

LIVRES

Arithmetic Noncommutative Geometry

M. MARCOLLI

American Mathematical Society, 2005. 136 p. ISBN : 0-8218-3833-4. \$ 29

L'ouvrage de M. Marcolli fait le bilan de ses travaux récents sur les interactions entre la géométrie non commutative « à la Connes » et la géométrie arithmétique. Le théorème de Gel'fand-Naimark donne une équivalence de catégories entre les espaces topologiques séparés localement compacts et les C^* -algèbres abéliennes. Cette dualité entre espaces géométriques et algèbres commutatives de fonctions a aussi été une des sources des travaux de Grothendieck qui a refondé la géométrie algébrique et la géométrie arithmétique sur cette base.

Depuis les années 80, Connes a développé des concepts et des outils pour appliquer les intuitions géométriques à des algèbres d'opérateurs non commutatives. Parmi ces derniers, on peut citer la K -théorie, la cohomologie cyclique, le caractère de Chern... Il a aussi introduit toute une famille d'exemples de telles algèbres qui apparaissent naturellement dans divers domaines des mathématiques. Tous ces exemples sont basés sur le fait que certaines relations d'équivalence sur des espaces (topologiques, mesurés ou lisses) ont un mauvais comportement du point de vue topologique, ce qui fait que l'espace topologique quotient ne possède pas suffisamment de fonctions (typiquement uniquement les constantes) pour décrire le comportement fin de la relation d'équivalence. L'idée est alors de remplacer l'algèbre des fonctions sur le « mauvais » quotient par une algèbre de convolution non commutative, qui contient les fonctions sur l'espace de départ mais aussi les opérateurs fournissant les identifications. C'est l'algèbre de convolution des fonctions sur le graphe de la relation d'équivalence considérée (on considère aussi diverses complétions de cette dernière). La force des travaux de Connes est de transposer de nombreux raisonnements de nature géométrique à ce nouveau type d'algèbres non commutatives.

Une des premières situations où ce type de mauvais quotient apparaît en théorie des nombres est dans le cadre de la théorie encore ouverte du corps de classe explicite pour les corps quadratiques réels (douzième problème de Hilbert). En effet, la théorie de la multiplication complexe affirme essentiellement que les extensions abéliennes des corps quadratiques *imaginaires* sont engendrées par des valeurs spéciales de certaines fonctions analytiques, appelées fonctions elliptiques. Ces nombres complexes peuvent aussi être considérés comme des coordonnées de points de torsion sur des courbes elliptiques complexes de la forme \mathbb{C}/α , où α est un idéal de l'anneau des entiers du corps quadratique considéré. Si on cherche à transposer cette construction au cas des corps quadratiques réels, on se heurte immédiatement au problème que l'analogue \mathbb{R}/α de la courbe elliptique est un mauvais quotient au sens ci-dessus. Manin a proposé dans son programme de multiplication réelle d'utiliser les outils de la géométrie non commutative pour faire

malgré tout de la géométrie avec cet objet étrange. La première bonne nouvelle dans cette direction est qu'il existe un analogue de la construction de la jacobienne dans ce contexte non commutatif (qui était déjà connu par Connes). Manin a grandement approfondi cette analogie entre courbes elliptiques et tores non commutatifs.

Les travaux de Matilde Marcolli exposés dans cet ouvrage permettent de mieux comprendre les interactions entre la géométrie arithmétique, la théorie des algèbres d'opérateurs, et certains aspects de la physique théorique. Ils ouvrent de larges perspectives et donnent un point de vue complètement nouveau dans l'étude géométrique d'un certain nombre d'objets dynamiques apparaissant en arithmétique comme les fractions continues, les orbites des opérateurs de Hecke sur les réseaux, les systèmes dynamiques associés par Deninger à la « fibre spéciale archimédienne » d'une variété algébrique sur un corps de nombres. Ces nouvelles constructions permettent de comprendre très concrètement la nature dynamique des constructions des facteurs eulériens des fonctions L des variétés algébriques qui apparaissent dans le programme de Deninger, dans le cas de la réduction totalement dégénérée.

Le premier chapitre donne une introduction aux concepts et aux outils de base de la géométrie non commutative « à la Connes ».

Le deuxième chapitre porte sur la courbe modulaire non commutative, ou en d'autres termes, sur l'étude en termes d'algèbres d'opérateurs de l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur le bord $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ du disque de Poincaré. L'auteur y construit des symboles modulaires limites, étudie la fonction zêta de Selberg de la courbe modulaire et le complexe modulaire en termes qui ne font intervenir que la géométrie de ce bord.

Le troisième chapitre porte sur la mécanique statistique quantique sur les \mathbb{Q} -réseaux, qui est une généralisation à $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}}$ de travaux de Bost et Connes sur $\mathrm{GL}_{1,\mathbb{Q}}$ (95). Elle y présente un bel exemple de système dynamique quantique tiré de la théorie des nombres et dont le comportement peut être étudié de manière très complète. Le système dynamique en rang 2, dont la construction est due à Connes et à l'auteur de cet ouvrage, fournit un cadre agréable pour traduire des résultats de théorie des nombres (étude des orbites de Hecke sur la courbe modulaire) dans le formalisme très compact et intuitif de la mécanique statistique quantique. Ces beaux systèmes présentent des transitions de phases liées aux pôles de leurs fonctions de répartitions, qui sont des fonctions zêtas de nature arithmétique. On regrettera cependant le fait que les places finies et infinies soient traitées différemment. Ce tort source de difficultés et très répandu en géométrie arithmétique semble d'ailleurs disparaître dans les travaux plus récents en rang 1 de Connes, Marcolli et Consani, mais le cas du rang 2 est de l'avis de tous beaucoup plus difficile à comprendre dans un cadre où toutes les places sont traitées de manière uniforme. Ce chapitre se termine par une explication des relations de ces systèmes avec la théorie du corps de classe explicite.

Le quatrième chapitre est un superbe patchwork des connaissances actuelles de l'interprétation en termes dynamiques des facteurs locaux archimédiens et totalement dégénérés des courbes sur les corps de nombres, i.e. de leur écriture à la Deninger. Précisons ce dernier point : C. Deninger a proposé un formalisme cohomologique qui permet de traiter les places archimédiennes et non archimédiennes de manière uniforme dans la description des facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques. Il en a ensuite déduit un formalisme conjectural pour traiter

des problèmes difficiles de théorie des nombres. M. Marcolli, prolongeant des travaux de Manin, utilise l'espace des géodésiques sur l'espace hyperbolique contenu dans la surface d'une courbe complexe pour donner un modèle de la réduction modulo l'infini de la courbe, ou plutôt du graphe dual de cette réduction. Elle montre que le facteur local archimédien peut-être calculé à partir du triplet spectral (variété riemannienne non commutative) que porte ce modèle du graphe dual de la réduction. Pour étayer son argumentation, elle considère aussi les courbes de Mumford (courbes p -adiques admettant une uniformisation analogue à l'uniformisation de Schottky) et donne une correspondance très précise entre ses constructions archimédiennes et les constructions usuelles du graphe dual de la réduction pour une courbe de Mumford (travaux joints avec K. Consani). Ce chapitre se termine par une étude précise de la cohomologie archimédienne (dont la construction est due à Consani), et de ses relations avec la théorie de la renormalisation, qui permettent de donner un éclairage nouveau sur la monodromie archimédienne.

Pour conclure, on dira que ce livre passionnant donne une belle introduction aux interactions entre géométrie arithmétique, géométrie non commutative et physique mathématique. Cette introduction permettra d'aborder sereinement et avec des exemples concrets en tête les problématiques posées par le programme de Deninger, la description des facteurs locaux archimédiens, certains aspects dynamiques de la théorie des opérateurs de Hecke, et la théorie de la renormalisation dans son expression par Connes, Kreimer, et Marcolli. Le chapitre Vista donne un aperçu des possibles développements de ce travail interdisciplinaire et plein d'originalité, qui ne manquera pas d'intéresser les chercheurs sensibles aux interactions actuelles entre mathématiques fondamentales et physique théorique.

*Frédéric Paugam,
Institut de Mathématiques de Jussieu*

A Geometric Approach to Free Boundary Problems

L. CAFFARELLI, S. SALSA

American Mathematical Society, 2005. 270 p. ISBN : 0-8218-3784-2. \$ 49

Cet ouvrage est principalement consacré à l'étude de la régularité des solutions de problèmes à frontière libre elliptiques et paraboliques. Il est destiné en priorité à des chercheurs ayant une certaine familiarité avec les équations aux dérivées partielles non linéaires; cependant, mise à part quelques propriétés élémentaires des fonctions harmoniques (principe du maximum, inégalité de Harnack...), aucune connaissance a priori n'est requise pour la lecture de ce livre.

Bien que les démonstrations soient parfois très techniques, cet ouvrage est rédigé très clairement et est très agréable à lire, les auteurs ayant apporté un soin particulier à la présentation heuristique des arguments. De nombreuses méthodes utilisées sont de natures géométriques et les auteurs n'hésitent pas à souligner les similarités avec la théorie des surfaces minimales. Tous les résultats et toutes les démonstrations sont présentées en détails, ce qui fait de ce livre une référence précieuse pour l'étude des problèmes à frontière libre.

Un problème à frontière libre typique est le suivant : Trouver une fonction $u(x) \geq 0$ définie sur un ensemble Ω telle que

$$\Delta u = 0 \quad \text{lorsque } u > 0,$$

et satisfaisant la condition suivante (condition de frontière libre) :

$$|u_\nu| = 1 \quad \text{sur } \partial\{u > 0\} \cap \Omega$$

(où u_ν est la dérivée de u dans la direction normale à $\partial\{u > 0\}$). On dira que u est une solution classique si, entre autre, $\partial\{u > 0\} \cap \Omega$ est une hypersurface de classe C^1 et u est C^1 dans $\overline{\{u > 0\}} \cap \Omega$. Malheureusement, l'existence d'une telle solution est rarement assurée. Il existe différentes méthodes (variationnelle, limite singulière, viscosité) permettant de construire des solutions dans un sens faible. La difficulté consiste alors à déterminer la régularité de ces solutions et de leur frontière libre. C'est cette question qui est au centre de ce livre. En d'autres mots, les auteurs étudient le lien entre solutions faibles et solutions classiques des problèmes à frontière libre.

Le livre est organisé en trois parties. Dans la première partie, les auteurs montrent l'existence et la régularité des solutions de viscosité pour une large classe de problèmes elliptiques. La deuxième partie aborde le cas des problèmes paraboliques à frontière libre. Des outils importants de la théorie des fonctions harmoniques et caloriques sont présentés dans la troisième partie.

Première Partie : problèmes elliptiques

La première partie est consacrée à l'étude du problème à frontière libre suivant :

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{dans } \{u > 0\} \cup \{u \leq 0\}^\circ \cap \Omega \\ G(u_\nu^+, u_\nu^-) &= 0 && \text{sur } \partial\{u > 0\} \cap \Omega, \end{aligned}$$

lorsque $G(a, b)$ est une fonction strictement croissante par rapport à a et strictement décroissante par rapport à b (on dit aussi que G est elliptique).

Les auteurs construisent une théorie complète des solutions de viscosité pour ce type d'équation (existence et régularité des solutions).

– **Régularité** : lorsque l'on étudie la régularité de la surface libre, on distingue les résultats de régularité faible (régularité en mesure) et forte (régularité $C^{1,\alpha}$).

Dans les trois premiers chapitres, les auteurs introduisent la notion de solutions de viscosité et discutent les résultats de régularité faible. Le cas bien connu des solutions variationnelles est présenté dans le premier chapitre. Le point le plus important, qui est repris dans le chapitre 3 dans un cadre plus général est le fait que si une solution faible est (1) uniformément Lipschitz (donc en particulier croît de façon au plus linéaire au voisinage de la frontière libre), et (2) non-dégénérée (croît de façon exactement linéaire au voisinage de la frontière libre) alors la frontière libre est de mesure de Hausdorff \mathcal{H}^{n-1} finie. En particulier, $\{u > 0\}$ est un ensemble de périmètre fini (au sens du calcul des variations), ce qui permet de donner un sens à la condition de frontière libre en mesure : Δu est une mesure de Dirac dont le support est concentré le long de la frontière libre.

Dans les chapitres 4 et 5, qui constituent le cœur de cette première partie, les résultats de régularité forte sont démontrés. Les résultats principaux sont les suivants :

- (i) si la frontière libre est Lipschitz, alors elle est $C^{1,\alpha}$ (chapitre 4),
- (ii) au voisinage des points "plats", la frontière libre est Lipschitz (chapitre 5).

Notons que ce type de résultats (amélioration de la régularité) sont tout à fait dans l'esprit de la théorie de De Giorgi pour l'étude des surfaces minimales.

– **Existence** : pour conclure cette première partie, le chapitre 6 est dédié à l'existence de solutions faibles. Les auteurs montrent l'existence de solutions de viscosité qui vérifient les conditions nécessaires à l'application des résultats de régularité établis dans les chapitres précédents. La construction de telles solutions repose essentiellement sur la méthode de Perron (plus petite supersolution). Il faut cependant noter qu'une telle construction est loin d'être immédiate. En effet, il est bien connu qu'il existe des solutions de viscosité qui sont dégénérées, ou dont la frontière libre est non régulière (rappelons qu'il n'y a pas, en général, unicité de la solution, même classique). Les auteurs considèrent donc une classe de supersolutions admissibles construite avec soin afin d'éviter ces solutions indésirables : Ils imposent que ces supersolutions soient régulières "à gauche" (c'est-à-dire telle qu'il existe une boule tangente à la frontière libre dans $\{u \leq 0\}^\circ$ en tout point de la frontière libre) et qu'elles aient un comportement linéaire approprié au voisinage de la frontière libre.

Grâce aux résultats de régularité de la première partie, la frontière libre de la solution ainsi construite est régulière ($C^{1,\alpha}$) \mathcal{H}^{n-1} -presque partout. En particulier, la condition de frontière libre est satisfaite au sens classique sauf peut-être sur un ensemble de dimension de Hausdorff strictement inférieure à $n - 1$.

Deuxième Partie : problèmes d'évolution

Un des exemples les plus connus (et les plus étudiés) de problème d'évolution à frontière libre est le problème de Stefan. Celui-ci peut être vu comme un cas particulier du problème suivant, qui fait l'objet de cette deuxième partie : Trouver une fonction $u(x, t)$, continue dans $\Omega = B_1 \times (-1, 1)$, telle que

$$\begin{aligned} \Delta u - a_1 u_t &= 0 && \text{dans } \{u > 0\} \cap \Omega \\ \Delta u - a_2 u_t &= 0 && \text{dans } \{u \leq 0\}^\circ \cap \Omega \end{aligned}$$

et telle que la condition de frontière libre suivante soit satisfaite :

$$V_\nu = -G(u_\nu^+, u_\nu^-) \quad \text{le long de } \partial\{u > 0\} \cap \Omega$$

où V_ν est la vitesse de la surface $\partial\{u > 0\} \cap \{t = \tau\}$ dans la direction $\nu = \nabla u^+ / |\nabla u^+|$.

Comme dans le cas elliptique, les auteurs introduisent la notion de solutions de viscosité (chapitre 7), puis s'intéressent à la régularité de ces solutions.

Tout d'abord, la régularité optimale (Lipschitz) des solutions ayant une frontière libre Lipschitz en espace et en temps est établie dans le chapitre 8.

Concernant la régularité de la frontière libre, notons que contrairement au cas elliptique, on ne peut pas espérer montrer, en général, que si la frontière libre est

Lipschitz, alors celle-ci est en fait C^1 . Des contre-exemples sont présentés dans le chapitre 8.

Donc pour obtenir mieux que la régularité Lipschitz, il faut faire des hypothèses supplémentaires sur la solution. C'est l'objet du chapitre 9, dans lequel les auteurs étudient les propriétés des solutions vérifiant une condition de non-dégénérescence supplémentaire. Sous cette condition, il est en particulier démontré que les solutions de viscosité avec frontière libre Lipschitz sont en fait des solutions classiques (frontière libre C^1).

Enfin, les auteurs montrent que cette condition de non-dégénérescence est la conséquence d'une condition géométrique sur la frontière libre similaire à la condition de platitude dans le cas elliptique : l' ε -monotonie. Dans le chapitre 10, il est ainsi établi que si une solution de viscosité est ε -monotone, alors la frontière libre est C^1 et la solution est une solution classique.

Troisième partie

Dans cette dernière partie, les auteurs ont regroupé des résultats importants de la théorie des fonctions harmoniques et caloriques qui sont utilisés dans les deux premières parties.

Le chapitre 11 est dédié à l'étude du comportement au bord des fonctions harmoniques : Lemme de DeGiorgi, inégalité de Harnack au bord, ainsi que quelques résultats sur les mesures harmoniques. Il est en particulier démontré que les fonctions harmoniques qui s'annulent au bord ont un comportement asymptotique linéaire au voisinage des points réguliers du bord, résultat fondamental qui permet aux auteurs de caractériser les solutions de viscosité en fonction de leur développement asymptotique au voisinage des points réguliers.

Dans le chapitre 12, les formules de monotonies, outils importants pour l'étude des problèmes à frontière libre, sont rappelées et démontrées.

Le chapitre 13 traite du comportement au bord des fonctions caloriques.

*Antoine Mellet,
University of Texas at Austin*

Resolution of singularities

STEVEN DALE CUTKOSKY

American Mathematical Society, 2004. 390 p. ISBN : 0-8218-3555-6. \$ 39

Pendant une bonne vingtaine d'années après sa parution, le grand article de Hironaka sur la résolution des singularités des variétés algébriques sur un corps de caractéristique zéro (Annals of Math., vol. 79, No.1 et No.2, Janvier et Mars 1964) a été considéré comme un sommet de la difficulté mathématique, impossible à gravir sans une longue préparation et un très fort engagement. Et voici un ouvrage de la collection « Graduate Studies in Mathematics », qui prétend offrir aux étudiants en Master une preuve de ce résultat, et aussi d'une bonne partie de ce qui est connu en caractéristique positive. Qu'en est-il ? Disons tout de suite que l'ouvrage tient ses promesses ; il donne une introduction élégante à l'ensemble du sujet, avec des preuves complètes et cependant accessible aux doctorants.

Rappelons que les résultats sont les suivants : Etant donnée une variété algébrique X , (disons géométriquement réduite et irréductible, mais on peut énoncer et prouver un résultat tout à fait général) sur un corps de caractéristique zéro k , il existe un k -morphisme $\pi: X' \rightarrow X$ propre et birationnel, tel que X' soit sans singularités. De plus π est un isomorphisme en dehors du lieu singulier de X et est composé d'éclatements de centre lisse. On peut aussi faire en sorte que l'image réciproque du lieu singulier de X soit un diviseur à croisements normaux dans X' . Cela signifie que toutes ses composantes, une fois réduites, sont des hypersurfaces non singulières dans X' qui en chaque point de X' se rencontrent comme des hyperplans de coordonnées en nombre $\leq \dim X'$.

Le théorème de *résolution plongée* dit que si X est une sous-variété fermée d'une variété non singulière Z , il existe un morphisme propre et birationnel $\Pi: Z' \rightarrow Z$ tel que la *transformée stricte* X' de X , c'est à dire la composante irréductible de $\Pi^{-1}(X)$ qui s'envoie birationnellement sur X par Π , soit non singulière et transverse au diviseur exceptionnel de Π , qui est lui-même un diviseur à croisements normaux dans Z' .

Le principe de la démonstration de Hironaka, qui est repris dans toutes les preuves ultérieures, était de démontrer par récurrence sur la dimension l'existence de suites finies d'éclatements « permis », en particulier de centre lisse et telles que l'espace obtenu à la fin soit sans singularités. L'idée de la récurrence était qu'il suffit de prouver l'existence de telles suites ayant la propriété que le maximum pris sur les points de la variété d'un invariant local des singularités a strictement diminué pour l'ordre produit. L'invariant local est ici la fonction de Hilbert-Samuel $H_{X,x}: N \rightarrow N$ qui à chaque anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ associe la suite des $H_{X,x}(i) = \dim_k \mathcal{O}_{X,x} / m_{X,x}^i$. La fonction de Hilbert-Samuel ne peut que diminuer au sens large lors d'un éclatement permis $p: X_1 \rightarrow X$, c'est à dire que pour tout point $x_1 \in X_1$ on a pour tout $i \geq 1$ l'inégalité $H_{X_1,x_1}(i) \leq H_{X,p(x_1)}(i)$ (si $\dim p(x_1) < \dim x_1$ il faut compliquer un peu). Par ailleurs les éclatements permis sont exactement les éclatements de centre lisse $S \subset X$ le long duquel la fonction de Hilbert-Samuel reste la même ; $H_{X,x}$ ne dépend pas de $x \in S$.

L'idée suivante, celle du *contact maximal*, est la partie qui fait défaut en caractéristique positive. En caractéristique zéro on montre l'existence, en chaque point $x \in X$, de sous-variétés non singulières W de dimension $\leq \dim X$ d'un espace ambiant lisse local Z , qu'une suite d'éclatements permis de Z ne peut séparer de X au sens des transformées strictes que si la fonction de Hilbert-Samuel a diminué strictement. Le pas suivant est de coder cette séparation comme conséquence de la résolution des singularités d'une donnée nouvelle, un *exposant idéaliste*, qui est une paire formée d'un faisceau cohérent d'idéaux \mathcal{I} sur W et d'un entier b , la « singularité » étant mesurée par le quotient $\frac{\nu_x(\mathcal{I})}{b}$, où $\nu_x(\mathcal{I}) = \max\{i \mid \mathcal{I} \subset m_{X,x}^i\}$. Enfin, la résolution des singularités de l'exposant idéaliste résulte de la résolution des singularités des sous-espaces de W . Cette présentation rapide est malheureusement approximative, la réalité de la récurrence étant plus compliquée. En outre les problèmes techniques sont considérables, en particulier à cause de la non-unicité des espaces ayant le contact maximal.

La démonstration a été passée au crible fin dans l'espoir de l'adapter en caractéristique positive mais sans succès jusqu'à présent, les progrès en dimension quelconque étant dus à des méthodes entièrement différentes (voir [dJ], [A-dJ], [K])

mais avec des résultats plus faibles que la résolution. Pour l'état de l'art en caractéristique positive, je renvoie à [Ab]. Il faut mentionner aussi les résultats récents de Cossart-Piltant sur la résolution en dimension 3 sur un corps quelconque.

Depuis une quinzaine d'années le désir de donner des méthodes algorithmiques de résolution ou de prouver l'existence de résolutions « canoniques » a fait faire des progrès importants dans la compréhension de la résolution en caractéristique zéro.

L'idée de base (voir [V], [B-M], [H], [W]) est de produire des invariants des singularités beaucoup plus fins que la fonction d'Hilbert-Samuel, à valeurs dans un ensemble ordonné et possédant la propriété que la « strate » des points de X où cet invariant est maximum est non-singulière (ou presque) et que l'éclatement de cette strate fait nécessairement baisser l'invariant. La fonction $H_{X,x}$ n'a aucune de ces deux propriétés. De plus, cet invariant n'est plus directement un invariant de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ mais se complique progressivement à mesure que l'on « monte » dans une suite d'éclatements de X .

Une idée nouvelle due à O. Villamayor est d'exprimer la résolution des singularités elle-même en termes de « basic objects », qui sont essentiellement des exposants idéalistes auxquels on a ajouté des diviseurs à croisements normaux dans W , ce qui fait que l'on n'a plus qu'un seul type de donnée à résoudre, et la fonction $H_{X,x}$ disparaît du paysage. Bien sûr, il faut définir le contact maximal pour de tels objets et prouver son existence, mais la récurrence se trouve épurée. De plus Włodarczyk a prouvé [W] que l'on pouvait choisir les « basic objects » de manière à surmonter les difficultés de non-unicité des espaces ayant le contact maximal, ce qui permet d'autres importantes simplifications.

Pour revenir au livre de Cutkosky, il présente réellement une introduction accessible à tous les aspects de la résolution. Il commence (Chapitre 1) par la définition des singularités en géométrie algébrique, puis explique à partir de l'exemple de la paramétrisation locale des courbes singulières par Newton ce que signifie la résolution et les liens avec la théorie des valuations et l'uniformisation locale, sans oublier la monomialisation, un sujet de prédilection de l'auteur.

Le chapitre 3 est consacré à la résolution plongée des courbes planes, source d'inspiration pour la méthode de Hironaka. Le lecteur pourra si nécessaire apprendre ici ce qu'est l'éclatement d'un point dans le plan.

Le Chapitre 4 est une courte présentation des éclatements en général et de résultats annexes de la résolution.

Le Chapitre 5 est consacré à une présentation très claire de la résolution des singularités des surfaces en caractéristique zéro par la méthode des « good points » d'Abhyankar.

Le Chapitre 6 est la démonstration de la résolution des singularités en général selon les algorithmes d'Encinas et Villamayor. La rédaction est très claire et détaillée.

Le Chapitre 7 concerne la résolution des singularités des surfaces en caractéristique positive, selon une méthode due à Hironaka qui généralise la méthode du polygône de Newton.

Le Chapitre 8 est consacrée à l'approche valuative de la résolution, conçue par Zariski, qui l'a menée à terme en caractéristique zéro en dimensions deux et trois en ce qui concerne la résolution, et en toute dimension pour le résultat « local » appelé uniformisation locale. Cette approche est tout à fait naturelle puisque une k -valuation du corps des fonctions rationnelles d'une variété algébrique X propre

sur un corps k est une manière de choisir de manière cohérente un point (non nécessairement fermé) dans chaque variété X' propre sur k et birationnellement équivalente à X , par exemple un éclatement de X . L'énoncé du théorème d'uniformisation locale ne portant que sur une seule valuation à la fois, le passage de cet énoncé à la résolution pose des problèmes de recollement redoutables. Aussi l'approche valuative a-t-elle été abandonnée après la démonstration de Hironaka, qui ne l'utilisait absolument pas, mais certains pensent qu'elle recèle des trésors en caractéristique positive. En tous cas on trouve ici la démonstration valuative de la résolution des surfaces, d'après Zariski, qui présente très bien les difficultés de « recollement des uniformisations locales ».

Le Chapitre 9 parle de la ramification des valuations dans une extension de corps de fonctions algébriques. La ramification des valuations est un vénérable sujet en théorie des nombres et dans la théorie des corps de fonctions cette ramification a fait l'objet d'études approfondies, en particulier par Abhyankar, et plus récemment dans une approche de l'uniformisation locale par F.-V. Kuhlmann (voir [K]). Ici le point essentiel, est la possibilité de rendre « visible » la ramification des valuations au moyen de morphismes d'anneaux locaux bien choisis dans les corps de fonctions. Un résultat de cette nature est le Théorème de Cutkosky-Piltant cité dans le Chapitre 9, qui comprend une généralisation de résultats de ramification de valuations entre anneaux de Dedekind.

Le style du livre est très agréable, les indispensables calculs sont éclairés par des explications géométriques et de nombreux exercices permettent au lecteur d'approfondir des points particuliers. C'est vraiment l'introduction qui manquait à un cercle d'idées dont beaucoup de géomètres, même parmi ceux qui en utilisaient les résultats, pensaient qu'il était réservé à un petit groupe d'experts.

[Ab] S. Abhyankar, *Resolution of singularities and modular Galois Theory*, Bull. AMS, **38**, 2, 131-169, 2001.

[A-dJ] D. Abramovich et A.J. de Jong, *Smoothness, semistability and toroidal geometry*, Journal of algebraic Geometry, **6**, (1997), 789-801.

[B-M] E. Bierstone et P. Milman, *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing-up the maximal strata of a local invariant*, Inv. Math., **128** (1997), 207-302.

[dJ] A.J. de Jong, *Smoothness, semistability and alterations*, Publ. Math. IHES., **83** (1996), 51-93.

[H] H. Hauser, *The Hironaka theorem on resolution of singularities (or : a proof we always wanted to understand)*, Bull. AMS., **40** (2003), 323-348.

[K-K] H. Knaf et F.-V. Kuhlmann, *Abhyankar places admit local uniformization in any characteristic*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., **38**, 2005, 833-846.

[V] O. Villamayor, *Constructiveness of Hironaka resolution*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., **22**, 1989, 1-32.

[W] J. Włodarczyk, *Simple Hironaka resolution*, Journ. Amer. Math. Soc., **18** (2005), No.4, 779-822.

*Bernard Teissier,
Institut mathématique de Jussieu, CNRS*

Un cours de théorie analytique des nombres

EMMANUEL KOWALSKI

Société Mathématique de France, 2004. 228 p. ISBN : 2-85629-161-9. 41 €

Ce livre est le fruit de la rédaction d'un cours de DEA donné par l'auteur au second semestre de l'année 2001-2002. L'objet de ce cours est de démontrer l'équirépartition des racines modulo p d'un polynôme irréductible de degré 2.¹ Pour p fixé, il y a évidemment au plus deux racines et il s'agit donc de considérer l'ensemble de ces racines lorsque l'on fait varier p . On considère donc un ensemble $\{(p, \nu) : p \leq x, \nu \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad P(\nu) = 0\}$.

Quand x tend vers $+\infty$, le cardinal de cet ensemble, noté $\varrho(x)$, est équivalent à $\pi(x)$, le nombre des nombres premiers $\leq x$. Pour mesurer l'équirépartition de ces racines, on regarde les parties fractionnaires $\{\nu/p\}$ et on montre qu'elles se répartissent harmonieusement dans les sous-intervalles de $[0, 1]$. Il s'agit donc d'établir pour tous $0 \leq a < b \leq 1$ l'équivalent asymptotique

$$(*) \quad \text{card}\{(p, \nu) : p \leq x, \nu \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad P(\nu) = 0, a \leq \{\nu/p\} \leq b\} \sim (b - a)\varrho(x)$$

lorsque x tend vers l'infini. Ce résultat d'énoncé très simple n'a été établi qu'il y a dix ans par Duke, Friedlander, Iwaniec dans un article à *Annals of Mathematics*. Ce très joli résultat de théorie analytique des nombres est intéressant parce qu'il mêle techniques de crible et utilisation de la théorie des formes automorphes.

Un livre de 228 pages ne peut évidemment pas être exhaustif ni même complet sur un sujet aussi riche. Il reflète les partis pris de l'auteur. La démarche originale de démontrer un résultat d'énoncé fort simple pour illustrer la richesse de la théorie analytique des nombres fournit l'occasion de rappels de résultats classiques concernant l'existence des racines modulo p de $X^2 + 1$, les séries de Dirichlet, l'approximation d'un réel par un rationnel. Cela permet de donner des indications historiques intéressantes. Cela permet également à Emmanuel Kowalski de nous livrer des heuristiques sur des problèmes subtils. Il est certain que ces notes de cours seront très utiles d'une part aux étudiants recherchant une présentation succincte de la théorie analytique des nombres et d'autre part aux nombreux chercheurs français travaillant sur les formes automorphes désireux de découvrir la richesse et la puissance des méthodes de théorie analytique des nombres.

Par le choix même du sujet, ce livre n'a pas vocation à être un livre de référence : le livre de Tenenbaum *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres* qui est le premier volume dans cette collection de la SMF ou les livres d'Iwaniec *Introduction to the spectral Theory of Automorphic Forms* et *Topics in classical modular forms* remplissent depuis une dizaine d'années parfaitement ce rôle. Ici, la présentation est ordonnée de manière moins systématique. Le lecteur met parfois beaucoup de temps à trouver l'énoncé recherché ; de plus, certains énoncés n'ont pas toujours la précision requise (Au lemme 5.4.1, on doit remplacer z par $2z$ pour qu'il soit juste pour $z = \sqrt{x}$). C'est plutôt un livre que l'on lit chronologiquement pour découvrir un domaine.

Détaillons maintenant le contenu des différents chapitres. Les cinq premiers présentent les résultats classiques liés au théorème des nombres premiers en progression arithmétique et à l'utilisation du crible tandis que les trois suivants présentent

¹ Ici, et dans toute la suite, la lettre p est réservée pour désigner un nombre premier.

rapidement les outils nécessaires de la théorie des formes automorphes nécessaires pour démontrer le théorème d'équirépartition et ses applications.

Dans le chapitre introductif, l'auteur présente le théorème qu'il veut démontrer avec les préliminaires nécessaires à la compréhension de l'énoncé. Il décrit ensuite les deux thèmes principaux de ce livre : le crible et les formes modulaires.

Le deuxième chapitre expose des résultats classiques sur les séries de Dirichlet et en particulier les fonctions L de Dirichlet. Ainsi au lieu d'estimer la somme $\sum_{n \leq x} f(n)$ où f est une fonction arithmétique, il est souvent utile de considérer les sommes pondérées $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)g_{\Delta}(n/x)$ où g_{Δ} est une fonction de support inclus dans $[0, \Delta]$ avec $\Delta > 1$ à valeur dans $[0, 1]$. En ajustant la valeur de Δ , on peut retrouver en règle générale une estimation de la fonction sommatoire de f qui peut être moins précise. Ces sommes sont appelées lisses par l'auteur. Lorsque g_{Δ} est une fonction de Schwartz, on a sous des conditions très générales la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)g_{\Delta}(n/x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} D_f(s)\widehat{g}_{\Delta}(s)x^s ds.$$

où $D_f(s)$ est la série de Dirichlet associée à f et \widehat{g}_{Δ} est la transformée de Mellin de g_{Δ} . L'abscisse c est ici positive et supérieure à l'abscisse de convergence absolue de $D_f(s)$. Ce développement sur les sommes lisses se justifie par leur utilisation dans la preuve du théorème. L'avantage des sommes lisses réside dans leur représentation sous forme d'intégrales complexes absolument convergentes.

Le chapitre 3 est consacré au théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques c'est-à-dire une estimation de

$$\psi(x; a, q) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n)$$

lorsque a et q sont premiers entre eux où $\Lambda(n)$ est la fonction de von Mangoldt qui vaut $\log p$ aux puissances d'un nombre premier p et 0 aux entiers ayant au moins deux facteurs premiers distincts. Le terme principal attendu est de la forme $x/\varphi(q)$ où φ est la fonction d'Euler. Une sommation d'Abel permet de passer facilement d'une estimation de cette somme à celle du cardinal des nombres premiers dans la progression arithmétique $a \pmod{q}$. L'auteur démontre d'abord une estimation de sommes lisses associées pour en déduire l'équivalent sans estimation effective du terme d'erreur ni recherche d'uniformité par rapport à la taille de q . Le lecteur trouvera une estimation uniforme par rapport à q au Corollaire 4.3.4 du chapitre suivant. L'exercice 3.4.5 fournit aussi une démonstration classique de ce type d'estimation. Dans un énoncé caché à la fin de ce chapitre, l'auteur démontre un équivalent de la fonction $\varrho(x)$ apparaissant dans (*).

Dans le chapitre 4, sont exposés les problèmes d'uniformité en q de l'estimation de $\psi(x; a, q)$. On y démontre le théorème de Siegel–Walfisz, qui fournit une estimation uniforme de $\psi(x; a, q)$ lorsque q est plus petit qu'une puissance de $\log x$. Le théorème de Bombieri–Vinogradov, qui peut être vu comme le théorème des nombres premiers en moyenne sur les progressions arithmétiques de module plus petit qu'une borne de la forme $\sqrt{x}/(\log x)^B$, est énoncé. Son utilité est motivée par un exemple : l'estimation asymptotique de la somme $\sum_{p \leq x} \tau(p-1)$ où $\tau(n)$ compte le nombre des diviseurs de l'entier n . À la remarque 4.1.5, l'auteur introduit

la notion de sous-borne de convexité. Le principe de Phragmén-Lindelöf appliqué à une série de Dirichlet admettant une équation fonctionnelle permet d'obtenir une majoration de cette série dans la bande critique. C'est ce que l'on appelle une borne de convexité. Une sous-borne de convexité est une majoration améliorant l'exposant intervenant dans l'écriture de la borne de convexité. Cette notion qui s'affirme comme de plus en plus fondamentale actuellement aurait sans doute mérité une meilleure visibilité. Contrairement à ce que certains reprochent à la théorie analytique des nombres, il ne s'agit pas là d'améliorer des exposants pour le plaisir. Battre les bornes de convexité permet des bonds qualitatifs dans certains problèmes de nature arithmétique : voir par exemple l'équirépartition des points entiers sur la sphère de rayon n dans l'espace de dimension 3 et la preuve donnée par Iwaniec.

Le chapitre 5 est une présentation du crible qui débouche sur le *crible oscillant* de Duke–Friedlander–Iwaniec nécessaire à la preuve de (*). Les méthodes classiques de crible permettent de majorer un cardinal des nombres premiers appartenant à un ensemble fini à partir de la bonne répartition des éléments de cet ensemble dans les progressions arithmétiques de la forme $0 \pmod{d}$. Si on veut étendre cette méthode à des sommes de la forme $\sum_n a_n$, il faut veiller au caractère positif des coefficients a_n . Le crible oscillant s'affranchit de cette restriction en permettant que les a_n soient complexes. Nous avons particulièrement apprécié dans ce chapitre, d'une part, la présentation heuristique du terme principal que l'on doit obtenir grâce au crible et, d'autre part, la démonstration complète d'une version simple d'un crible oscillant. Emmanuel Kowalski a choisi ici de manière très pertinente d'illustrer son propos en détaillant le cas de l'estimation de la somme $\sum_{p \leq x} e(\alpha p)$ où $e(t) = \exp(2\pi it)$. C'est une très bonne préparation à la démonstration du théorème de Duke–Friedlander–Iwaniec.

Les chapitres 6 et 7 introduisant les notions nécessaires concernant les formes automorphes nécessitent de connaître le sujet. Leur lecture devient alors enrichissante puisque de nombreuses heuristiques sont présentées. Dans certains cas, les preuves nécessitant de longs développements sont omises ; à d'autres endroits, seul un schéma de la démonstration est donné.

Nous décrivons maintenant les étapes de la preuve du théorème de Duke–Friedlander–Iwaniec. Grâce au critère de Weyl, il s'agit de montrer que pour tout $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ on a

$$\sum_{p \leq x} \varrho_h(p) = o\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

où $\varrho_h(n) = \sum_{P(\nu) \equiv 0 \pmod{n}} e(h\nu/n)$ et P est un polynôme irréductible de degré 2. En fait, on peut considérer des sommes pondérées où le coefficient de pondération est de la forme $g(p/x)$.

Le crible oscillant de Duke–Friedlander–Iwaniec permet de se ramener à majorer des sommes dites linéaires

$$\sum_m \sum_d \alpha_d a_{md}$$

et bilinéaires

$$\sum_m \sum_n \beta_n \gamma_m a_{mn}$$

où $a_n = \varrho_h(n)g(n/x)$ et les $\alpha_d, \beta_n, \gamma_m$ sont des complexes de module ≤ 1 . Or $\varrho_h(n)$ peut s'exprimer comme une somme sur certains quotients de $SL_2(\mathbb{Z})$. Apparaissent

donc des séries de Poincaré. Elles sont introduites au corollaire 6.1.12 mais leur nom n'est mentionné qu'au début de l'introduction du chapitre 7. Le lien avec les formes automorphes est donc ainsi fait.

Le chapitre 8 permet de rassembler les estimations obtenues au chapitre 7 pour démontrer le théorème de Duke–Friedlander–Iwaniec.

Ce livre, dont nous conseillons la lecture à tous, enrichira la bibliothèque des arithméticiens. On peut toutefois regretter la difficulté de se retrouver dans certains endroits de ce cours avec une politique de renvoi discutable. L'auteur a mis en ligne une liste d'erreurs et de coquilles que nous invitons à consulter à l'adresse <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~kowalski/dea/corrections.pdf>.

*Régis de la Bretèche,
Université Paris Sud–Orsay*

Les mathématiques dans le monde scientifique contemporain - Rapport sur la Science et la Technologie n° 20, novembre 2005

ACADÉMIE DES SCIENCES

Editions TEC & DOC, 2005. 330 p. ISBN : 2-7430-0825-3. 65 €

Présentation générale du rapport

La lecture du rapport, issu d'un groupe de travail mis en place par l'Académie des Sciences et animé par Jean-Christophe Yoccoz est passionnante pour un-e mathématicien-ne car des scientifiques de disciplines variées y décrivent l'importance des mathématiques pour leur développement propre. Il ne s'agit aucunement dans de nombreux cas de « mathématiques de service », mais bien de mathématiques vivantes, à la pointe du progrès des connaissances actuelles, voire de problèmes ouverts venant de la demande d'autres disciplines.

Pour broser quelques grandes lignes de l'intervention des mathématiques dans le paysage scientifique contemporain tel que les décrit le rapport : les interactions des mathématiques avec la physique et l'astronomie restent un moteur fondamental du progrès de ces disciplines, les relations des mathématiques avec les sciences chimiques, biologiques et économiques se développent et se diversifient, et le développement de cette discipline sœur qu'est l'informatique crée une révolution dans le paysage scientifique. Le rapport ne prétend aucunement à l'exhaustivité : tout ce qui concerne les mathématiques dans les industries et les services n'a pas pu être traité et une autre étude spécifique à cette question est prévue.

Liens entre mathématiques et neurosciences

Il est évidemment impossible de résumer un document très riche de plus de 300 pages en quelques lignes. J'ai choisi d'évoquer rapidement le chapitre coordonné par Alain Berthoz sur les liens entre mathématiques et neurosciences, mais ce choix est arbitraire et tous les chapitres mériteraient un traitement analogue.

Alain Berthoz aborde trois sujets : l'implication de plus en plus profonde des mathématiques dans les neurosciences intégratives et cognitives, la manière dont selon lui les progrès dans ces disciplines sont en train d'enrichir les conceptions

classiques de l'origine, des fondements et de la nature des mathématiques et les avancées nouvelles qu'elles suscitent en mathématiques.

« En physique les mathématiques énoncent des lois simples et servent à construire des expériences testant les conséquences de ces lois... On isole des phénomènes, on leur donne un sens grâce aux mathématiques, en proposant des entités (des invariants) et une organisation globale. » Rien de tel en sciences du vivant, dont font partie les sciences cognitives. « L'individu vivant, de la cellule au mammifère, s'impose par son unité, sa structure et son organisation, la richesse de ses fonctions. Tout modèle mathématique ne saisit que quelques aspects de cette unité; en général il est nettement plus pauvre et moins structuré que le sujet d'étude : tout découpage mathématique, jusqu'à présent, casse l'unité de l'individu et de l'écosystème. » S'agit-il d'un état d'avancement différent de la connaissance ou d'une différence de nature? Il y a un défi intellectuel à relever : trouver un cadre mathématique adapté aux neurosciences.

Les résultats à l'interface des mathématiques et des sciences du vivant sont déjà nombreux, faisant appel à des mathématiques très variées, et pour beaucoup développées au départ en interface avec la physique : physique statistique, géométrie des systèmes dynamiques, équations différentielles non linéaires, traitement du signal et méthodes numériques. Onze domaines dans lesquels les mathématiques ont joué un rôle clé en neurosciences sont identifiés, des équations de l'influx nerveux à la géométrie de l'architecture fonctionnelle du cortex, de l'évaluation des activités collectives de populations de neurones dans la magnéto-encéphalographie au traitement d'images. C'est à une description de cet état des lieux que se consacre la première partie du chapitre.

La deuxième partie du chapitre s'interroge à partir de ce que nous enseignent les cognosciences en matière de perception des objets, de géométrie et contrôle du geste et de la posture sur le rôle de la constitution de l'espace des actions et du traitement des images dans l'origine de la géométrie. Quels rapports entre construction géométrique conceptuelle et structures sensorimotrices? Le questionnement est dual : quels outils géométriques peuvent aider à comprendre et organiser les structures cérébrales intégrées? Quels principes de construction géométrique trouvent leur genèse dans la construction des références spatiales dues à l'intégration cérébrale multisensorielle?

La troisième partie du chapitre contient quelques éléments de prospective. Pour favoriser les développements utiles, il faut une meilleure formation et de meilleurs échanges entre les deux communautés, les résultats obtenus parmi les uns et les autres étant mal connus, et l'accès à la littérature publiée difficile par incompréhension de la terminologie et de la méthodologie adoptée de part et d'autre. Au delà de la poursuite des travaux pluridisciplinaires qui ont déjà fait leurs preuves, les équipes du futur devraient rassembler des neurobiologistes avec des mathématiciens de nature variés, du géomètre à l'algébriste, du roboticien au statisticien. « Le cerveau sépare les données sensorielles en groupes organisés., il les travaille localement dynamiquement, puis il retravaille sur son propre travail, en élaborant des groupes dynamiques de plus en plus abstraits. Il construit ses commandes d'action dans des repères multiples. D'où un problème de compatibilité des recollements et de cohérence des prévisions. » Une association entre la topologie algébrique et la théorie de l'information et les probabilités est donc à l'ordre du jour.

Le chapitre se termine par une page stimulante intellectuellement, qui d'ailleurs –comme le signale Alain Connes dans sa présentation à l'Académie, donnée en fin de volume– ne fait pas l'unanimité des académiciens et qui traite de l'enseignement et de l'épistémologie des mathématiques. Enseignement de type grammatical, calcul dénué de signification, reçu comme une punition par tout élève, tel seraient les conséquences de l'approche formaliste de Frege et Hilbert, qui ne rend pas compte de l'enracinement des mathématiques dans notre expérience sensorielle. Raconter que « la pensée est un calcul », c'est vouloir modeler le fonctionnement cognitif sur celui d'un ordinateur. « Or la mémoire humaine (et animale) est tout sauf une base de donnée numérique : l'oubli intentionnel, conscient et inconscient, par exemple, en est au cœur, car il contribue à constituer les invariants de l'action mémorisée, et, par ce biais, à la catégorisation conceptuelle du monde, voire à son organisation mathématique »

Développer les interfaces entre les mathématiques et les cognisciences ce serait donc aussi se donner les moyens de donner une autre approche des mathématiques aux jeunes générations, qui passerait également par le corps. « Si on arrive à communiquer comment la construction des concepts et des structures mathématiques s'enracine dans notre histoire évolutive et notre vécu, on aura « du sens » à communiquer. Et l'on pourra même contribuer à réinsérer l'analyse fondationnelle des mathématiques dans les débats internes aux autres sciences comme la physique et la biologie, débat duquel le logicisme et le formalisme l'ont écarté pendant près d'un siècle. » Les mathématiques : langage certes mais aussi geste, mouvement.

Les recommandations du rapport

Il me semble important d'inclure, en conclusion, l'intégralité des recommandations du rapport.

« Les recommandations qui suivent tendent à deux catégories d'objectifs :

- créer de nouveaux liens et renforcer les liens existants entre la communauté des chercheurs en sciences mathématiques et les autres communautés scientifiques ;*
- transmettre dans la formation générale et scientifique une vision intégrée du paysage scientifique contemporain, et en particulier des mathématiques comme science bien vivante se nourrissant de problématiques très variées.*

L'organisation de la recherche, comme celle de l'enseignement supérieur dans sa composante de formation à et par la recherche, est concernée par le premier point. Quant au second, nous ne considérerons ici que l'enseignement supérieur, mais ces recommandations, à travers la formation initiale et continue des enseignants, pourraient bénéficier à l'ensemble du système éducatif.

Une très grande partie de la recherche dans les sciences mathématiques est effectuée dans les établissements d'enseignement supérieur par des universitaires, avec le soutien financier des organismes de recherches, CNRS en tête. La perméabilité entre universités et organismes de recherche est bien meilleure que dans d'autres disciplines scientifiques, pour des raisons pratiques (pas de gros équipements à gérer) mais aussi historiques. Une grande majorité de la communauté mathématique souhaiterait d'ailleurs renforcer encore les possibilités d'alterner des périodes de recherche pure avec d'autres où la recherche se nourrit de l'enseignement.

(1) *Il est indispensable que les organismes de recherche, mais aussi les établissements d'enseignement supérieur, développent une politique scientifique pluriannuelle de ces interfaces entre mathématiques et autres disciplines scientifiques et assurent les moyens humains et financiers de cette politique. Une telle politique est tout le contraire d'un saupoudrage uniforme et aléatoire, devant au contraire s'appuyer sur les forces spécifiques de l'environnement scientifique local. Si, dans certains domaines (physique, chimie, économie, informatique) il s'agit de maintenir et renforcer des collaborations déjà très actives, dans d'autres un effort particulier doit être fourni; c'est ainsi que le programme américain NBIC (Nanotechnology, Biotechnology, Information technology, Cognitive science), dont de nombreux projets se nourrissent de modélisation mathématique, n'a pas d'équivalent en France ou en Europe.*

(2) *Pour favoriser le recrutement d'enseignants-chercheurs ou de chercheurs dans ces domaines d'interface, une politique d'affichage des postes est nécessaire. On prendra garde cependant que la dénomination des postes doit rester suffisamment ouverte pour qu'une compétition large et garante d'excellence puisse s'exercer. A titre d'exemple, un profil tel que "biologie mathématique" semble adéquat.*

(3) *Pour recruter ces chercheurs ou enseignants-chercheurs, et pour gérer ensuite leur carrière, tout au moins pour les changements de corps, des commissions de spécialistes mixtes, constituées à parité de mathématiciens et de scientifiques de la (les) discipline(s) concernée(s) par l'interface doivent être mises en place.*

(4) *Nous distinguons dans ce qui suit les formations doctorales destinées à un public restreint de futurs chercheurs des cycles Licence et Mastère destinés à un plus large public. Nous distinguons aussi les filières à dominante mathématique des autres filières scientifiques.*

(a) *Cycles L, M scientifiques autres que mathématiques*

– *Adapter aux publics concernés le contenu et la présentation des mathématiques enseignées aux étudiants scientifiques. Ces cours doivent être effectués par des enseignants-chercheurs mathématiciens, mais ceux-ci doivent fournir un effort considérable pour rendre abordables et attractifs les sujets traités. Transposer la démarche pyramidale destinée aux étudiants mathématiciens ne saurait être la solution.*

– *Offrir dans le domaine des sciences de la vie une filière optionnelle caractérisée par un contenu renforcé en mathématiques (ce qui existe déjà pour les sciences de la nature ou l'économie), pour entre autres buts créer les conditions d'un dialogue ultérieur entre les communautés scientifiques.*

(b) *Cycles L, M à dominante mathématique*

– *Maintenir, voire renforcer l'ouverture des cycles L vers les autres disciplines scientifiques.*

– *Prolonger cette ouverture dans le cycle M en imposant un contenu pluridisciplinaire à ces diplômes, en particulier ceux s'adressant aux futurs enseignants de mathématiques dans les écoles, collèges et lycées. Il est absolument nécessaire de favoriser le dialogue et les actions concertées entre enseignants scientifiques dans les collèges et lycées.*

– *Étudier la possibilité d'une composante pluridisciplinaire dans les concours de recrutement des enseignants.*

(c) *Formation doctorale.*

– Il existe, en France et dans le monde, une communauté extrêmement active de physique mathématique qui est le milieu continu où s'effectue l'interface si fécond entre les deux disciplines. Tout doit être fait pour favoriser l'émergence d'une communauté de même nature réalisant l'interface entre mathématiques et sciences de la vie, interface qui implique aussi informatique et physique. Les écoles doctorales en sciences de la vie et en mathématiques doivent s'impliquer activement dans ce processus, prolongeant l'ouverture des cycles précédents. À nouveau, l'adaptation du discours aux publics concernés est essentielle. Il s'agit avant tout de présenter des idées plutôt que d'assimiler des techniques.

– Renforcer l'ouverture des écoles d'ingénieurs à la recherche mathématique.

– Favoriser les doubles cursus en permettant par exemple à un étudiant titulaire d'un doctorat en mathématiques l'accès direct à un DEA de biologie.

Ces changements nécessaires dans les modalités et les contenus de l'enseignement supérieur scientifique ne doivent pas représenter un alourdissement des horaires. Si l'on crée ou renforce dans toutes ou certaines filières les enseignements en physique, biologie ou économie, il faut alléger ceux en mathématiques ; inversement une filière en sciences de la vie à contenu renforcé en mathématiques aurait un programme allégé en biologie. »

Marie-Françoise Roy,
Université Rennes I