MATHÉMATIQUES

Du *Courant & Hilbert* aux simulations numériques

Pierre-Louis Lions[1]

Cette conférence qui a eu lieu le 18 mai 2005 fait partie du cycle « Un texte, un mathématicien » organisé par la BnF et la SMF, les notes en ont été prises par Gérard Tronel.

Dans le cadre de ce cycle, la prochaine conférence « Hermann Minkowski, grand prix de l'Académie des sciences à 18 ans » sera donnée par Eva Bayer-Fluckiger le 10 mai 2006.

Monsieur Jean-Noël Jeannenay, Président de la Bibiothèque nationale de France, dans son allocution de bienvenue, rappelle que la bibliothèque possède un fonds important, mais mal connu de documentation scientifique. Il évoque les propositions faites pour créer, à l'échelon européen, un organisme chargé de la numérisation des ressources réparties dans les grandes bibliothèques. Il évoque la collaboration entre la bibliothèque et la cellule Mathdoc et le projet NUMDAM.

Martin Andler présente la conférence en situant dans le temps la parution du livre « Méthodes mathématiques de la physique », publié pour la première fois en allemand, par l'éditeur Springer, sous le titre « Methoden des mathematischen Physik ». Après une rapide évocation de la personnalité et de la carrière de Hilbert, l'un des plus grands mathématiciens de la première partie du XX^e siècle, il parle de la carrière de Courant, élève de Hilbert, fondateur d'un institut de mathématiques à Göttingen. Obligé de quitter l'Allemagne nazi, Courant créera, à New York, le très célèbre « Courant Institute of Mathematics ». Martin Andler rappelle que le conférencier Pierre-Louis Lions est professeur au Collège de France. Il est ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm ; il a commencé sa carrière de chercheur comme chargé de recherches au CNRS, puis il a été nommé professeur à l'université Paris-Dauphine. Il est lauréat de la médaille Fields et il est auteur de plus de trois cents publications. Pierre-Louis Lions prend la parole.

Cette conférence n'est pas dédiée à une grand mathématicien, mais plutôt à un livre dont les auteurs sont incontestablement de grandes figures des mathématiques du XX^e siècle, Courant et Hilbert. Une anecdote personnelle justifie le choix du titre de la conférence. À l'École normale supérieure, au cours de l'année de DEA, je parcours quelques livres considérés comme des « bibles » de mathématiques. Au nombre de ces livres fondamentaux pour un analyste, figure le *Courant & Hilbert*, énorme pavé en deux volumes. Je le feuillette et mon attention est attirée par un

[1] Professeur au Collège de France

sujet qui contient des idées qui me semblent intéressantes, c'est à partir de ces idées et de réflexions personnelles sur le sujet que je suis conduit à rédiger un gros paquet de notes. Il est difficile de vous expliquer ces idées mais je peux dire qu'elles me permettent de mettre en œuvre des connaissances acquises au cours d'une double formation en analyse mathématique et en informatique. À partir de ces notes j'expose mes idées aux professeurs dont je suivais les enseignements du DEA ; l'accueil est plutôt mitigé. Mais, je ne me décourage pas et pour ne pas laisser perdre le fruit de mon travail je rédige un résumé qui sera mon premier article de recherche : une Note aux comptes rendus de l'Académie des sciences. Puis j'oublie ces notes et même je les égare, mais quelques années plus tard, alors que je suis déjà un chercheur à temps plein, un des professeurs que j'avais contacté me demande mes notes que j'ai égarées. Je retrouve de mémoire les grandes idées de mon travail. Il s'avère que certaines de ces idées ont permis de développer une branche des mathématiques qui est connue et utilisée sous le nom de : « méthode de décomposition de domaines ». Comme aperçu de cette méthode on peut dire que son principe consiste à décomposer un grand domaine en petits morceaux, à faire l'analyse de chacun des morceaux, puis à faire tourner simultanément plusieurs ordinateurs et à faire la synthèse des résultats numériques obtenus. En fait, l'histoire des notes perdues n'est pas terminée puisque je les ai finalement retrouvées chez un de mes collègues lors d'un voyage à l'université de Pise, en Italie. Ce collègue, Alfio Quarteroni, s'est illustré récemment par une participation active aux simulations numériques qui ont permis au voilier le « Défi suisse » de gagner l'America's Cup.

Pourquoi vous avoir raconté cette anecdote ? Pour vous donner une idée de mes premiers contacts avec la recherche et tirer quelques enseignements de cette première expérience :

Premièrement, des livres ; en général les chercheurs aiment bien les livres.

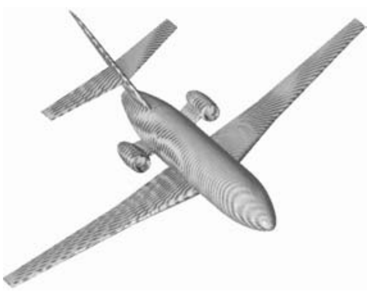
Deuxièmement, de la curiosité, de l'intuition, des rencontres. La recherche est rarement une aventure individuelle.

Troisièmement, un peu de chance.

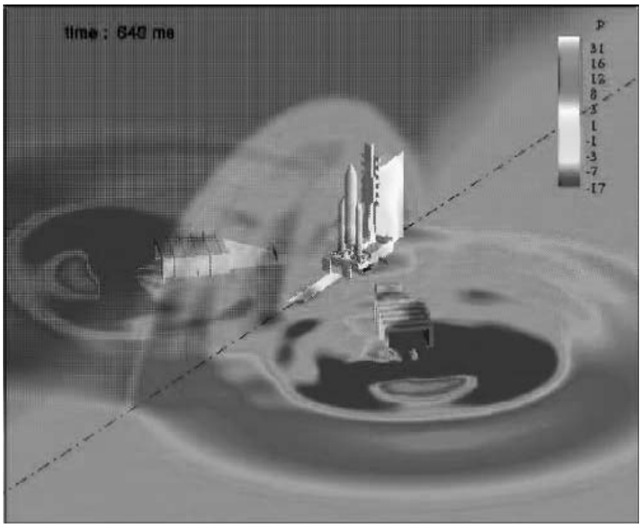
Cette anecdote peut aussi donner une idée du quotidien de la vie d'un chercheur en mathématiques, idée que l'on retrouve dans d'autres disciplines, mais surtout en mathématiques on rencontre des a priori qui ont la vie dure !

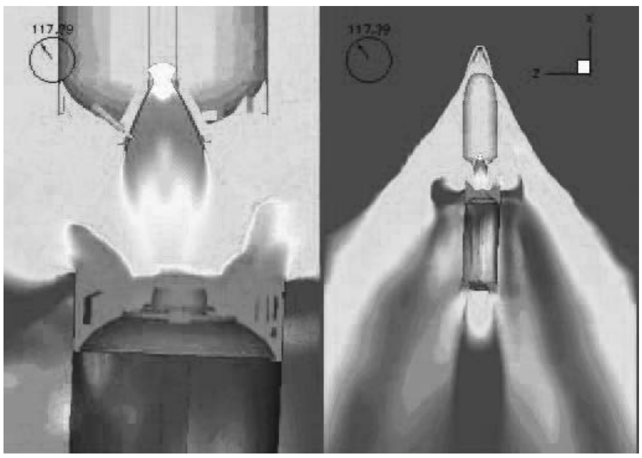
Des exemples de problèmes et des simulations numériques, en voici quelques uns tirés de différents domaines de la technologie :

Tout d'abord voici une analyse des effets d'ondes électromagnétiques sur un avion Falcon. Sur cette représentation on fait figurer les résultats de simulations numériques.



Autre exemple : une étude de deux phases particulièrement importantes du vol d'une navette ou d'une fusée, ici la fusée Ariane 5. Au moment du décollage, lorsque la fusée quitte le pas de tir, le bruit est assourdissant, les ondes acoustiques produites peuvent avoir des effets destructeurs qui risquent de compromettre le fonctionnement de la fusée et détériorer sa charge utile, en général des satellites. Une autre étape critique du vol est la séparation du premier étage : des accidents graves peuvent se produire à ce moment particulièrement important. On se souvient des catastrophes survenues au cours du lancement de la navette américaine. Dans le même ordre d'idée la rentrée dans l'atmosphère d'une capsule ou d'une navette pose des problèmes difficiles qui doivent faire l'objet d'analyses poussées pour éviter que se reproduisent les accidents qui ont aussi provoqués des victimes.



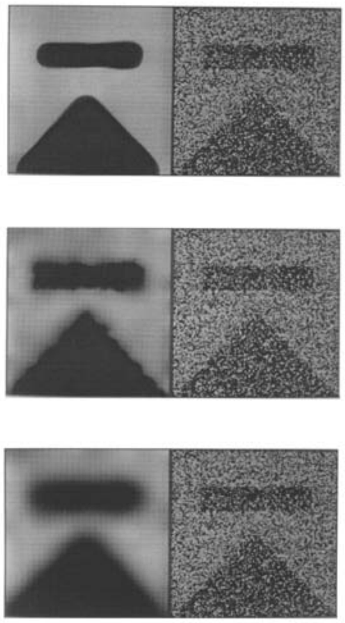


Pour un système aussi complexe, il est en général impossible de faire des essais en vraie grandeur, de plus ces essais seraient très coûteux. Les problèmes rencontrés par la mise au point des lanceurs ne peuvent être abordés et partiellement résolus qu'à partir de modélisations et de simulations numériques. Il est facile d'imaginer les difficultés : au cours des phases critiques les mesures sont impossibles, par exemple, au cours de la rentrée dans l'atmosphère, pendant la phase de « black-out » les communications sont interrompues et il est impossible de faire des mesures et de récolter des informations sur ce qui se produit réellement.

Un autre exemple est extrait de la fabrication de l'aluminium. Comme vous le savez les procédés de fabrication de l'aluminium reposent sur l'électrolyse d'un bain liquide dans une cuve. Cette cuve est un système infernal : dans un bain liquide à 2000° circulent des courants de 500.000 ampères. Les mesures de grandeurs intéressantes, vitesses des fluides du bain, températures, champs magnétiques internes sont techniquement impossibles. Ce n'est pratiquement qu'à partir de quelques données techniques sur la cuve et de quelques mesures faites à l'extérieur qu'il est possible de construire des modèles qui vont servir de base à des simulations numériques. Ces simulations numériques sont destinées à une meilleure compréhension des phénomènes qui se produisent au cours de la fabrication de l'aluminium et à une amélioration du fonctionnement de la cuve à électrolyse.

Pour changer de registre, arrêtons-nous maintenant au traitement des images. Il s'agit là d'un sujet très important dans notre monde d'images réelles ou virtuelles ; ce sujet touche à la photographie numérique, au cinéma pour les effets spéciaux, à l'imagerie médicale et à une quantité de problèmes liés à la communication et à la transmission de l'information.

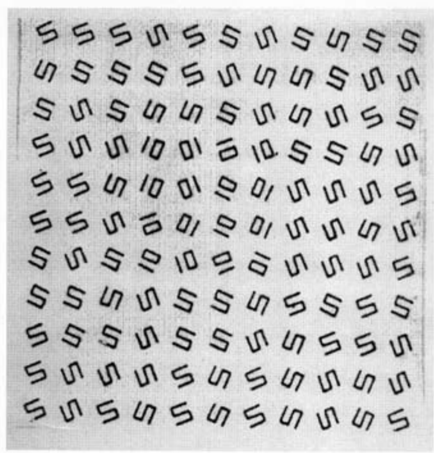
Pour commencer, voici un problème qui peut paraître simple mais dont la solution cache une forte utilisation de mathématiques et de simulations numériques. Il s'agit de la mise au point d'un procédé de retraitement de photos prises avec des appareils de piètre qualité, des appareils jetables.



Une start-up créée par un de mes anciens élèves a résolu ce problème de l'amélioration de la qualité des images par un procédé automatisé, rapide et à faible coût. L'amélioration est telle que les laboratoires spécialisés de la Fnac ont reconnu que les photos retraitées présentaient des qualités comparables à celles de clichés pris, à partir de mêmes sujets, par des professionnels de la photo équipés d'appareils hauts de gamme et très chers ! Cette start-up s'attaque maintenant aux problèmes des téléphones portables devenus des objets à usages multiples et grands producteurs et consommateurs d'images.

Un autre exemple intéressant traite de l'identification du mouvement d'un objet difficilement identifiable dans une série d'images bruitées : il s'agit de fabriquer des espèces de filtres qui permettent d'extraire des informations pertinentes au milieu d'images et des bruits parasites. Les différents niveaux de traitement de ce problème exigent des mathématiques de plus en plus sophistiquées, en particulier beaucoup de géométrie !

Un dernier exemple est emprunté à une expérience sur la vision. On reconnaît sur ce transparent des 10 et des 5 ; comme vous pouvez le remarquer dans cette représentation on peut passer aisément des 10 aux 5, l'œil reconnaît instantanément ces représentations, mais il ne distingue pas immédiatement que la répartition des 10 et des 5 n'est pas faite au hasard. Le test de vision n'est pas de distinguer les 10 des 5, mais de remarquer l'organisation de ces figures et de noter que l'on a une série de 10 disposés en carré au milieu d'une image remplie de 5.



L'analyse des résultats de ce test visuel doit beaucoup aux mathématiques. On pourrait même dire que, lorsqu'on connaît le résultat, il est très simple, mais si la répartition des 10 avait eu une forme plus compliquée, une forme de lunule par exemple, la reconnaissance aurait été beaucoup plus difficile.

Ces exemples ont été choisis pour nous amener à réfléchir sur l'utilisation des mathématiques. Dans chacun des exemples donnés les résultats présentés sont obtenus par des simulations numériques faites à partir de modèles qui sont sensés donner une représentation de la réalité que l'on veut étudier. Dans cette démarche on se trouve immédiatement confronté à la construction de modèles et à l'usage que l'on peut en faire. Déjà se profile les étapes de cette démarche : analyser de manière la plus précise possible les phénomènes que l'on veut étudier, construire des modèles, puis se lancer dans une analyse mathématique qui va nous conduire à des équations, en général des équations aux dérivées partielles non linéaires, et c'est à partir de ces équations que l'on pourra faire des simulations numériques. Dans cette partie sont introduits plusieurs termes qu'il faut préciser afin de mettre en évidence la place des mathématiques.

Essayons tout d'abord de préciser la notion de modèle. Il n'existe malheureusement pas de bonnes définitions, on peut essayer seulement de mettre en évidence les qualités que devraient présenter les modèles. C'est peut-être Italo Calvino, dans un texte intitulé « Le modèle des modèles », qui donne les meilleures idées :

« Construire un modèle le plus parfait, géométrique, le plus logique possible ; vérifier si le modèle s'adapte bien au cas pratique que l'on peut observer dans l'expérience ; apporter les corrections nécessaires pour que le modèle et la réalité coïncident ». Pour Italo Calvino la construction d'un modèle doit être un miracle d'équilibre entre des principes insaisissables et l'expérience laissée dans l'ombre. Mais, par ailleurs, Italo Calvino nous met en garde : un modèle ne doit pas être une forteresse inviolable, qui cacherait la réalité extérieure. Il faut toujours avoir à l'esprit qu'un modèle est une espèce de mensonge, une image déformée de la réalité que l'on veut représenter ; notre vigilance et notre esprit critique doivent constamment rester en éveil et nous ne devons pas hésiter à remettre nos modèles en question.

Sans entrer dans les détails, revenons aux exemples. Les simulations montrées reposent le plus souvent sur des modèles qui sont sensés traduire la réalité sous forme d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Essayons maintenant de préciser les mots qui ont un contenu mathématique. Vous connaissez pour une fonction d'une variable la définition de la dérivée ; ici nous avons des fonctions de plusieurs variables et à chacune de ces variables on peut associer une dérivée que l'on appellera dérivée partielle. A partir de là on va écrire des équations traduisant des lois entre des grandeurs physiques, des principes de mécanique, des lois de la chimie, des lois de la finance et de plus en plus des lois de la biologie. Les équations étudiées sont tirées de pratiquement tous les champs du savoir.

Pour vous rassurer il faut tout de même dire que les notions mathématiques précédentes, notions qui ne sont pas toujours faciles à assimiler, ont mis très longtemps avant d'émerger. L'histoire des dérivées et du calcul différentiel commence par une bataille sordide entre Leibniz et Newton. Cette création du calcul différentiel se perpétue et se rigidifie au cours du XIX^{e} siècle. L'étude des équations aux dérivées partielles, après avoir suscité bien des controverses, se poursuit néanmoins. Rappelons que l'équation des ondes, étudiée par d'Alembert, continue à poser des problèmes et on propose de nouveaux modèles pour l'étude de la propagation des ondes sonores. De même c'est Fourier, éminent personnage de la science et de bien d'autres activités, notamment administratives, qui est à l'origine de l'équation de la propagation de la chaleur. Fourier propose une méthode de résolution de cette équation en utilisant des séries de fonctions simples, des sinus et des cosinus. Les séries de Fourier ont, elles aussi, déclenché bien des controverses et elles recèlent encore des mystères loin d'être élucidés. Aujourd'hui l'étude des séries de Fourier a donné naissance à deux branches des mathématiques ; l'analyse harmonique et les méthodes spectrales particulièrement utiles en calcul scientifique et en simulations numériques.

L'histoire des mathématiques n'est pas exempte d'erreurs ; Riemann, surtout connu pour ses contributions fondamentales en mathématiques pures s'est également intéressé aux applications des mathématiques, il a commis au moins une erreur dans l'étude des ondes de choc ; cette erreur a été rectifiée quelques années plus tard par Rankine et Hugoniot. Tout au long de l'histoire, les erreurs, les controverses sont génératrices de progrès : ainsi les espaces de Sobolev, les contributions de Leray, la théorie des distributions de Laurent Schwartz vont bien au-delà des notions classiques qui restent fondamentales, mais tous ces outils mathématiques nouveaux prolongent naturellement les outils de l'analyse classique.

Pour illustrer ce qui précède, comme exemple voici un système d'équations, les équations de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + u(t,x)\nabla u(t,x) - \triangle u(t,x) = -\mathrm{grad}p(t,x),$$

$$\mathrm{div}u(t,x) = 0,$$

$$u(o,x) = u_0(x).$$

Il n'est pas question de commenter ces équations, elles modélisent l'écoulement de certains fluides. Toutefois l'histoire de ce modèle est intéressante. En effet, à l'origine on trouve un autre génie des mathématiques, Euler. Un roi, sans doute un roi de Prusse, commande une fontaine à Euler. Que fait celui-ci ? Il construit un modèle et il écrit dans un article sur le sujet que du point de vue de la physique et de la mécanique, le problème est réglé, mais qu'il subsiste une lègère difficulté analytique. Il faut souligner que Euler s'est trompé, car son modèle ne permettait pas de représenter et d'expliquer le vol des oiseaux ! C'est d'Alembert qui explique ce paradoxe dans un article primé par l'Académie des sciences de Dijon. Ce n'est que plus tard que Navier et Stokes établiront un modèle plus conforme à la réalité physique, puisqu'il conduit à une explication plausible du vol des oiseaux. Mais la « légère difficulté analytique » décelée par Euler résiste encore aujourd'hui et figure dans une liste de sept problèmes difficiles proposés à la sagacité des mathématiciens du XXI^{e} siècle. En fait l'histoire du modèle de Navier-Stokes ne s'arrête pas là puisque Boltzmann, à partir des idées fondamentales de Maxwell, donnera un modèle pour les écoulements des gaz raréfiés.

Ainsi l'histoire ne s'est pas achevée au XIX^{e} siècle, elle est actuelle, elle n'est jamais finie, sinon les modèles obtenus constitueraient des forteresses inviolables qui ne serviraient plus à rien. Pour revenir au sujet de cette conférence, les simulations numériques, on peut souligner qu'elles interviennent partout, en mécanique des fluides, notamment en aérodynamique. Aujourd'hui on ne dessine plus un avion, une automobile sans faire de simulations numériques. La météorologie, c'est aussi de la mécanique des fluides, de même que les écoulements sanguins, les flots de polymères, mais la mécanique des fluides se retrouve aussi dans des domaines aussi inattendus que le trafic routier et les effets spéciaux au cinéma ! Vous avez sans doute vu le film « Titanic » ; la mer que vous avez vu est une mer numérique, virtuelle, obtenue à partir d'effets spéciaux utilisant des modèles plus simples que celui de Navier-Stokes, mais pour « Titanic 2 » nous auront sans doute des effets spéciaux obtenus à partir des équations de Navier-Stokes.

Comment peut-on justifier la présence des dérivées partielles dans les modèles ? Dans les exemples présentés, on s'aperçoit que les équations aux dérivées partielles apparaissent chaque fois que l'on modélise des phénomènes dans lesquels interviennent de nombreux agents. Vous rencontrez cette situation en physique, en chimie, en traitements des images. Par exemple en chimie, dans une mole, le nombre de molécules est considérable ; en traitement de l'image, le nombre de pixels est très grand et d'autant plus grand que l'image est précise et de qualité. En finance si le nombre d'agents qui interagissent est très grand, pour traduire le comportement de cet ensemble, les modèles utilisant des dérivées partielles sont pertinents.

La complexité de ces phénomènes conduit à des modèles non linéaires. Pour expliquer très grossiérement ce qu'est la non linéarité on peut donner l'exemple de la fabrication d'un gâteau. Pour cuire un gâteau d'un kilo, il faut un certain temps, mais si avec la même recette vous voulez faire cuire un gâteau de deux kilos, en doublant le temps de cuisson vous aurez de mauvaises surprises. Un exemple historique moins prosaïque est la vision de la Terre qu'avaient nos ancêtres : il voyait la Terre plate comme une galette et, localement, cette conception de leur environnement était suffisante et correspondait à leur intuition, mais évidemment elle n'a plus de sens à l'échelle cosmique. La notion d'échelle est également fondamentale dans la modélisation des phénomènes physiques. Etudier l'air à l'échelle qui nous occupe, ici centimétrique, voire métrique, n'a rien à voir avec une étude à l'échelle de l'angström où l'on va commencer à voir les atomes, sans parler de l'échelle subatomique où on « verra » les quarks. On peut dire que la modélisation est intrinsèquement liée à la notion de loupe utilisée pour voir et représenter les phénomènes. Pour revenir sur un des exemples précédents, le vol d'un engin spatial, les différentes étapes du vol ne sont pas modélisées de la même façon suivant les différentes phases du vol : au départ nous sommes dans les conditions atmosphériques normales, mais lorsque les vitesses atteignent des valeurs élevées et que les altitudes dépassent plusieurs dizaines de kilomètres c'est-à-dire lorsqu'on atteint les couches raréfiées de l'atmosphère, il faut changer de modèles, car on change d'échelles.

Dans la première partie vous n'avez peut-être pas bien vu le rôle joué par les mathématiques, aussi à partir d'un cas très simple, on peut se rendre compte des problèmes posés par les simulations numériques. Voici un exemple, sans justification de son origine physique :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}u(t,x),$$

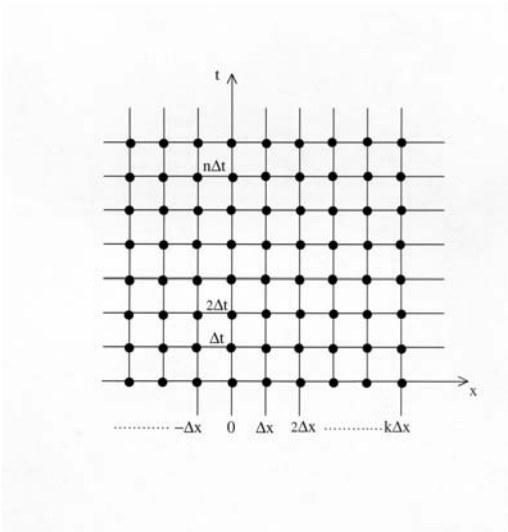
$$u(o,x) = u_0(x).$$

On connaît la solution exacte de ce problème :

$$u(t,x) = u_0(x+t).$$

L'interprétation de cette solution est simple : elle représente le déplacement du profil donné $u_0(x)$ vers la gauche dans un plan rapporté aux axes orthogonaux Ox, Ot. Pour tester nos méthodes de simulations numériques nous allons utiliser un ordinateur qui va nous permettre de calculer la valeur de la solution u aux points d'un maillage que nous allons définir. On choisit des pas Δt, Δx et on va calculer des valeurs approchées $u_{k,n}$ de la solution u aux différents points du maillage $(k\Delta t, n\Delta x)$. Dans les calculs numériques on part de l'équation et on approche la dérivée temporelle, en t, $\frac{\partial}{\partial t}u(k\Delta t, n\Delta x)$ par le quotient différentiel :

$$\frac{u_{k+1,n} - u_{k,n}}{\Delta t}.$$



Pour la dérivée spatiale, en x, on a le choix entre trois possibilités :

$$\frac{u_{k,n+1} - u_{k,n}}{\Delta x}, \qquad (I)$$

$$\frac{u_{k,n-1} - u_{k,n}}{-\Delta x}, \qquad (II)$$

$$\frac{u_{k,n+1} - u_{k,n-1}}{2\Delta x}. \qquad (III)$$

On est donc ramené à calculer les valeurs de $u_{k,n}$ en résolvant, avec un ordinateur, le système d'équations :

$$\frac{u_{k+1,n} - u_{k,n}}{\Delta t} = \frac{u_{k,n+1} - u_{k,n}}{\Delta x},$$

ou bien

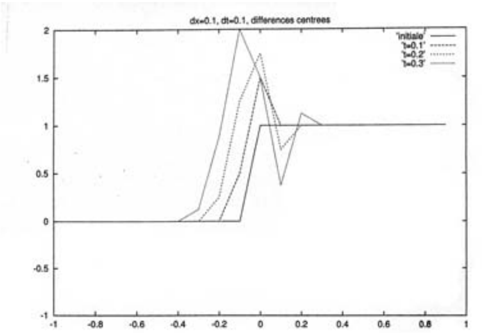
$$\frac{u_{k+1,n} - u_{k,n}}{\Delta t} = \frac{u_{k,n-1} - u_{k,n}}{-\Delta x},$$

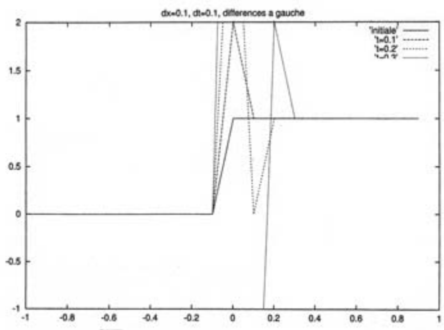
ou encore

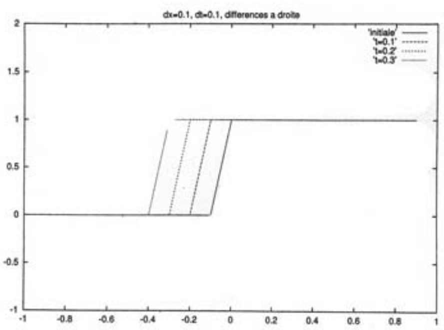
$$\frac{u_{k+1,n} - u_{k,n}}{\Delta t} = \frac{u_{k,n+1} - u_{k,n-1}}{2\Delta x},$$

chacune des équations doit être complétées par la donnée :

$$u_{0,n} = u_0(n\Delta x).$$







Il n'est pas possible de détailler le calcul, mais je vous montre une représentation des résultats obtenus. Il est facile de voir qu'en fonction du choix du quotient différentiel spatial on obtient des résultats suivants : soit le profil représentant u_0 se propage vers la gauche, sans se déformer, soit, dès les premiers calculs, le profil initial se déforme et le résultat obtenu s'écarte considérablement du résultat cherché ! Si on adopte un point de vue un peu simpliste on note que les résultats numériques varient considérablement, alors que dans l'approximation de la dérivée spatiale on passe du schéma (I) au schéma (II) en changeant $n+1$ en $n-1$. D'où l'importance du choix du modèle discrétisé. L'exemple donné est simple et vous pouvez imaginer, facilement, que si nous étions partis des équations de Navier-Stokes, - elles sont non linéaires, - le problème du choix des approximations aurait été beaucoup plus compliqué ; de plus, dans le cas général, il subsisterait des problèmes théoriques non résolus. Des gardes fous reposant sur l'intuition, la connaissance de cas analogues, la validation des codes de calcul, sont indispensables pour justifier les simulations.

Pour conclure, je voudrais revenir au livre, le *Courant & Hilbert*. En relisant la table des matières j'ai été frappé par le grand nombre de sujets introduits, sujets qui sont encore exploités actuellement dans l'analyse et l'utilisation des modèles à la base de nombreuses simulations numériques.

Les questions du public

Question 1 : La télévision a montré le premier essai raté de la fusée Ariane 5. S'agissait-il de mauvaises simulations ? Comment fait-on pour s'assurer de la validité d'une simulation quand c'est très compliqué et très cher ?

P.-L. Lions : Pas du tout ! Cet échec est dû à des erreurs provenant du logiciel de vol. Il est clair que, lorsqu'on fait des simulations sur des systèmes complexes, il est indispensable de les faire avec différents codes de calculs. Il faut aussi s'appuyer sur l'intuition, sur l'expérience, sur le bon sens. La validation des simulations pose toujours des problèmes difficiles.

Question 2 : Sur les 23 problèmes proposés par Hilbert, en 1900, Combien sont-ils résolus ?

P.-L. Lions : Je ne le sais pas exactement ; une quinzaine peut-être. Mais en mathématiques, même les problèmes résolus continuent à intéresser les mathématiciens. Il n'y a pas de bons problèmes et pas de bonnes solutions définitives !

Question 3 : Que se passe-t-il dans votre tête lorsque vous vous posez des problèmes de mathématiques ?

P.-L. Lions : C'est une question compliquée ! Mais en gros on peut dire que la démarche des mathématiciens est un peu différente de celle des physiciens ou des ingénieurs. Nous acceptons des simplifications, mais nous cherchons toujours à conserver la rigueur. Si le problème est trop gros, trop compliqué, nous cherchons à le comprendre et à la résoudre par morceaux, mais cette démarche n'est pas unique, elle varie d'un problème à l'autre.

Question 4 : Jusqu'à quel point dépendez-vous de la puissance des ordinateurs ?

P.-L. Lions : C'est un problème fondamental. Il est clair que l'évolution de la capacité et de la vitesse de calcul des ordinateurs est un facteur de progrès dans la modélisation et dans les simulations numériques. Pour revenir à l'histoire, même si les informaticiens ont des points de vue différents sur la naissance de l'informatique qu'ils font remonter à Babbage et à Turing, c'est sans doute à von Neumann qu'il faut revenir. Von Neumann voulait comprendre et résoudre les équations de la dynamique des gaz et pour ce faire il a inventé l'ordinateur.

Question 5 : Quelles différences faites-vous entre mathématiques pures et mathématiques appliquées ?

P.-L. Lions : Il n'y a pas de frontières entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées ; si on considère la discipline dans son ensemble on peut la comparer à un arc-en-ciel avec toute la palette des couleurs. Parmi les chercheurs en mathématiques appliquées certains s'attaquent à des problèmes théoriques relevant des mathématiques appliquées. Les choix dépendent des motivations et des intérêts des uns et des autres.