoncé 1.

Si ces notes contiennent les énoncés indiqués, elles ne contiennent aucune preuve. Toutefois la note de Gelfand annonce la parution de la démonstration des énoncés dans le Recueil Mathématique de Moscou.

Effectivement en 1941, dans son article fondateur de la théorie des algèbres normées, Gelfand [3] donne tous les développements annoncés dans la note [2] et, en particulier, la preuve du théorème 4. Cette preuve, particulièrement élégante, s'appuie sur la théorie des fonctions holomorphes et le théorème de Liouville.

Parallèlement, Mazur ne publie aucune preuve de son énoncé et, à ma connaissance, il faut attendre le livre [6] ([7] pour une version en anglais) de W. Zelazko (élève de S. Mazur) en 1968 pour lire la preuve originale de Mazur telle qu'il la lui a transmise. Cette preuve, comme celle de Gelfand, s'appuie sur le théorème de Liouville. La différence fondamentale est que, l'énoncé de Mazur étant dans le cadre des algèbres réelles, on y considère la partie réelle de $\dfrac{1}{X-\lambda}$ et des fonctions harmoniques alors que Gelfand considère $(x-\lambda e)^{-1}$ et des fonctions holomorphes.

La preuve de Mazur est donc tout aussi élégante que celle de Gelfand, c'est pourtant cette dernière qui est restée la preuve la plus utilisée pour démontrer l'énoncé 1. Il est d'ailleurs curieux de constater que, en 1987, dans sa note [5] sur les contributions de Mazur à l'analyse fonctionnelle, G. Köthe mentionne le théorème 3 mais cite immédiatement Gelfand pour la preuve de l'énoncé. De même, en 1991, dans l'article de [10] ([11] pour une version anglaise et [8] pour une version française) consacré aux théorèmes de Hopf et de Gelfand-Mazur, R. Remmert dit : *« Si Hopf avait eu connaissance en 1940 de la note aux* Comptes Rendus *de Mazur ; il aurait sans aucun doute démontré ce théorème »* . On a donc l'impression que l'absence d'une preuve par Mazur de son énoncé créait un manque réel comblé par Gelfand quelques années plus tard. Peut-être même certains mathématiciens ont douté que Mazur ait effectivement obtenu une preuve complète de son énoncé. Nous allons voir que cette preuve existait bien et comment elle a pu être retrouvée.

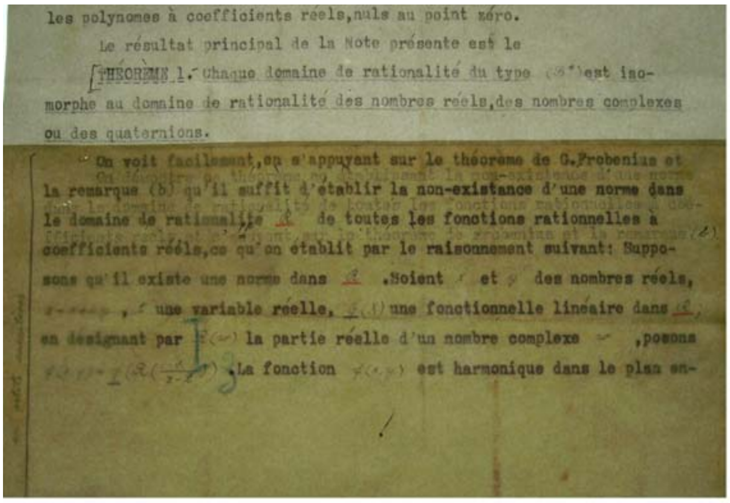
2. La preuve de Mazur retrouvée

C'est pour répondre à une question demandant une preuve élémentaire du théorème de Gelfand-Mazur que j'ai voulu trouver la preuve originelle de Mazur. Constatant qu'elle n'avait jamais été publiée j'ai essayer de retrouver dans les livres une explication à cette absence de publication. c'est alors que j'ai été intrigué par une note en bas de page dans le livre [6] de W. Zelazko. Le livre étant rédigé en polonais (j'ignorais alors l'existence de la version anglaise [7]), je n'ai pas réalisé tout de suite qu'il comportait la preuve transmise par Mazur à Zelazko. C'est donc en faisant traduire cette note en bas de page que j'ai appris que le manuscrit original de S. Mazur comportait la démonstration mais que celle-ci avait dû être supprimée car la première version de la note avait été jugée trop longue.

Afin d'approfondir ce point j'ai demandé à C. Gilain d'aller voir aux archives de l'académie des sciences de Paris sous quelle forme était le manuscrit originel de Mazur. C'est ainsi qu'il a découvert qu'immédiatement après l'énoncé principal (théorème 3) le manuscrit était caché par une feuille de papier collée qui recouvrait toute la démonstration et sur laquelle se trouve la petite phrase que l'on trouve actuellement dans la note indiquant très succinctement la démarche :

On démontre ce théorème en établissant la non-existence d'une norme dans le domaine de rationalité de toutes les fonctions rationnelles à coefficients réels, et en s'appuyant sur le théorème de Frobenius et la remarque b.

Heureusement, les feuilles de papier utilisées sont suffisamment fines pour que l'on puisse lire les parties cachées par transparence. On trouvera ci-dessous les photos des zones concernées ; la démonstration cachée apparaît dans les parties plus foncées de la photo qui sont vues par transparence. La phrase indiquée précédemment apparaît en plus clair par dessus le texte de la preuve dans la première photo.

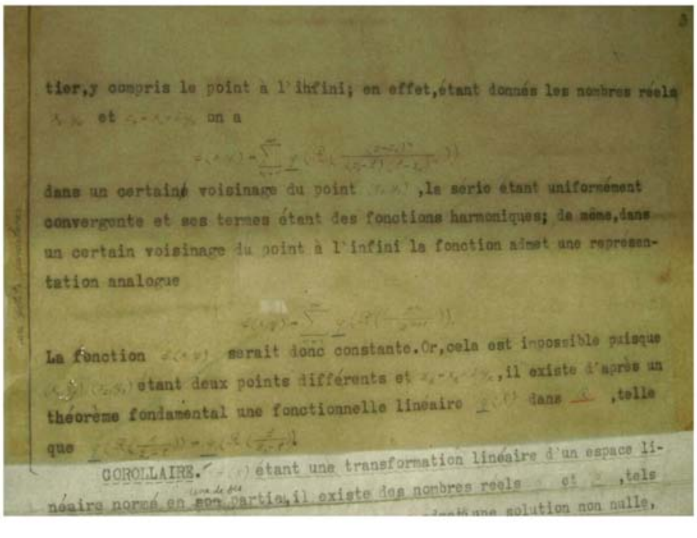


les polynomes à coefficients réels, nuls au point zéro.

Le résultat principal de la Note présente est le

THÉORÈME 1. Chaque domaine de rationalité du type [illegible] est isomorphe au domaine de rationalité des nombres réels, des nombres complexes ou des quaternions.

On voit facilement, en s'appuyant sur le théorème de G. Frobenius et la remarque (b) qu'il suffit d'établir la non-existance d'une norme dans le domaine de rationalité [illegible] de toutes les fonctions rationnelles à coefficients réels, ce qu'on établit par le raisonnement suivant: Supposons qu'il existe une norme dans [illegible]. Soient [illegible] et [illegible] des nombres réels, [illegible], [illegible] une variable réelle, [illegible] une fonctionnelle linéaire dans [illegible], en désignant par [illegible] la partie réelle d'un nombre complexe [illegible], posons [illegible]. La fonction [illegible] est harmonique dans le plan en-



tier, y compris le point à l'infini; en effet, étant donnés les nombres réels [illegible] et [illegible] on a

[illegible]

dans un certain voisinage du point [illegible], la série étant uniformément convergente et ses termes étant des fonctions harmoniques; de même, dans un certain voisinage du point à l'infini la fonction admet une représentation analogue

[illegible]

La fonction [illegible] serait donc constante. Or, cela est impossible puisque [illegible] étant deux points différents et [illegible], il existe d'après un théorème fondamental une fonctionnelle linéaire [illegible] dans [illegible], telle que [illegible]

COROLLAIRE. [illegible] étant une transformation linéaire d'un espace linéaire normé en son partie, il existe des nombres réels [illegible] et [illegible], tels [illegible] une solution non nulle, On pourra noter sur la marge gauche l'inscription verticale « en petits caractères ». Il s'agit probablement d'une tentative de S. Mazur pour raccourcir le manuscrit sans faire disparaître la preuve.

Voici donc le texte de cette preuve :

On voit facilement en s'appuyant sur le théorème de G. Frobenius et la remarque (b) qu'il suffit d'établir la non-existence d'une norme dans le domaine de rationalité $\mathcal{R}$ de toutes les fonctions rationnelles à coefficients réels, ce qu'on établit par le raisonnement suivant : supposons qu'il existe une norme dans $\mathcal{R}$. Soient x et y des nombres réels, $z = x + iy$, t une variable réelle, $\varphi(X)$ une fonctionnelle linéaire dans $\mathcal{R}$; en désignant par $\mathcal{R}(w)$ la partie réelle d'un nombre complexe w, posons $f(x, y) = \varphi(\Big(\mathcal{R}(\frac{1}{z-t})\Big)$. La fonction $f(x, y)$ est harmonique dans le plan entier, y compris le point à l'infini ; en effet, étant donnés les nombres réels x_0, y_0 et $z_0 = x_0 + iy_0$ on a

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\Big(\mathcal{R}\big(\frac{(z-z_0)^n}{(z_0-t)(t-z_0)^n}\big)\Big)$$

dans un certain voisinage du point (x_0, y_0), la série étant uniformément convergente et ses termes étant des fonctions harmoniques ; de même dans un certain voisinage du point à l'infini la fonction admet une représentation analogue

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\Big(\mathcal{R}\big(\frac{t^n}{z^{n+1}}\big)\Big) \ .$$

La fonction $f(x, y)$ serait donc constante. Or cela est impossible puisque $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ étant deux points différents et $z_k = x_k + iy_k$, il existe d'après un théorème fondamental une fonctionnelle linéaire $\varphi(X)$ dans $\mathcal{R}$ telle que

$$\varphi\Big(\mathcal{R}\big(\frac{1}{z_1-t}\big)\Big) \neq \varphi\Big(\mathcal{R}\big(\frac{1}{z_2-t}\big)\Big) \ .$$

On notera d'ailleurs une légère erreur dans ce manuscrit puisque la sommation dans les développements en série indiqués doit être faite pour n allant de 0 à l'infini et non de 1 à l'infini.

3. Commentaires sur les énoncés de Mazur et de Gelfand et sur les preuves respectives.

Bien que très voisins, les énoncés de Mazur et de Gelfand relèvent de préoccupations différentes. Le travail de Mazur est dans la lignée du théorème de G. Frobenius [4] qui affirme essentiellement que les seuls corps qui soient des $\mathbb{R}$-algèbres de dimension finie sont, à isomorphisme près, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{H}$. On trouvera d'ailleurs une intéressante étude sur les problèmes de ce type dans l'article de R. Remmert de [10] (ou [11] ou [8]).

En fait G. Frobenius montre que les corps mentionnés sont les seules $\mathbb{R}$-algèbres sans diviseur de 0 qui ne possèdent pas d'élément transcendant (ce qui s'applique évidemment aux corps de dimension finie). Le but de Mazur est d'étendre ce résultat en remplaçant l'hypothèse « de dimension finie » par l'hypothèse « normée ». Tout revient donc à prouver qu'il n'y a pas de norme d'algèbre sur le corps $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles à coefficients réels. L'étude se place donc délibérément dans le cadre des scalaires réels.

De son côté, Gelfand souhaite montrer qu'il y a correspondance biunivoque entre les idéaux maximaux d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach et ses caractères (c'est-à-dire les morphismes de cette algèbre vers $\mathbb{C}$). Le contexte est donc celui des $\mathbb{C}$-algèbres de Banach. Ce contexte permet alors de développer la théorie des fonctions holomorphes de $\mathbb{C}$ vers une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach et d'obtenir la preuve que nous connaissons. Cette preuve est alors très rapide mais suppose des préliminaires sur la théorie des fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach, ce qui prend plusieurs pages dans l'article de Gelfand. La preuve de Mazur paraît donc sensiblement plus rapide. On doit cependant noter qu'elle est très succincte au niveau des justifications. Il suffit, pour s'en convaincre de voir la preuve détaillée présentée par Zelazko dans [6] ou [7].

Il faut par ailleurs remarquer que le fait que les espaces normés considérés par Gelfand sont complets est utile pour définir la notion de fonction holomorphe alors que la preuve de Mazur montre que cette hypothèse de complétude est inutile (il est d'ailleurs facile de déduire les cas général à partir du cas des algèbres complètes). On peut donc dire que, si le cadre utilisé par Gelfand lui permet une preuve particulièrement élégante, celui de Mazur consistant à prouver la non existence d'une norme d'algèbre sur $\mathbb{R}(X)$ permet d'expliciter plus clairement le fond du problème.

La similitude des deux preuves peut donner à penser qu'il y a eu un échange entre Mazur et Gelfand mais je n'ai pas pu élucider ce point.

Il est par ailleurs intéressant de noter que les deux preuves font appel au théorème de Hahn-Banach et donc à l'axiome du choix pour appliquer le théorème de Liouville à des fonctions à valeurs scalaires. Plus précisément, Mazur fait référence à « un théorème fondamental » sans le citer plus explicitement tandis que Gelfand invoque un « théorème de Hahn ». Il est cependant facile de contourner cette utilisation de l'axiome du choix en utilisant le théorème de Liouville pour les fonctions sous-harmoniques et en remarquant que la norme de la fonction utilisée est sous-harmonique.

Ainsi, le théorème de Gelfand-Mazur est réputé pour avoir une démonstration très simple pourvu que l'on utilise quelques notions assez sophistiquées comme la théorie des fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de dimension infinie et le théorème de Hahn-Banach. En fait il est assez facile de contourner ces notions délicates en revenant aux deux principes fondamentaux de cette preuve (que ce soit dans la version de Mazur ou celle de Gelfand) à savoir la formule de la moyenne et le principe du maximum qui en découle. C'est une telle preuve que je propose dans la sections suivante.

4. Une preuve élémentaire ?

Il s'agit donc de prouver le théorème 1.

Raisonnons par l'absurde et considérons une $\mathbb{C}$-algèbre normée A qui est un corps différent de $\mathbb{C}$. En notant e l'élément unité de A, il y a donc un élément a dans A qui n'appartient pas $\mathbb{C}e$. Ainsi, pour tout λ dans $\mathbb{C}$, $a - \lambda e$ n'est pas nul, donc est inversible, ce qui permet d'introduire la fonction $\varphi : \lambda \mapsto (a - \lambda e)^{-1}$ de $\mathbb{C}$ vers A. Montrons alors que l'étude de cette fonction aboutit à une contradiction.

4.1. Quelques remarques simples.

La relation $\dfrac{\lambda}{X-\lambda} = \dfrac{X}{X-\lambda} - 1$ prouve $\lambda\varphi(\lambda) = a\varphi(\lambda) - 1$, d'où

$$|\lambda| \cdot \|\varphi(\lambda)\| \leqslant \|a\| \cdot \|\varphi(\lambda)\| + 1 \qquad \text{et, si } |\lambda| > \|a\|,\ \ \|\varphi(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{|\lambda| - \|a\|}.$$

En particulier on a :

$$\|\varphi(\lambda)\| \to 0 \qquad \text{lorsque} \qquad |\lambda| \to +\infty. \tag{1}$$

La relation $\dfrac{1}{X-\lambda} - \dfrac{1}{X-\mu} = \dfrac{\lambda-\mu}{(X-\lambda)(X-\mu)}$ donne

$$\varphi(\lambda) - \varphi(\mu) = (\lambda-\mu)\varphi(\lambda)\varphi(\mu)\ .$$

On en déduit $\big|\|\varphi(\lambda)\| - \|\varphi(\mu)\|\big| \leqslant |\lambda-\mu| \cdot \|\varphi(\lambda)\| \cdot \|\varphi(\mu)\|$, d'où l'on tire

$$\Big|\frac{1}{\|\varphi(\lambda)\|} - \frac{1}{\|\varphi(\mu)\|}\Big| \leqslant |\lambda-\mu|\ .$$

Cela prouve la continuité de $\dfrac{1}{\|\varphi(\lambda)\|}$ et donc de $\|\varphi(\lambda)\|$ comme fonction de λ.

4.2. Preuve du théorème.

Pour α fonction de $\mathbb{C}$ dans un groupe additif définissons $\Delta\alpha$ sur $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ par :

$$\Delta\alpha(\lambda, t) = \alpha(\lambda+t) + \alpha(\lambda+\mathrm{j}t) + \alpha(\lambda+\mathrm{j}^2t)\ .$$

Nous utiliserons en particulier $\alpha = \varphi$, $\alpha = \|\varphi\|$ et $\alpha = N$ où $N(\lambda) = \lambda\bar{\lambda}$.

On vérifie aisément $\Delta N(\lambda, t) = 3\lambda\bar{\lambda} + 3t\bar{t}$.
Par ailleurs, la relation

$$\frac{1}{X-t} + \frac{1}{X-\mathrm{j}t} + \frac{1}{X-\mathrm{j}^2t} = \frac{3}{X} + \frac{3t^3}{X(X-t)(X-\mathrm{j}t)(X-\mathrm{j}^2t)}$$

fournit (en substituant $a-\lambda$ à X)

$$\Delta\varphi(\lambda, t) = 3\varphi(\lambda) + 3t^3\varphi(\lambda)\varphi(\lambda-t)\varphi(\lambda-\mathrm{j}t)\varphi(\lambda-\mathrm{j}^2t)\ .$$

Compte tenu de la continuité de φ, on a donc, pour λ fixé :

$$\text{pour } t\to 0, \quad \Delta\varphi(\lambda, t) = 3\varphi(\lambda) + O(t^3). \tag{2}$$

On a clairement

$$\Delta\|\varphi\|(\lambda, t) \geqslant \|\Delta\varphi(\lambda, t)\|,\ \text{ d'où } \Delta\|\varphi\|(\lambda, t) \geqslant 3\|\varphi(\lambda)\| + O(t^3)\ .$$

Introduisons alors, pour $\varepsilon > 0$, la fonction $\psi = \|\varphi\| + \varepsilon N$. Les résultats précédents prouvent, pour λ fixé, $\Delta\psi(\lambda, t) \geqslant 3\psi(\lambda) + 3\varepsilon t\bar{t} + O(t^3)$; il s'ensuit que, dès que $|t|$ est suffisamment petit mais non nul, on a $\Delta\psi(\lambda, t) > 3\psi(\lambda)$. En particulier, dans ces conditions, l'un au moins des $\psi(\lambda-t)$, $\psi(\lambda-\mathrm{j}t)$, $\psi(\lambda-\mathrm{j}^2t)$ est strictement supérieur à $\psi(\lambda)$. On peut donc conclure qu'en aucun point de $\mathbb{C}$, la fonction ψ ne peut présenter un maximum local.

Choisissons alors un $R > 0$, sur le compact $\overline{D}(0, R)$ la fonction ψ qui est continue atteint un maximum. D'après le résultat précédent ce maximum ne peut être atteint à l'intérieur du disque, il est donc atteint sur la frontière, d'où la majoration :

$$\psi(0) = \|\varphi(0)\| \leqslant \sup_{|\lambda|=R} \psi(\lambda) = \sup_{|\lambda|=R} \|\varphi(\lambda)\| + \varepsilon R^2. \tag{3}$$

En faisant tendre ε vers 0 la relation précédente donne

$$\|\varphi(0)\| \leqslant \sup_{|\lambda|=R} \|\varphi(\lambda)\| \ ;$$

en faisant tendre ensuite R vers l'infini, on obtient, grâce à (1), $\|\varphi(0)\| = 0$ ce qui fournit une contradiction puisque φ n'est jamais nulle et achève la démonstration.

Remerciements :

Je tiens à remercier tout particulièrement le professeur W. Zelazko, d'une part pour son livre dont la note en bas de page a été le point de départ de cette recherche et d'autre part pour les informations personnelles qu'il a pu me donner sur S. Mazur. Mes remerciements vont également à mon collègue C. Gilain qui m'a introduit dans les archives de l'académie des sciences de Paris et m'a donné de nombreux conseils utiles pour mener à bien ce travail.

5. Références

[1] S. MAZUR *Sur les anneaux linéaires*, C. R. Acad. Sci., Paris, **207** (1938), 1025-1027.
[2] I. GELFAND *On normed rings*, C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, **23** (1939), 430-432.
[3] I. GELFAND *Normierte Ringe*,Matem. Sbornik, **51** (1941), 3-24.
[4] G. FROBENIUS *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*, J. reine ang. Math. **84** (1878), 1-63.
[5] G. KÖTHE *Stanislaw Mazur's contributions to functional analysis*, Math. Ann. **277** (1987), 489-528.
[6] W. ZELAZKO *Algebry Banacha*, Biblioteka Matematyczna 32. Warszawa : Panstwowe Wydawnictwo Naukowe (1968).
[7] W. ZELAZKO *Banach algebras*,Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics. Amsterdam : Elsevier Publishing Company (1973(.
[8] H-D. EBBINGHAUS, H. HERMÈS, F. HIRZEBRUCH, M. KOECHER, K. MAINZER, J. NEUKIRCH, A. PRESTEL, R. REMMERT *Les nombres. Leur histoire, leur place et leur rìle*, Vuibert. Paris (1998).
[9] S. MAZUR *Sur les anneaux linéaires*, Annales de la Société Polonaise de Mathématiques **17** (1938) p. 112.
[10] H-D. EBBINGHAUS, H. HERMES, F. HIRZEBRUCH, M. KOECHER, K. MAINZER, J. NEUKIRCH, A. PRESTEL, R. REMMERT , Springer-Lehrbuch, Springer (1992).
[11] H-D. EBBINGHAUS, H. HERMES, F. HIRZEBRUCH, M. KOECHER, K. MAINZER, J. NEUKIRCH, A. PRESTEL, R. REMMERT *Numbers*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1996).

Géométrie analytique p-adique : la théorie de Berkovich

Antoine Ducros[1]

À la fin des années quatre-vingts, Vladimir Berkovich a suggéré un nouveau point de vue sur la géométrie analytique p-adique, et plus généralement ultramétrique ([5], [6] ; voir aussi [8] et [27]). Il obtient notamment des espaces localement compacts et localement connexes par arcs ; de plus, ils ont tendance à contenir de manière naturelle les réalisations géométriques de nombreux objets combinatoires (graphes de réduction, éventails, immeubles de Bruhat-Tits...) que l'on définit abstraitement en géométrie algébrique ; mieux, ils se rétractent souvent sur les réalisations en question.

Motivée à l'origine par des questions de théorie spectrale, l'approche de Berkovich s'est révélée extrêmement féconde.

On lui doit la démonstration de certaines conjectures difficiles de géométrie arithmétique (cycles évanescents, correspondance de Jacquet-Langlands) ; elle a offert un cadre particulièrement pertinent pour établir des variantes p-adiques de résultats de géométrie complexe (autour de l'analyse harmonique, des systèmes dynamiques, de l'équidistribution...) ou réelle (bonnes propriétés des parties semi-algébriques, description purement topologique de certains groupes de cohomologie étale...) ; elle a été utilisée pour mettre au point une théorie des dessins d'enfants p-adiques ; elle permet d'intégrer des 1-formes différentielles p-adiques sur de *vrais* chemins ; elle est liée à la géométrie tropicale ; elle a servi à étudier la combinatoire du diviseur exceptionnel d'une désingularisation, sur *n'importe quel* corps parfait ; elle sert à mieux comprendre le comportement d'une famille de variétés *complexes* au-dessus d'un disque épointé.

Dans ce qui suit, nous faisons tout d'abord quelques rappels sur les corps ultramétriques, et traitons les exemples de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{C}_p$. Dans une seconde partie, nous expliquons les problèmes rencontrés lorsqu'on veut faire de la géométrie analytique sur ce type de corps, disons quelques mots des approches de Tate et Raynaud, puis présentons celle de Berkovich (faute de connaissances suffisantes, nous ne parlerons malheureusement pas de celle de Huber, exposée par exemple dans [37]) ; pour éviter un exposé trop technique, nous ne donnons pas de définitions précises, et nous contentons d'énoncer les principales propriétés des espaces qu'il construit.

La troisième partie est consacrée à la description de l'analytifiée d'une variété algébrique ; nous insistons tout particulièrement sur le cas de la droite projective ; nous expliquons le lien entre la réduction modulo p d'une courbe projective p-adique et le type d'homotopie de la courbe analytique associée.

La quatrième partie est enfin dévolue à un survol succinct des applications de la théorie de Berkovich que nous avons évoquées ci-dessus (on en trouvera une recension plus substantielle dans le chapitre 3 de [27]).

[1] Université de Nice - Sophia Antipolis

1. Les corps ultramétriques, l'exemple des corps p-adiques

On dit qu'une application φ définie sur un groupe abélien et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ satisfait *l'inégalité ultramétrique* si $\varphi(a+b) \leqslant \max(\varphi(a), \varphi(b))$ pour tout couple (a, b) ; si φ est paire, ceci implique l'égalité $\varphi(a+b) = \max(\varphi(a), \varphi(b))$ *dès que* $\varphi(a)$ *et* $\varphi(b)$ *diffèrent*, comme on le voit en écrivant $a = a+b-b$ ou $b = a+b-a$.

Un *corps ultramétrique* est un corps muni d'une valeur absolue (que l'on notera systématiquement $|\ |$) qui satisfait l'inégalité ultramétrique. Soit k un tel corps. On vérifie sans difficultés les faits suivants :

• la topologie dont il hérite est totalement discontinue (indépendamment de sa complétude éventuelle) ;

• le sous-ensemble $\{x \in k,\ |x| \leqslant 1\}$ de k en est un sous-anneau, appelé *anneau des entiers* de k et noté k° ; son corps des fractions n'est autre que k ; c'est une partie à la fois ouverte et fermée de k ;

• le sous-ensemble $\{x \in k,\ |x| < 1\}$ de k est l'unique idéal maximal de k° ; on le note $k^{\circ\circ}$, et l'on désigne par $\widetilde{k}$ le quotient $k^{\circ}/k^{\circ\circ}$, que l'on appelle le *corps résiduel* de k.

Un exemple moins idiot qu'il n'en a l'air. Tout corps muni de la valeur absolue triviale (qui vaut 1 sur les éléments non nuls, et 0 sur 0), est un corps ultramétrique complet ; comme on le verra plus bas, faire de la géométrie analytique sur ce type de corps peut se révéler fructueux (*cf.* [48]).

1.1. Exemple : le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques

Soit p un nombre premier ; pour tout nombre rationnel non nul r, on note $v_p(r)$ l'exposant de p (qui est un entier *relatif*) dans la décomposition de r en produit de facteurs premiers. Soit ε un réel strictement compris entre 0 et 1. L'application $|\ |$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}_+$ qui envoie 0 sur 0 et tout élément r de $\mathbb{Q}^*$ sur $\varepsilon^{v_p(r)}$ est une valeur absolue, dite *p-adique*, qui satisfait l'inégalité ultramétrique. Remarquons, pour fixer un peu les idées, que si r appartient à $\mathbb{Z}$ alors $|r| \leqslant 1$, la majoration étant stricte si et seulement si r est multiple de p.

Le corps $\mathbb{Q}_p$ des *nombres p-adiques* est par définition le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue p-adique. C'est un corps ultramétrique complet. Il admet une description explicite relativement maniable : tout élément de $\mathbb{Q}_p$ s'écrit d'une unique manière $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i p^i$, où les a_i sont des entiers compris entre 0 et $p-1$, nuls pour i suffisamment négatif ; la valeur absolue d'un nombre p-adique non nul $\sum a_i p^i$ est égale à ε^j, où $j = \inf\{i, a_i \neq 0\}$; l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Q}_p$ se font à l'aide de l'algorithme usuel, avec retenues. Il est immédiat que $\sum a_i p^i$ appartient à $\mathbb{Q}_p^{\circ}$ (resp. $\mathbb{Q}_p^{\circ\circ}$) si et seulement si a_i est nul pour tout i strictement négatif (resp. négatif ou nul).

Traditionnellement, l'anneau $\mathbb{Q}_p^{\circ}$ est noté $\mathbb{Z}_p$ et est appelé *l'anneau des entiers p-adiques.* D'après ce qui précède, son idéal maximal $\mathbb{Q}_p^{\circ\circ}$ est simplement $p\mathbb{Z}_p$ et le corps résiduel $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On démontre facilement à l'aide du critère séquentiel que $\mathbb{Z}_p$ est compact. Comme les parties de la forme $a + p^n\mathbb{Z}_p$ (avec a dans $\mathbb{Q}_p$ et n dans $\mathbb{N}$) forment une base de la topologie de $\mathbb{Q}_p$, ce dernier est localement compact.

L'anneau $\mathbb{Z}_p$ a moralement « tendance à coder les propriétés vraies modulo p^n pour tout n » . Par exemple, un système d'équations polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$ a une solution dans $\mathbb{Z}_p$ si et seulement si il en a une dans chacun des $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Cette assertion est à rapprocher de la suivante : un tel système a une solution dans $[0;1]$ si et seulement si il a, pour chaque entier n, une solution à $1/n$ près dans $\mathbb{Q} \cap [0;1]$. En effet, on a recours dans les deux cas à un objet conceptuellement sophistiqué ($\mathbb{Z}_p$ d'un côté, $\mathbb{R}$ de l'autre) pour éviter de devoir travailler en permanence « à une précision arbitrairement grande près » (une congruence modulo p^n peut être vue, *via* la valeur absolue p-adique, comme une approximation d'autant plus précise que n est élevé).

1.2. Le corps $\mathbb{C}_p$

Soit $\overline{\mathbb{Q}_p}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. La valeur absolue de ce dernier s'y prolonge de manière unique, mais le corps ultramétrique ainsi obtenu n'est pas complet ; son complété $\mathbb{C}_p$ reste heureusement algébriquement clos. C'est en quelque sorte l'analogue p-adique du corps des complexes, et il lui est d'ailleurs abstraitement isomorphe, puisque son degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ est la puissance du continu.

Le sous-groupe $|\mathbb{C}_p^*|$ de $\mathbb{R}_+^*$ est $\varepsilon^{\mathbb{Q}}$ (pour tout entier i, la valeur absolue de toute racine i-ième de p est égale à $\varepsilon^{1/i}$) ; le corps résiduel $\widetilde{\mathbb{C}_p}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Soit ρ la flèche quotient $\mathbb{C}_p^\circ \to \widetilde{\mathbb{C}_p}$. Pour tout λ appartenant à $\widetilde{\mathbb{C}_p}$, le sous-ensemble $\rho^{-1}(\lambda)$ de $\mathbb{C}_p^\circ$ est une boule *ouverte* de rayon 1 (dont n'importe quel point est un centre). L'anneau $\mathbb{C}_p^\circ$ est recouvert par les $\rho^{-1}(\lambda)$, qui sont en nombre infini et deux à deux disjoints ; il n'est donc pas compact. Comme tout ouvert non vide de $\mathbb{C}_p$ contient une boule fermée de rayon ε^n pour n assez grand, laquelle est homéomorphe à $\mathbb{C}_p^\circ$ *via* la multiplication par p^n, le corps ultramétrique complet $\mathbb{C}_p$ n'est pas localement compact.

2. Les différentes approches de la géométrie analytique ultramétrique

2.1. Le problème

Le rôle majeur joué par les corps p-adiques en géométrie arithmétique a incité à développer sur ces derniers, et plus généralement sur tout corps ultramétrique complet, une géométrie analytique analogue à celle pratiquée sur $\mathbb{C}$.

On fixe à partir de maintenant un corps ultramétrique complet k, dont la valeur absolue peut être triviale. On utilise les notations k^o et k^{oo} introduites au tout début de l'article ; on désignera par $\sqrt{|k^*|}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs dont une puissance non nulle appartient à $|k^*|$.

Les notions de série entière et de rayon de convergence s'étendent telles quelles à k ; elles y sont même, en un sens, plus maniables que dans la situation classique, puisqu'une série d'éléments de k converge si et seulement si son terme général tend vers zéro.

Mais la totale discontinuité de k pose assez rapidement un problème redoutable. Considérons en effet la fonction qui vaut 1 sur k° et 0 sur $k - k^{\circ}$. Comme k° est à la fois ouvert et fermé, cette fonction est localement constante, et *a fortiori* localement développable en série entière ; mais il n'est évidemment pas raisonnable de la considérer comme globalement analytique. Il semble donc, si l'on s'en tient aux définitions naïves, que l'analyticité sur k ne soit pas une notion de nature locale.

2.2. L'approche de Tate

Que signifie précisément l'expression « être de nature locale » ? Sur le corps $\mathbb{C}$, on qualifie ainsi les propriétés qu'il suffit de tester sur un recouvrement ouvert de l'espace ambiant. L'idée de Tate ([46]) a consisté à décréter qu'en géométrie analytique ultramétrique, on considère une propriété comme étant de nature locale s'il suffit de la tester sur un recouvrement ouvert *admissible* de l'espace ambiant.

Il n'est pas question de donner ici la définition d'un recouvrement admissible ; disons simplement qu'il s'agit d'un recouvrement dans lequel il y a suffisamment de chevauchements entre les ouverts pour que les conditions de coïncidence sur les intersections constituent des contraintes dignes de ce nom. Le recouvrement de la droite affine par la boule unité fermée et son complémentaire est l'exemple typique à exclure.

Un espace analytique au sens de Tate (c'est ce qu'on appelle un espace *analytique rigide*) apparaît ainsi comme un espace topologique totalement discontinu sur lequel on distingue certaines familles d'ouverts, dont on dit qu'elles forment un recouvrement admissible de leur réunion ; si l'on veut être plus précis, il y a lieu de recourir au formalisme des *topologies de Grothendieck.*

Les objets qui se recollent convenablement en géométrie complexe (tels les fonctions, les fibrés vectoriels...) se recollent convenablement en géométrie analytique rigide, *pourvu que l'on se restreigne à des recouvrements admissibles.*

2.3. L'approche de Raynaud

Indépendamment de sa nature exacte, un espace analytique rigide est localement défini par l'annulation de certaines fonctions analytiques sur un polydisque unité fermé. Raynaud propose alors ([40], [13]–[16]) la chose suivante : *effectuer des changements de variables adéquats afin que les fonctions en question, ainsi que les données de recollement entre les différentes cartes, soient données par des séries à coefficients dans k°.* Une telle opération est (moyennant certaines hypothèses de finitude) toujours possible ; il y a en général plusieurs choix possibles, chacun d'eux donnant lieu à ce qu'on appelle un *modèle* de l'espace analytique rigide dont on est parti.

Lorsqu'on a fixé un tel modèle, on peut réduire modulo $k^{\circ\circ}$ les séries qui le décrivent. Comme elles convergent sur le polydisque unité fermé, presque tous leurs coefficients sont dans $k^{\circ\circ}$, et elles s'envoient ainsi sur des *polynômes* sur le corps $\widetilde{k}$; ces derniers définissent une variété *algébrique* sur $\widetilde{k}$, c'est la *fibre spéciale* de notre modèle. La considération des fibres spéciales permet de ramener certains problèmes de géométrie analytique sur k à des questions de géométrie algébrique sur $\widetilde{k}$.

Mentionnons que les recouvrements admissibles de Tate se retrouvent dans la théorie de Raynaud : ils correspondent, *grosso modo*, aux recouvrements de Zariski des fibres spéciales des modèles.

2.4. L'approche de Berkovich

Elle est détaillée dans les deux textes fondateurs [5] et [6]. On peut la décrire très succinctement en disant que Berkovich *rajoute des points aux espaces rigides analytiques*, et obtient par ce biais des objets jouissant notamment d'excellentes propriétés topologiques.

Ce procédé est à bien des égards analogue à celui mis en œuvre lorsque, pour passer d'une variété algébrique au sens naïf sur un corps algébriquement clos au schéma correspondant, l'on adjoint un point générique à chaque fermé irréductible de dimension strictement positive.

Quelques précisions. À tout espace analytique rigide X_0 est associé de manière naturelle un « espace de Berkovich » X possédant les propriétés suivantes.

• X est localement compact et localement connexe par arcs, et X_0 s'identifie, comme espace topologique, à une partie dense de X.

• Si X_0 est défini comme le lieu des zéros d'une famille de fonctions sur un polydisque unité fermé, X est compact.

• Il existe une classe particulière de sous-ensembles de X, les *domaines analytiques*, qui comprend entre autres les ouverts de X, ainsi que certaines parties compactes : par exemple, si X_0 est la droite affine analytique et si $Y_0 \subset X_0$ est le disque unité fermé, alors $Y \subset X$ est un domaine analytique compact.

• À tout point x de X est associé une extension ultramétrique complète de k, le *corps résiduel complété de* x, que l'on note $\mathscr{H}(x)$; le point x appartient à X_0 si et seulement si $\mathscr{H}(x)$ est fini sur k.

• Pour tout domaine analytique U de X, on sait définir l'algèbre $\mathscr{O}_X(U)$ des *fonctions analytiques sur* U ; si x est un point de U on dispose d'un morphisme de k-algèbres $\mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{H}(x)$, appelé *évaluation en* x et noté $x \mapsto f(x)$.

• Si U et V sont deux domaines analytiques de X avec $V \subset U$, il existe une application de *restriction* $\mathscr{O}_X(U) \to \mathscr{O}_X(V)$. Si l'on se restreint aux ouverts de X, alors $U \mapsto \mathscr{O}_X(U)$ est un faisceau.

• L'algèbre $\mathscr{O}_X(X)$ coïncide avec l'algèbre des fonctions analytiques sur l'espace rigide analytique X_0.

Quelques commentaires.

- Le dernier point peut se formuler ainsi : Berkovich modifie les espaces topologiques considérés par la géométrie rigide, mais pas leurs anneaux de fonctions.

- $U \mapsto \mathscr{O}_X(U)$ est un faisceau *sans qu'il y ait besoin, pour recoller les fonctions, de se restreindre à des recouvrements ouverts d'un type particulier*. Cette amélioration par rapport à la situation analytique rigide, en apparence spectaculaire, s'explique très simplement : la topologie de X est telle que si (U_i) est une famille d'ouverts de X et si l'on pose $U = \bigcup U_i$, alors $(U_i) \cap X_0$ est automatiquement un recouvrement *admissible* de $U \cap X_0$.

3. L'analytifiée d'une variété algébrique

Nous n'en dirons pas plus ici sur les espaces de Berkovich généraux ; nous avons choisi d'insister sur un cas particulier, celui de l'espace de Berkovich associé à une variété *algébrique* sur k ([5], §3.4), dont nous allons décrire précisément l'espace topologique sous-jacent.

3.1. Le cas affine

Soit $\mathscr{X}$ une variété algébrique affine sur k, donnée par un système d'équations polynomiales $(P_1, \ldots, P_m)$ en n variables $X_1, \ldots, X_n$. Posons

$$\mathrm{A} = k[X_1, \ldots, X_n]/(P_1, \ldots, P_m).$$

L'idée qui sous-tend la définition de l'espace de Berkovich $\mathscr{X}^{an}$ associé à $\mathscr{X}$ est la suivante : *on s'intéresse aux points de $\mathscr{X}$ à valeur dans* toutes *les extensions ultramétriques complètes de k*. Soit L une telle extension ; l'évaluation des fonctions induit une bijection entre l'ensemble des L-points de $\mathscr{X}$ et celui des homomorphismes de k-algèbres de A dans L. Pour cette raison, on appellera *évaluation* tout k-morphisme de A dans une extension ultramétrique complète de k.

À toute évaluation sera donc associé un point de l'espace que l'on cherche à construire. Par ailleurs, donnons-nous une évaluation $\mathrm{A} \to L$, et une extension ultramétrique complète L' de L. La composée de $\mathrm{A} \to L$ et de $L \hookrightarrow L'$ est une évaluation $A \to L'$. *Il est raisonnable de décréter que les points associés à* $\mathrm{A} \to L$ *et à* $\mathrm{A} \to L'$ *coïncident* : il s'agit en effet simplement de dire que tout L-point peut *a fortiori* être vu comme un L'-point.

On est ainsi amené à définir l'espace $\mathscr{X}^{an}$ comme l'ensemble des classes d'équivalences d'évaluations, relativement à la relation engendrée par les identifications mentionnées ci-dessus.

Pour naturelle qu'elle apparaisse, cette définition n'est ni très tangible, ni très maniable, et nous allons immédiatement en donner une autre, qui lui est équivalente. Soit $\mathrm{A} \to L$ une évaluation. Sa composée avec la valeur absolue de L définit une application de A dans $\mathbb{R}_+$ qui est multiplicative, satisfait l'inégalité ultramétrique, et coïncide sur k avec la valeur absolue ; une telle application de A dans $\mathbb{R}_+$ sera appelée une *semi-norme multiplicative*.

On fait ainsi correspondre à chaque évaluation une semi-norme multiplicative sur A. Réciproquement, soit x une telle semi-norme. Son noyau $\mathfrak{p}_x$ est un idéal premier de A, par lequel elle passe au quotient ; elle induit de ce fait une valeur absolue ultramétrique sur le corps des fractions de $\mathrm{A}/\mathfrak{p}_x$; le complété correspondant est noté $\mathscr{H}(x)$, et $\mathrm{A} \to \mathscr{H}(x)$ est une évaluation, qui est par construction minimale au sein de sa classe d'équivalence.

Il n'est pas difficile de voir que l'on vient de mettre en bijection l'ensemble des classes d'équivalences d'évaluations et celui des semi-normes multiplicatives sur A. Ceci conduit à cette nouvelle définition : *l'espace* $\mathscr{X}^{an}$ *est l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur* A*, muni de la topologie induite par la topologie produit de* $\mathbb{R}^{\mathrm{A}}$.

Remarque 1. On a donné une description de *l'espace topologique sous-jacent à* $\mathscr{X}^{an}$; on ne dira rien ici du faisceau des fonctions analytiques sur ce dernier.

Remarque 2. Soit x un point de $\mathscr{X}^{an}$, autrement dit une semi-norme multiplicative sur A. Le corps $\mathscr{H}(x)$ introduit ci-dessus est bien entendu le même que celui dont il a été question plus haut ; la restriction à A de l'évaluation $f \mapsto f(x)$ est la flèche naturelle $\mathrm{A} \to \mathscr{H}(x)$; pour toute fonction f de A, le réel $x(f)$ est ainsi égal à $|f(x)|$, et c'est cette dernière notation que l'on emploiera de préférence, pour des raisons psychologiques évidentes.

Remarque 3. Tout k-point de la variété algébrique $\mathscr{X}$ donne lieu à une évaluation $\mathrm{A} \to k$, donc à un point de $\mathscr{X}^{an}$. Il est très facile de voir que l'on établit ainsi une bijection entre $\mathscr{X}(k)$ et l'ensemble $\mathscr{X}^{an}(k)$ des points de $\mathscr{X}$ tels que $\mathscr{H}(x) = k$. Si l'on munit $\mathscr{X}(k)$ de la topologie (totalement discontinue) héritée de celle de k, et $\mathscr{X}^{an}(k)$ de la topologie induite par celle de $\mathscr{X}^{an}$, *cette bijection est un homéomorphisme.*

Remarque 4. En envoyant une semi-norme sur son noyau, on définit une application continue de $\mathscr{X}^{an}$ vers le schéma $\mathscr{X}$.

3.2. Le cas général

On définit l'analytifiée $\mathscr{X}^{an}$ d'une variété algébrique quelconque $\mathscr{X}$ par recollement à partir du cas affine. Indiquons quelques propriétés satisfaites par l'espace $\mathscr{X}^{an}$.

i) $\mathscr{X}(k)$, muni de la topologie totalement discontinue induite par celle de k, est homéomorphe au sous-ensemble $\mathscr{X}^{an}(k)$ de $\mathscr{X}^{an}$ constitué des points x tels que $\mathscr{H}(x) = k$ (et muni de la topologie induite) ; si k est algébriquement clos et si sa valeur absolue n'est pas triviale, alors $\mathscr{X}^{an}(k)$ est dense dans $\mathscr{X}^{an}$.

ii) $\mathscr{X}^{an}$ est muni d'une application continue et surjective vers le schéma $\mathscr{X}$, qui induit une bijection $\pi_0(\mathscr{X}^{an}) \simeq \pi_0(\mathscr{X})$; en particulier $\mathscr{X}^{an}$ est connexe (et partant, connexe par arcs) si et seulement si $\mathscr{X}$ est connexe.

iii) $\mathscr{X}^{an}$ est séparé si et seulement si $\mathscr{X}$ est séparé, et compact si et seulement si $\mathscr{X}$ est propre ; dans ce dernier cas, les théorèmes de type GAGA s'appliquent.

iv) La *dimension topologique* de $\mathscr{X}^{an}$ est égale à celle de $\mathscr{X}$.

Aparté : comparaison avec la géométrie complexe. À tout $\mathbb{C}$-schéma de type fini $\mathscr{X}$ peut être associé un espace analytique complexe $\mathscr{X}^{an}$. Dans ce contexte, la propriété *iii*) reste vraie, et $\mathscr{X}^{an} \to \mathscr{X}$ induit encore une bijection $\pi_0(\mathscr{X}^{an}) \simeq \pi_0(\mathscr{X})$. La dimension topologique de $\mathscr{X}^{an}$ est par contre égale *au double* de la dimension de Krull de $\mathscr{X}$, et $\mathscr{X}^{an} \to \mathscr{X}$ n'est pas surjective (en général...) ; elle identifie $\mathscr{X}^{an}$ à $\mathscr{X}(\mathbb{C})$ *muni de la topologie transcendante*.

3.3. Étude détaillée de la droite projective

Les références pour ce qui suit sont les paragraphes 4.1 *et* 4.2 *de* [5]. Comme $\mathbb{P}^1_k$ est propre, $\mathbb{P}^{1,an}_k$ est compact ; comme $\mathbb{P}^1_k$ est connexe, $\mathbb{P}^{1,an}_k$ est connexe par arcs. Il vérifie en fait la propriété suivante, bien plus forte, qui en fait ce qu'on appelle un *arbre réel* : pour tout couple (x, y) de points de $\mathbb{P}^{1,an}_k$, il existe *un et un seul* fermé de $\mathbb{P}^{1,an}_k$ homéomorphe à un intervalle compact d'extrémités x et y. Ceci entraîne immédiatement la simple connexité de $\mathbb{P}^{1,an}_k$; on peut montrer qu'il est contractile.

Exemples d'arcs réels tracés sur $\mathbb{P}^{1,an}_k$. Si a est un élément de k, il définit un k-point de $\mathbb{A}^{1,an}_k \subset \mathbb{P}^{1,an}_k$, que l'on note encore a ; on désigne par ∞ le point à l'infini de $\mathbb{P}^{1,an}_k$. Pour tout a dans k et tout réel positif r, l'application $\eta_{a,r}$ de $k[T]$ dans $\mathbb{R}_+$ qui envoie $\sum a_i(T-a)^i$ sur $\max |a_i|r^i$ est une semi-norme multiplicative, et donc un point de $\mathbb{A}^{1,an}_k \subset \mathbb{P}^{1,an}_k$; on pose $\eta_{a,\infty} = \infty$.

Soient a et b deux éléments de k. Faisons deux remarques : $\eta_{a,0}$ envoie tout polynôme P sur $|P(a)|$, et coïncide donc avec a ; si r est un réel supérieur ou égal à $|b-a|$, alors $\eta_{a,r} = \eta_{b,r}$.

On peut maintenant décrire l'unique intervalle tracé sur $\mathbb{P}^{1,an}_k$ reliant a à ∞ : c'est $\{\eta_{a,r}\}_{0\leqslant r\leqslant\infty}$; quant à celui qui joint a à b, c'est la réunion de $\{\eta_{a,r}\}_{0\leqslant r\leqslant|b-a|}$ et de $\{\eta_{b,r}\}_{|b-a|\geqslant r\geqslant 0}$ (rappelons que $\eta_{a,|b-a|} = \eta_{b,|b-a|}$).

Dans chacun de ces intervalles, seules les extrémités sont des points rigides classiques ; les points intérieurs, qui sont de la forme $\eta_{c,r}$ avec r dans $\mathbb{R}^*_+$, sont « nouveaux » .

Nombres de branches aboutissant à un point donné.

• Soit a appartenant à $k \cup \{\infty\}$. Comme le schéma $\mathbb{P}^1_k - \{a\}$ est connexe, il en va de même de l'espace $\mathbb{P}^{1,an}_k - \{a\}$.

• Soit a appartenant à k et soit r un réel strictement positif qui n'appartient pas à $\sqrt{|k^*|}$. L'espace $\mathbb{P}^{1,an}_k - \eta_{a,r}$ a exactement deux composantes connexes, respectivement définies par les conditions $|T-a| < r$ et $|T-a| > r$.

• Soit a appartenant à k et soit r un réel strictement positif qui appartient à $\sqrt{|k^*|}$. L'espace $\mathbb{P}^{1,an}_k - \eta_{a,r}$ a une infinité de composantes connexes. Nous allons les décrire en nous plaçant, pour simplifier, dans la situation où $a = 0$, où $r = 1$, et où k est algébriquement clos. Soit S un système de représentants de $\widetilde{k}$ dans k°. Pour tout s appartenant à S, notons U_s l'ouvert de $\mathbb{P}^{1,an}_k$ défini par la condition $|T-s| < 1$; soit U_∞ l'ouvert de $\mathbb{P}^{1,an}_k$ défini par la condition $|T| > 1$. Les U_s, où s parcourt $\mathrm{S} \cup \{\infty\}$, sont exactement les composantes connexes de $\mathbb{P}^{1,an}_k - \eta_{0,1}$.

Remarque. Si P est un point de $\mathbb{P}^{1,an}_k$ alors tout voisinage U de P contient *toutes les composantes connexes de* $\mathbb{P}^{1,an}_k - P$ *sauf un nombre fini*. La topologie de $\mathbb{P}^{1,an}_k - P$ est ainsi plus grossière que sa topologie d'arbre ; c'est le prix à payer pour avoir affaire à un espace compact.

3.4. Type d'homotopie et réduction modulo p

Le graphe d'une courbe semi-stable déployée. On dira qu'une courbe algébrique projective sur $\widetilde{k}$ est *semi-stable déployée* si ses seules singularités sont des $\widetilde{k}$-points doubles ordinaires dont les deux tangentes sont définies sur $\widetilde{k}$. À une telle courbe est associé un graphe construit comme suit : à chaque composante irréductible correspond un sommet, et à chaque point double une arête qui joint les deux sommets correspondants (resp. se referme en un cercle sur le sommet correspondant) s'il appartient à deux composantes (resp. n'appartient qu'à une composante). Ainsi, le graphe associé à une réunion de deux droites projectives sécantes en un point est un segment ; celui qui correspond à une cubique nodale ou à une chaîne polygonale de droites projectives est un cercle.

Étude des courbes à réduction semi-stable déployée. Soit $\mathscr{X}$ une k-courbe projective et lisse. Supposons qu'il existe un système d'équations de $\mathscr{X}$ *à coefficients dans* k° (ou, pour être plus technique et plus précis, un k°-schéma propre et plat de fibre générique isomorphe à $\mathscr{X}$) dont la réduction modulo $k^{\circ\circ}$ définit une $\widetilde{k}$-courbe projective semi-stable déployée $\widetilde{\mathscr{X}}$; *cette hypothèse n'est pas forcément vérifiée, mais l'est toujours après une extension finie éventuelle du corps de base.* On dispose d'une application $\rho : \mathscr{X}^{an} \to \widetilde{\mathscr{X}}$, dite de *réduction modulo $k^{\circ\circ}$*.

Exemple : le cas de la droite projective. Donnons quelques propriétés de la flèche $\rho : \mathbb{P}^{1,an}_k \to \mathbb{P}^1_{\widetilde{k}}$. Si $a \in k^\circ$ alors $\rho(a)$ est le point $\widetilde{a}$ de $\mathbb{A}^1_{\widetilde{k}} \subset \mathbb{P}^1_{\widetilde{k}}$; si $a \in (k - k^\circ) \cup \{\infty\}$ alors $\rho(a)$ est le point à l'infini de $\mathbb{P}^1_{\widetilde{k}}$; enfin $\rho(\eta_{0,1})$ est le point générique de $\mathbb{P}^1_{\widetilde{k}}$.

Revenons à la courbe $\mathscr{X}$. On démontre ([5], §4.3) les assertions suivantes.

- Si η est le point générique d'une composante irréductible $\mathscr{F}$ de $\widetilde{\mathscr{X}}$, alors $\rho^{-1}(\eta)$ est un singleton $\{\sigma_{\mathscr{F}}\}$.

- si x est un point double de $\widetilde{\mathscr{X}}$, alors $\rho^{-1}(x)$ est isomorphe à une couronne ouverte, c'est-à -dire à un ouvert de $\mathbb{A}^{1,an}_k$ défini par une condition de la forme $s < |T| < t$. Remarquons qu'un tel ouvert contient en particulier l'intervalle ouvert $\{\eta_{0,r}\}_{r \in]s;t[}$, que l'on immerge ainsi dans $\mathscr{X}^{an}$; si x appartient à deux composantes irréductibles $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ (resp. à une seule composante irréductible $\mathscr{F}$) de $\widetilde{\mathscr{X}}$, alors l'image de $\{\eta_{0,r}\}_{r \in]s;t[}$ dans $\mathscr{X}^{an}$ relie $\sigma_{\mathscr{F}}$ à $\sigma_{\mathscr{G}}$ (resp. se referme en un cercle sur $\sigma_{\mathscr{F}}$).

On vient ainsi de construire un homéomorphisme entre le graphe de $\widetilde{\mathscr{X}}$ et un certain fermé Γ de $\mathscr{X}^{an}$. On prouve que $\mathscr{X}^{an}$ se rétracte sur Γ.

Remarque. Si $\widetilde{\mathscr{X}}$ est lisse, alors Γ est un point et $\mathscr{X}^{an}$ est dès lors contractile.

3.5. Quelques résultats complémentaires

Topologie des courbes analytiques en général. À l'aide de ce que l'on vient de faire, on démontre ([6], §4.3) les faits suivants : *si X est une courbe analytique quelconque, alors tout point de X a une base de voisinages contractiles qui sont des arbres réels ; de plus, il existe un fermé Γ de X qui est un graphe localement fini vers lequel X admet une rétraction compacte.*

Variétés algébriques de dimension supérieure. Soit $\mathscr{X}$ une variété projective lisse sur k. Supposons que l'on puisse trouver un système d'équations de $\mathscr{X}$ à coefficients dans k° dont la réduction $\widetilde{\mathscr{X}}$ modulo $k^{\circ\circ}$ soit une $\widetilde{k}$-variété algébrique *pluristable* ([10], §4.1 ; cela signifie moralement que son lieu singulier ressemble localement à une intersection d'hyperplans de coordonnées). On peut alors ([9], th. 8.1 et [10], §4 et §5), exactement comme dans le cas des courbes :

• définir abstraitement un polyèdre de dimension majorée par celle de $\mathscr{X}$ et qui code la combinatoire des singularités de $\widetilde{\mathscr{X}}$; c'est par exemple un point si $\widetilde{\mathscr{X}}$ est lisse ;

• construire un homéomorphisme entre ce polyèdre et un certain fermé Γ de $\mathscr{X}^{an}$;

• montrer que $\mathscr{X}^{an}$ se rétracte sur Γ (ceci entraîne entre autres que $\mathscr{X}^{an}$ est contractile dès que $\widetilde{\mathscr{X}}$ est lisse).

Topologie des espaces analytiques lisses. En se ramenant, à l'aide notamment des altérations de De Jong, à une situation du type que l'on vient de considérer, Berkovich démontre ([9], th. 9.1) que si la valeur absolue de k n'est pas triviale, *tout espace k-analytique lisse est localement contractile.*

Groupes réductifs et immeubles de Bruhat-Tits. Si le corps k est local et si G est un k-groupe algébrique réductif *défini sur* $\mathbb{Z}$, Berkovich construit ([5], §5.4) deux plongements de son immeuble de Bruhat-Tits $\mathscr{B}(G,k)$ dans G^{an}.

Variétés toriques et éventails. Soit k un corps quelconque, que l'on munit de la *valeur absolue triviale*. Soit $\mathscr{X}$ une variété torique sur k, le tore en jeu étant supposé déployé. Dans [48], Thuillier définit un certain domaine analytique compact $\mathscr{X}^{\beth}$ de $\mathscr{X}^{an}$, et montre l'existence d'un fermé E de $\mathscr{X}^{\beth}$ qui s'identifie naturellement à la compactification canonique de l'éventail $\mathscr{E}$ de $\mathscr{X}$; de plus, $\mathscr{X}^{\beth}$ se rétracte sur E, et la structure polyédrale de $\mathscr{E}$ se retrouve en considérant la restriction à E des normes de certaines fonctions analytiques.

4. Fécondité de la théorie de Berkovich

4.1. Géométrie arithmétique

Après avoir jeté les bases de sa théorie, Berkovich a entrepris ([6]) de définir la topologie et la cohomologie étales sur ses espaces analytiques, et d'établir à leur sujet les résultats attendus (dualité de Poincaré, pureté, théorèmes de comparaison...). Elles ont joué un rôle crucial dans la preuve de deux conjectures.

• **Une conjecture de Deligne concernant les cycles évanescents**. Elle a été démontrée par Berkovich ([7]).

• **Une conjecture de Carayol et Drinfeld relative aux correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands locales**. Elle a été établie par Boyer, Harris et Taylor dans le cas p-adique, et par Hausberger dans celui d'égale caractéristique ([17], [34], [35], [36]) ; il s'agit essentiellement de montrer que la correspondance cherchée se réalise dans la cohomologie étale de certains espaces analytiques convenables, qui apparaissent comme des revêtements du « demi-plan de Poincaré p-adique » ; dans cet esprit, on peut également mentionner un article récent de Dat ([24]).

4.2. Analogues p-adiques de résultats complexes

• **Théorie spectrale.** Il est facile d'exhiber une algèbre de Banach non nulle $\mathscr{A}$ sur $\mathbb{C}_p$ et un élément a de $\mathscr{A}$ dont le spectre au sens naïf est vide (notons que dans ce cas $\lambda \mapsto (a-\lambda)^{-1}$ est une fonction localement analytique sur $\mathbb{C}_p$, mais pas globalement). C'est pour remédier à ce défaut que Berkovich a fondé sa théorie. Si k est un corps ultramétrique complet et si a est un élément d'une k-algèbre de Banach $\mathscr{A}$, Berkovich définit ([5], §7) le spectre de a comme une partie non pas de k, mais de $\mathbb{A}_k^{1,an}$. Il retrouve alors les résultats usuels : le spectre est compact, non vide si $\mathscr{A}$ est non nulle, sa trace sur k est le spectre classique, et toute fonction analytique au voisinage du spectre peut être évaluée en a.

• **Analyse harmonique.** Pour des raisons variées, divers auteurs (Baker, Favre, Jonsson, Rumely, Thuillier) ont récemment cherché à faire de l'analyse harmonique sur les courbes ultramétriques ([2]–[4], [28], [29], [47]). Les résultats les plus aboutis et les plus systématiques dans cette voie sont ceux de Thuillier ([47]) ; en utilisant de manière absolument essentielle la structure locale d'arbre réel des courbes analytiques de Berkovich, il définit sur ces dernières les notions de fonctions harmoniques, de fonctions lisses, d'opérateur dd^c, de courant... et démontre les analogues des assertions connues sur les surfaces de Riemann ; il s'en sert ensuite pour reformuler la théorie de l'intersection en géométrie d'Arakelov.

• **Systèmes dynamiques et équidistribution.** Les premiers travaux en matière de systèmes dynamiques sur $\mathbb{C}_p$ (il s'agissait d'étudier l'itération de fractions rationnelles à une indéterminée) ont été réalisés par Rivera-Letelier ([41]–[43]) ; ils ont montré l'intérêt qu'il y avait, même pour comprendre des phénomènes ne concernant *a priori* que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ (tels l'existence de points périodiques attractifs ou répulsifs), à considérer l'action d'une fraction rationnelle sur l'espace de Berkovich $\mathbb{P}^{1,an}_{\mathbb{C}_p}$ (notons que Rivera-Letelier travaille souvent avec la topologie d'arbre sur ce dernier, plus fine que celle de Berkovich).

Faisons une petite digression vers l'équidistribution en dynamique complexe. Considérons une fraction rationnelle R en une variable sur $\mathbb{C}$, et soit z un point complexe tel que $R^{-2}(z)$ ne soit pas égal à $\{z\}$. Pour tout n, notons μ_n la moyenne des masses de Dirac en les antécédents de z par R^n, comptés avec multiplicité. Un résultat classique assure que (μ_n) converge faiblement vers une mesure de probabilités sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ne dépendant pas de z.

Favre et Rivera-Letelier ont démontré ([30]) exactement le même résultat sur $\mathbb{C}_p$, à cela près que la mesure limite *vit sur l'espace de Berkovich* $\mathbb{P}^{1,an}_{\mathbb{C}_p}$*, et qu'il peut* *arriver que son support ne contienne aucun $\mathbb{C}_p$-point.* Dans certains cas (notamment lorsque la fraction s'étend en un endomorphisme de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p^{\circ}}$), la mesure limite peut être par exemple $\delta_{\eta_{0,1}}$.

Un phénomène analogue se produit pour l'équidistribution *de points de petite hauteur* ([4], [18], [31]). Par exemple, Chambert-Loir a établi dans [18] une variante p-adique d'un théorème de Szpiro, Ullmo et Zhang ([45]) en la matière, et sa mesure limite μ vit, comme celle de Favre et Rivera-Letelier, sur l'espace de Berkovich associé à la variété qu'il considère ; dès que celle-ci est de dimension strictement positive, le support de μ ne comprend aucun $\mathbb{C}_p$-point.

• **Théorie de Nevanlinna, courbes entières, hyperbolicité de Kobayashi... dans le cadre p-adique.** La théorie de Berkovich a été utilisée par différents auteurs (Berkovich lui-même, Cherry...) pour obtenir un certains nombres de résultats dans ce domaine ([5], [19]–[22]) ; par exemple, Berkovich a démontré que tout morphisme analytique de la droite affine dans une courbe de genre au moins égal à 1 est constant ([5], th. 4.5.1).

4.3. Analogues p-adiques de résultats réels

• **Bonnes propriétés des parties semi-algébriques.** Soit $\mathscr{X}$ une variété algébrique affine réelle d'anneau A. On dit qu'une partie de $\mathscr{X}(\mathbb{R})$ est *semi-algébrique* si elle peut être définie par une combinaison booléenne d'inégalités entre fonctions de A. Il est bien connu que toute application polynomiale entre variétés réelles affine transforme une partie semi-algébrique en une partie semi-algébrique, et que les composantes connexes d'une partie semi-algébrique sont en nombre fini, et sont elles-même semi-algébriques.

Soit k un corps ultramétrique complet et soit $\mathscr{X}$ une k-variété algébrique affine d'anneau A. On dira qu'une partie de $\mathscr{X}^{an}$ est *semi-algébrique* si elle peut être définie par une combinaison booléenne de conditions de la forme $|f| \bowtie \lambda|g|$, où f et g appartiennent à A, où λ est un réel positif, et où $\bowtie$ est l'un des quatre symboles d'inégalités. Les deux résultats mentionnés ci-dessus se transposent alors *mutatis mutandis* dans ce contexte ([26], prop. 2.5 et th. 3.2).

• **Description purement topologique de certains groupes de cohomologie étale.** Un théorème classique de Witt assure que le groupe de Brauer d'une courbe réelle lisse $\mathscr{X}$ s'identifie à $(\mathbb{Z}/2)^{\pi_0(\mathscr{X}(\mathbb{R}))}$, *via* l'évaluation point par point.

L'auteur a établi dans [25] (th. 4.2 et th. 5.2) un analogue p-adique de ce résultat, qui réinterprète et étend un résultat antérieur de Kato ([38], cor. 2.9) ; cet analogue consiste à décrire un certain groupe de cohomologie associé à une courbe algébrique p-adique lisse $\mathscr{X}$ en termes de la topologie de $\mathscr{X}^{an}$: on choisit un graphe localement fini Γ vers lequel $\mathscr{X}^{an}$ admet une rétraction compacte, et le groupe étudié s'identifie alors à celui des cochaînes harmoniques sur Γ, à coefficients dans $\mathbb{Z}/n$ pour un certain n. Cet isomorphisme est construit à l'aide d'une évaluation ponctuelle des classes de cohomologie, qui ne donnerait rien si l'on se limitait aux points rigides, en lesquels cette évaluation est toujours nulle.

4.4. Autres applications

• **Dessins d'enfants p-adiques.** La théorie des dessins d'enfants vise à comprendre $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en termes géométriques et combinatoires. Yves André a utilisé les espaces de Berkovich pour proposer ([1]) une approche analogue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, approche qui repose sur la considération de certains revêtements étales particuliers, dits *tempérés*, des courbes analytiques de Berkovich sur $\mathbb{C}_p$; le groupe qui classe les revêtements en question n'est en général ni discret, ni profini : celui de l'analytifiée une courbe elliptique à mauvaise réduction est ainsi isomorphe à $\mathbb{Z} \times \widehat{\mathbb{Z}}$.

• **Intégration p-adique sur de vrais chemins.** Berkovich a exploité le caractère localement connexe par arcs de ses espaces pour développer sur ces derniers une théorie de l'intégration des 1-formes différentielles fermées ([11]). Celle-ci, inspirée en partie par les travaux antérieurs de Coleman ([23]) sur les courbes, s'applique à tout espace analytique lisse X sur $\mathbb{C}_p$. Elle associe à toute 1-forme fermée ω sur X et à tout chemin γ, tracé sur X et d'extrémités appartenant à $X(\mathbb{C}_p)$, un élément $\int_\gamma \omega$ de $\mathbb{C}_p[\log p]$, qui ne dépend que de la classe d'homotopie de γ. Cette intégrale est essentiellement calculée par différence des primitives ; l'essentiel du travail de Berkovich consiste à construire une classe convenable de fonctions au sein desquelles vivent les primitives en question.

• **Géométrie tropicale et conjecture de Bogomolov.** Dans un article récent ([33]), Gubler démontre une conjecture de Bogomolov concernant les points de petite hauteur d'une variété abélienne $\mathscr{A}$ définie sur un corps F lui-même de type fini sur un corps algébriquement clos k, moyennant l'hypothèse que $\mathscr{A}$ a une réduction totalement dégénérée en au moins une valuation discrète divisorielle de F. Sa preuve repose sur des résultats intermédiaires de géométrie tropicale, qu'il établit dans [32] à l'aide de la théorie de Berkovich. Les résultats en question portent sur les sous-variétés analytiques de $\mathbb{G}_m^{n,an}$; ils se transfèrent aux variétés abéliennes à réduction totalement dégénérée, en écrivant l'analytifiée d'une telle variété comme le quotient de $\mathbb{G}_m^{n,an}$ par un réseau.

• **Familles de variétés complexes sur le disque épointé.** Soit K le corps des fonctions méromorphes au voisinage de l'origine sur $\mathbb{C}$, et soit $\mathscr{X}$ une variété algébrique propre sur K. Elle définit, pour tout nombre complexe z non nul et de module suffisamment petit, une variété algébrique complexe $\mathscr{X}_z$. Par ailleurs, on peut par complétion plonger K dans $\mathbb{C}((t))$. Lorsqu'on munit $\mathbb{C}((t))$ d'une valeur absolue t-adique, on en fait un corps ultramétrique complet, dont la topologie n'a plus rien à voir avec celle de $\mathbb{C}$ (puisque ce dernier, en tant que sous-corps de $\mathbb{C}((t))$, est discret). Il semble néanmoins qu'existent de nombreux liens entre la famille des $\mathscr{X}_z(\mathbb{C})$ et l'espace de Berkovich $\mathscr{X}^{an}_{\mathbb{C}((t))}$.

Par exemple, lorsque $\mathscr{X}$ est une variété de Calabi-Yau, l'on peut définir de façon cohérente une métrique g_z de diamètre 1 sur chacun des $\mathscr{X}_z(\mathbb{C})$; si $\mathscr{X}$ a une réduction totalement dégénérée, Kontsevich et Soibelman conjecturent ([39]) que lorsque z tend vers zéro, $(\mathscr{X}_z(\mathbb{C}), g_z)$ s'effondre sur un espace métrique qui s'identifie à un fermé de $\mathscr{X}^{an}_{\mathbb{C}((t))}$ sur lequel ce dernier se rétracte.

Revenons au cas d'une variété algébrique $\mathscr{X}$ propre quelconque ; la famille des $\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{X}_z(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ définit une *variation de structure de Hodge mixte* sur le disque épointé D^* ; une fois choisi un revêtement universel $\overline{D^*}$ de D^* de groupe Π, on peut définir la *limite* de la famille des $\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{X}_z(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$, et l'on obtient ainsi une structure de Hodge mixte $\mathrm{H}^\bullet_{\lim}$ sur laquelle Π agit. Soit F le complété (pour la topologie t-adique) de la clôture algébrique de K qui correspond à $\overline{D^*}$. Berkovich démontre ([12], th. 5.1) qu'il existe pour tout i un isomorphisme Π-équivariant

$$\mathrm{H}^i(|\mathscr{X}_F^{an}|,\mathbb{Q}) \simeq W_0(\mathrm{H}^i_{\lim}\otimes\mathbb{Q}),$$

où $|\mathscr{X}_F^{an}|$ désigne l'espace topologique sous-jacent à $\mathscr{X}_F^{an}$.

• **Le diviseur exceptionnel d'une désingularisation.** Soit k un corps parfait, soit X une k-variété intègre et soit Y son lieu singulier. Considérons une désingularisation $X' \to X$ de X telle que l'image réciproque Y' de Y soit un diviseur à croisements normaux stricts. Soit Δ la réalisation géométrique du complexe d'incidence des composantes de Y'. Thuillier a démontré ([48], th. 4.6) que le type d'homotopie de Δ ne dépend pas du choix de X' ; il étend ainsi un théorème de Stepanov ([44]) qui aboutissait à la même conclusion, mais en supposant k de caractéristique nulle et Y propre. La preuve de Thuillier consiste à munir k de la valeur absolue triviale, à associer au couple (X, Y) un espace de Berkovich sur k, et à montrer que ce dernier se rétracte sur l'un de ses fermés homémomorphe à Δ ; il utilise ses résultats déjà mentionnés sur les variétés toriques, en se fondant sur le fait que sur un corps parfait, l'immersion du complémentaire d'un diviseur à croisements normaux stricts est toroïdale.

5. Références

[1] Y. ANDRÉ – *On a geometric description of* $\mathrm{Gal}(\overline{Q_p}/Q_p)$ *and a p-adic avatar of* $\widehat{GT}$, Duke Math. J. **119** (2003), n°. 1, 1-39.
[2] M. BAKER and R. RUMELY – *Harmonic Analysis on Metrized graphs*, prépublication.
[3] M. BAKER and R. RUMELY – *Analysis and dynamics on the Berkovich projective line*, prépublication.
[4] M. BAKER and R. RUMELY – *Equidistribution of small points, rational dynamics, and potential theory*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), n°. 3, 625-688.
[5] V. G. BERKOVICH – *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs **33**, AMS, Providence, RI, 1990.
[6] V. G. BERKOVICH – *Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **78** (1993), 5-161.
[7] V. G. BERKOVICH – *Vanishing cycles for formal schemes*, Invent. Math. **115** (1994), n°. 3, 539-571.
[8] V. G. BERKOVICH – *p-Adic Analytic Spaces* in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berlin, August 1998, Doc. Math. J. DMV, Extra Volume ICM II (1998), 141-151.
[9] V. G. BERKOVICH – *Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible*, Invent. Math. **137** (1999), n°. 1, 1-84.
[10] V. G. BERKOVICH – *Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible. II*, *in* Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II, 293-370, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004.
[11] V. G. BERKOVICH – *Integration of one-forms on p-adic analytic spaces*, Annals of Mathematics Studies 162, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2006, 168 pp.
[12] V. G. BERKOVICH – *A non-Archimedean interpretation of the weight zero subspaces of limit mixed Hodge structures*, prépublication (août 2006, version révisée en novembre 2006).

[13] S. BOSCH and W. LÜTKEBOHMERT – *Formal and rigid geometry. I. Rigid spaces*, Math. Ann. **295** (1993), n^o. 2, 291-317.

[14] S. BOSCH and W. LÜTKEBOHMERT – *Formal and rigid geometry. II. Flattening techniques*, Math. Ann. **296** (1993), n^o. 3, 403-429.

[15] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT and M. RAYNAUD – *Formal and rigid geometry. III. The relative maximum principle*, Math. Ann. **302** (1995), n^o. 1, 1-29.

[16] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT and M. RAYNAUD – *Formal and rigid geometry. IV. The reduced fibre theorem*, Invent. Math. **119** (1995), n^o. 2, 361-398.

[17] P. BOYER –*Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale*, Invent. Math. **138** (1999), n^o. 3, 573-629.

[18] A. CHAMBERT-LOIR – *Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich*, à paraître dans J. reine angew. Math.

[19] W. CHERRY – *Non-Archimedean analytic curves in abelian varieties*, Math. Ann. **300** (1994), n^o. 3, 393-404.

[20] W. CHERRY – *A survey of Nevanlinna theory over non-Archimedean fields*, *in* International Workshop on Value Distribution Theory and Its Applications (Hong Kong, 1996). Bull. Hong Kong Math. Soc. **1** (1997), n^o. 2, 235-249.

[21] W. CHERRY – *Non-Archimedean big Picard theorems*, prépublication sur ArXiv, référence math.AG/0207081.

[22] W. CHERRY and M. RU – *Rigid analytic Picard theorems*, Amer. J. Math. **126** (2004), n^o. 4, 873-889.

[23] R. COLEMAN – *Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions*, Invent. Math. **69** (1982), n^o. 2, 171–208.

[24] J.-F. DAT – *Espaces symétriques de Drinfeld et correspondance de Langlands locale*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup **39** (2006), n^o. 1, 1-74.

[25] A. DUCROS – *Cohomologie non ramifiée sur une courbe p-adique lisse*, Compositio Math. **130** n^o. 1 (2002), 89-117.

[26] A. DUCROS – *Parties semi-algébriques d'une variété algébrique p-adique*, Manuscripta Math. **111** n^o. 4 (2003), 513-528.

[27] A. DUCROS – *Espaces analytiques p-adiques au sens de Berkovich*, exposé **958** du séminaire Bourbaki, mars 2006.

[28] C. FAVRE and M. JONSSON – *The valuative tree*, Lecture Notes in Mathematics **1853**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[29] C. FAVRE and M. JONSSON – *Valuative analysis of planar plurisubharmonic functions*, Invent. Math. **162**, n^o. 2, 2005.

[30] C. FAVRE et J. RIVERA-LETELIER – *Théorème d'équidistribution de Brolin en dynamique p-adique*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **339** (2004), n^o. 4, 271-276.

[31] C. FAVRE et J. RIVERA-LETELIER – *Équidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective*, Math. Ann. 335 (2006), n^o. 2, 311-361.

[32] W. GUBLER – *Tropical varieties for non-archimedean analytic spaces*, prépublication sur ArXiv, réf. math.NT/0609383, sept. 2006.

[33] W. GUBLER – *The Bogomolov conjecture for totally degenrated abelian varieties*, prépublication sur ArXiv, réf. math.NT/0609387, sept. 2006.

[34] M. HARRIS – *Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfeld upper half spaces ; elaboration of Carayol's program*, Invent. Math. **129** (1997), 75-119.

[35] M. HARRIS and R. TAYLOR –*The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Ann. Math. Studies **151**(2001).

[36] T. HAUSBERGER – *Uniformisation des variétés de Laumon-Rapoport-Stuhler et conjecture de Drinfeld-Carayol*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** (2005), n^o. 4, 1285–1371.

[37] R. HUBER – *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects of Mathematics **E 30.** Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996.

[38] K. KATO – *A Hasse principle for two-dimensional global fields*, with an appendix by Jean-Louis Colliot-Thélène, J. reine angew. Math. **366** (1986), 142-183.

[39] M. KONTSEVICH and Y. SOIBELMAN – *Affine structures and non-archimedean analytic spaces*, prépublication sur ArXiv, référence math.AG/0406564, 2004.

[40] M. RAYNAUD – *Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl,$\cdots$*, *in* Table Ronde d'Analyse non archimédienne (Paris, 1972), pp. 319-327. Bull. Soc. Math. France, Mem. N°. **39–40**, Soc. Math. France, Paris, 1974.

[41] J. RIVERA-LETELIER – *Espace hyperbolique p-adique et dynamique des fonctions rationnelles*, Compositio Math. **138** (2003), n°. 2, 199-231.

[42] J. RIVERA-LETELIER – *Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux*, in Geometric methods in dynamics. II. Astérisque N°. **287** (2003), xv, 147-230.

[43] J. RIVERA-LETELIER – *Points périodiques des fonctions rationnelles dans l'espace hyperbolique p-adique*, Comment. Math. Helv. **80** (2005), n°. 3, 593-629.

[44] D. A. STEPANOV – *A note on the dual complex associated to a resolution of singularities*, prépublication disponible sur ArXiv, référence math.AG./0509588, sept. 2005.

[45] L. SZPIRO, E. ULLMO and E. ZHANG – *Équirépartition des petits points*, Invent. Math. **127** (1997), n°. 2, 337-347.

[46] J. TATE – *Rigid analytic spaces*, Invent. Math. **12** (1971), 257–289.

[47] A. THUILLIER – *Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non archimédienne. Applications à la théorie d'Arakelov*, thèse soutenue à l'IRMAR, Université de Rennes 1 (2005).

[48] A. THUILLIER –*Géométrie toroîdale et géométrie analytique non archimédienne*, prépublication **10-2006** de l'Université de Regensburg.