LIVRES

A First Course in Harmonic Analysis (Second Edition)
Anton Deitmar
Universitext, Springer, 2005. 192 p.
ISBN : 0-387-22837-3. 47,42 €

Ce livre propose une introduction inhabituelle à l'analyse harmonique. Destiné à des étudiants relativement novices (licence), sa lecture ne nécessite qu'un faible prérequis : rudiments d'algèbre linéaire, fonctions d'une ou plusieurs variables réelles ; la topologie générale utilisée est développée *ab initio*, l'intégrale de Lebesgue évitée. Son objectif est ambitieux, puisqu'il s'agit d'inscrire séries et intégrales de Fourier classiques dans le contexte de l'analyse sur les groupes abéliens localement compacts, et de donner une petite introduction à l'analyse harmonique non commutative. Il s'organise en trois parties et deux appendices.

La première partie (« Fourier Analysis », chapitres I à IV) est consacrée à la théorie classique. À juste titre, l'accent porte davantage sur les propriétés algébriques et hilbertiennes que sur l'étude fine de la convergence ponctuelle. Le chapitre I, dévolu aux séries de Fourier, est donc centré sur la formule de Parseval ; avec un peu de coquetterie, celle-ci est prouvée en se ramenant au cas des fonctions en escalier, lui-même traité par un calcul direct reposant sur le lemme de Riemann-Lebesgue. La convergence normale pour les fonctions continues et de classe C^1 par morceaux en est déduite par l'argument d'unicité habituel. Dans le chapitre II, l'auteur expose les définitions de base de l'analyse hilbertienne de façon à réinterpréter Parseval ; le cadre choisi impose de définir L^2 comme complété abstrait, sans en incarner les éléments comme (classes de) fonctions, ce qui limite à mon avis l'intérêt du propos. En revanche, le chapitre III est une excellente étude élémentaire de la transformation de Fourier réelle : des versions « pré-lebesguiennes » mais substantielles de la formule d'inversion, du théorème de Plancherel et de la formule de Poisson y sont prouvées avec efficacité. L'appendice I complète cet exposé par l'application à la fonction ζ : prolongement analytique, équation fonctionnelle. Le chapitre IV, motivé par la détermination d'un prolongement « ultime » de la transformation de Fourier, définit distributions et distributions tempérées, mais souffre un peu de l'absence d'applications de ces notions.

La seconde partie (« LCA Groups », chapitres V à VIII) débute par l'analyse de Fourier sur les groupes abéliens finis, le théorème de structure de ces derniers étant admis. Après une introduction aux espaces métriques, le chapitre VI définit les groupes abéliens localement compacts, supposés ici métrisables ; le chapitre VII définit le dual d'un tel groupe et le calcule pour $\mathbb{Z}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}$, avant de mettre en évidence la dualité compact-discret et d'énoncer (sans preuve) le théorème de Pontryagin. Enfin, le chapitre VIII présente l'intégrale de Haar (dont la construction est détaillée dans l'appendice II), en donne quelques exemples, calcule la transformée d'une convolée et énonce (sans démonstration) le théorème de Plancherel. Malgré l'absence de la formule d'inversion, cette partie m'a semblé de nature à bien éclairer le lecteur débutant, donc réussie.

La dernière partie (« Noncommutative Groups », chapitres IX à XII) aborde l'analyse harmonique sur les sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{C})$; un premier chapitre définit l'algèbre de Lie d'un tel sous-groupe au moyen de l'exponentielle et admet en substance le théorème de Cartan-von Neumann, avant de décrire les premiers liens entre les représentations d'un sous-groupe et celles de l'algèbre associée. Ces notions sont appliquées dans le chapitre X à la détermination des représentations irréductibles de $SU_2(\mathbb{C})$. Le chapitre XI établit le théorème de Peter-Weyl pour les groupes matriciels, ce qui en simplifie considérablement la preuve, le résultat d'approximation étant alors conséquence immédiate du théorème de Stone-Weierstrass. Le livre se termine par l'étude du groupe d'Heisenberg : construction des représentations irréductibles, théorème de Plancherel. Cette partie me paraît également réussie.

L'ensemble du livre est rédigé très clairement, l'auteur ayant apporté un soin particulier à la fluidité des arguments. Chaque chapitre est accompagné d'exercices simples mais pertinents. Il n'est pas entièrement clair, cependant, que le niveau choisi soit le plus adapté au sujet. Supposer, au moins dans certains chapitres, le lecteur familier avec l'intégrale de Lebesgue et les bases de l'analyse fonctionnelle aurait allégé l'exposé des généralités et permis de développer les exemples. Malgré cette réserve, cet ouvrage fort agréable à lire est une addition bienvenue à la littérature ; un large public pourra y trouver profit.

Nicolas Tosel,
Lycée du Parc, Lyon

Dynamics beyond uniform hyperbolicity

CHRISTIAN BONATTI, LORENZO J. DIAZ & MARCELO VIANA
Encyclopædia of Mathematical Sciences, Springer, 2005. 384 p.
ISBN : 3-540-22066-6. 94,95 €

L'ouvrage de C. Bonatti, L. J. Diaz et M. Viana fait le point sur les progrès récents accomplis dans le domaine des systèmes dynamiques présentant une forme faible d'hyperbolicité.

Ce livre est destiné à un public de chercheurs, ayant de bonnes connaissances en dynamique hyperbolique uniforme ; une certaine familiarité avec la théorie des bifurcations est conseillée pour la lecture des chapitres III, VI et IX. On peut, sur ce point, se référer à l'ouvrage de D. Ruelle, *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory*.

Il existe un certain nombre d'articles d'introduction de bonne qualité sur le sujet : M. Viana (*Math. Int.* 2000) pour l'attracteur de Lorenz, C. Bonatti (*Bourbaki* 2002) pour la dynamique générique, K. Burns, C. Pugh, M. Shub, A. Wilkinson (PSPM 2001) pour l'ergodicité stable, etc. Mais ces survols ne reflètent déjà plus tout à fait l'état actuel de la recherche ; le sujet a en effet connu des progrès rapides depuis quatre ans et une partie significative des résultats présentés par C. Bonatti, L. J. Diaz et M. Viana ont étés obtenus au cours de la période 2000-2005. Ce livre arrive donc à point nommé pour proposer une vision unifiée de cette dynamique « au-delà de l'hyperbolicité uniforme ».

Stabilité des systèmes dynamiques

Un difféomorphisme est dit uniformement hyperbolique, en restriction à un certain ensemble compact invariant K, si l'espace tangent en tout point de K se décompose en deux fibrés respectivement contractés et dilatés de manière uniforme par la différentielle de la transformation. L'exemple le plus simple d'un tel système est donné par l'action de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur le tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$; l'ensemble hyperbolique K coïncide avec le tore dans cet exemple.

De manière remarquable, les difféomorphismes pour lesquels l'ensemble des points récurrents (par chaîne) est hyperbolique sont exactement les difféomorphismes qui sont stables par perturbation : toute perturbation C^1-proche de la transformation est en fait conjuguée à la transformation, en restriction à l'ensemble des points récurrents.

Que subsiste-t-il de ce résultat en l'absence d'hyperbolicité uniforme ? Une première approche consiste à affaiblir les notions d'hyperbolicité et de stabilité, tout en cherchant à conserver une équivalence entre les deux notions.

On a cherché par exemple à faire correspondre la notion d'hyperbolicité partielle (apparition d'un fibré neutre en plus des deux fibrés dilatés et contractés) avec la propriété d'ergodicité stable (toute perturbation C^2-proche est ergodique) ; ou encore la notion de décomposition dominée (le rapport de dilatation entre les deux fibrés est uniforme, sans préjuger d'une dilatation ou d'une contraction uniforme sur les fibrés eux-mêmes) avec la transitivité robuste (toute perturbation C^1-proche est transitive). Ces résultats sont présentés chapitres VII et VIII.

Phénomène de Newhouse

Une deuxième approche consiste à considérer une famille de difféomorphismes φ_λ dépendant d'un paramètre λ, et hyperboliques pour $\lambda < 0$. On s'intéresse alors à ce qui se passe juste après la perte d'hyperbolicité.

Si cette perte est due à la création de tangences entre les variétés stables et instables d'un point périodique de la transformation, un phénomène nouveau apparaît : il peut exister des valeurs de λ, arbitrairement proches de 0, telles que le difféomorphisme associé φ_λ possède une infinité de points périodiques attractifs ou répulsifs. De plus, il existe un ensemble générique (au sens de Baire) de difféomorphismes C^2-proches de φ_λ qui possèdent eux aussi une infinité de points périodiques répulsifs ou attractifs. Ces difféomorphismes ne peuvent pas être hyperboliques et leur dynamique reste tout à fait mystérieuse.

On ignore si les valeurs de λ associées à de tels difféomorphismes forment un ensemble de mesure de Lebesgue positive. Il semble au contraire que ce soit l'hyperbolicité qui prévale après la bifurcation : la proportion des paramètres $\lambda \in [0, \varepsilon[$ associés à des transformations φ_λ hyperboliques tend vers une quantité strictement positive quand ε tend vers 0.

Ces dynamiques « sauvages », et pourtant localement C^2-génériques, ont d'abord étés construites par S. Newhouse pour les difféomorphismes de surfaces, puis généralisées à la dimension supérieure par J. Palis et M. Viana. C'est l'objet du chapitre III.

Régularité et généricité

À ce stade, on peut se demander s'il est possible de dégager quelques propriétés dynamiques qui soient satisfaites par un sous-ensemble générique de difféomorphismes de classe C^k définis sur les variétés compactes.

Rappelons qu'un ensemble *générique* est un ensemble qui contient une intersection dénombrable d'ouverts denses. Un sous-ensemble générique peut être petit au sens de la mesure ; par exemple il peut intersecter toute famille générique de difféomorphismes sur un ensemble de paramètres de mesure de Lebesgue nulle.

Le caractère générique de la plupart des propriétés dynamiques des transformations dépend de manière cruciale du degré k de régularité des transformations considérées. Voici deux exemples qui illustrent ce fait pour des transformations de surfaces :
– un homéomorphisme générique possède une entropie topologique infinie ; tous les difféomorphismes de classe C^k, $k \geqslant 1$, sont d'entropie finie ; les difféomorphismes de classe C^∞ admettent toujours une mesure d'entropie maximale ;
– la transitivité est une propriété générique des homéomorphismes préservant un volume fixé (J. C. Oxtoby, S. M. Ulam 1941) ; c'est encore vrai en topologie C^1 (C. Bonatti, S. Crovisier 2003) ; la question est ouverte en topologie C^2 ; c'est faux en topologie C^4 ; les contre-exemples s'obtiennent à l'aide de la théorie K.A.M.

Voici quelques raisons qui peuvent amener à travailler avec une topologie plutôt qu'une autre :

La topologie C^1 : c'est le degré de différentiabilité requis pour parler d'exposants de Lyapounov. Dans le cadre hyperbolique, c'est suffisant pour construire la mesure d'entropie maximale et donner des asymptotiques pour le nombre de points périodiques de période inférieure à un réel donné.

La topologie C^2 : il devient possible de construire des mesures « physiques » ; ces mesures vont décrire le comportement asymptotique des trajectoires, pour un ensemble de trajectoires de mesure de Lebesgue pleine. On peut chercher à évaluer la dimension des attracteurs du système et mettre en place un formalisme thermodynamique.

La topologie C^3 : c'est le degré minimal pour appliquer les théorèmes perturbatifs de type K.A.M. ; c'est donc un degré de régularité souhaitable pour les questions de dynamique hamiltonienne et de mécanique céleste.

C'est pour la topologie C^1 que les résultats les plus substantiels ont été obtenus, en raison de quatre lemmes de perturbations qui n'ont à l'heure actuelle aucun analogue C^k, $k > 1$: il s'agit du lemme de fermeture de Pugh (1967), du lemme de Franks (1971), du lemme de fermeture ergodique de Mañé (1982) et du lemme de connexion d'Hayashi (1997). C'est ce dernier lemme qui est à l'origine des progrès récents en dynamique C^1-générique. Ces lemmes sont présentés brièvement dans la première annexe du livre. Le lemme de fermeture de Pugh a un énoncé particulièrement simple : si x est un point récurrent pour le difféomorphisme f, alors il existe une perturbation C^1-proche de f pour laquelle x est un point périodique.

Voici deux théorèmes de généricité C^1 essentiellement dus à R. Mañé :

Théorème. — *Un difféomorphisme C^1-générique d'une surface est :*
– ou bien hyperbolique (en restriction à l'ensemble des points récurrents) ;
– ou bien possède une infinité de points périodiques attracteurs ou répulsifs.

En d'autres termes, pour les difféomorphismes C^1 de surfaces, on observe encore un phénomène similaire à celui de Newhouse, et c'est la seule alternative à l'hyperbolicité, du point de vue générique. Ce résultat possède à présent un analogue en dimension supérieure (F. Abdenur 2003), qui fait appel à la notion de décomposition dominée ; ces questions sont discutées dans le chapitre X.

Théorème. — *Considérons l'ensemble des difféomorphismes C^1 définis sur une surface, et préservant un volume fixé sur la surface. Alors, génériquement, un tel difféomorphisme est :*
– ou bien hyperbolique (sur toute la surface) ;
– ou bien ses exposants de Lyapounov sont presque partout nuls.

Le tore est la seule surface orientable dont le fibré tangent peut s'écrire comme somme de deux sous-fibrés, donc la seule surface à admettre un flot hyperbolique (sur toute la surface). Pour toutes les autres surfaces, les difféomorphismes préservant le volume ont génériquement des exposants nuls : pas de contraction ni de dilatation en moyenne des vecteurs tangents le long des trajectoires. Ce résultat est à l'opposé de ce qui est attendu en topologie C^2. Là encore, ce résultat a des analogues en dimension supérieure (J. Bochi, M. Viana 2002) ; ces généralisations sont abordées au chapitre XII.

Topologie $\mathbf{C^2}$ et mesures physiques

Il faut relativiser la portée du résultat précédent ; préserver un volume n'est pas du tout une propriété générique en topologie C^k, pour k quelconque, et ce même pour les systèmes uniformément hyperboliques. Par contre, en topologie C^2, il est possible de construire, pour les systèmes hyperboliques, des mesures qui se substituent au volume, et qui décrivent le comportement de presque toutes les trajectoires, le presque tout faisant ici référence à la mesure de Lebesgue. Ces mesures sont parfois qualifiées de « mesures physiques » et portent le nom de mesures S.R.B. (Sinaï, Ruelle, Bowen). Elles ont des exposants de Lyapounov positifs et sont en nombre fini.

L'espoir est grand de montrer que ces mesures existent pour la plupart des systèmes vérifiant des conditions faibles d'hyperbolicité (hyperbolicité partielle, décomposition dominée). Le chapitre XI détaille les constructions disponibles à l'heure actuelle.

Un certain nombre de systèmes dynamiques ont fait l'objet d'une attention toute particulière ; il s'agit d'une part de l'application de Hénon $(x, y) \mapsto (1-ax^2+y, bx)$ définie de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$: pour un ensemble judicieusement choisi de paramètres $a, b \in \mathbf{R}$, M. Benedicks et L. Carleson montrent qu'il existe effectivement un compact invariant attracteur supportant une mesure S.R.B. ; celle-ci satisfait à une propriété de mélange exponentielle et vérifie un théorème central limite. Il a été possible de généraliser ces considérations à une classe d'applications dite de type « Hénon » ; ceci fait l'objet du chapitre IV.

D'autre part, le chapitre IX fait le point sur l'attracteur de Lorenz ; il s'agit là d'un flot défini sur $\mathbf{R}^3$, et non pas d'un difféomorphisme. Introduit en 1963 par E. Lorenz pour modéliser certains problèmes de turbulence en météorologie, il faut attendre 1999 pour que l'existence mathématique de cet attracteur soit enfin établie. Là encore, il existe des mesures S.R.B. (W. Colmenarez 2002) et ce résultat est vrai pour une classe de flots plus généraux, dits de type « Lorenz ». Enfin, C. Morales et M. J. Pacifico (2003) obtiennent le résultat suivant en C^1 générique :

Théorème. — *Un champ de vecteurs C^1-générique défini sur une variété compacte de dimension* 3 *satisfait à l'une des alternatives suivantes :*
– ou bien l'ensemble de ses points récurrents se décompose en un nombre fini d'ensembles invariants, chacun étant soit uniformément hyperbolique, soit un attracteur de type « Lorenz », soit un répulseur de type « Lorenz » ;
– ou bien il admet une infinité d'orbites périodiques attractives ou répulsives.

Remarques finales

Parmi les autres thèmes abordés, le chapitre V présente les résultats de dynamique sur les surfaces obtenus par E. Pujals et M. Sambarino (2000), et qui permettent de conclure à la C^1-densité des difféomorphismes admettant des tangences homoclines dans le complémentaire de l'ensemble des difféomorphismes hyperboliques ; le chapitre VI explique quels phénomènes sont susceptibles d'apparaître au cours d'une bifurcation occasionnée par l'existence de cycles hétérodimensionnels. Enfin, les problèmes de stabilité stochastiques sont évoqués en diverses occasions.

Sur le fond, ce livre représente un travail de synthèse remarquable qui devrait intéresser tous les spécialistes des systèmes dynamiques. Les auteurs ont tenu à exposer les idées qui sous-tendent chacun des résultats présentés, et ce avec beaucoup de conviction et d'enthousiasme. De même, ils se sont efforcés d'indiquer les conjectures et les problèmes ouverts à l'heure actuelle.

Sur la forme, on regrettera un certain nombre de coquilles ainsi que quelques incohérences de notation ; le texte reste agréable à lire, hormis pour quelques passages qui auraient gagné à être illustrés par un nombre plus important de figures.

Yves Coudène,
Université Rennes I

Understanding Probability, chance rules in everyday life
HENK TIJMS
Cambridge University Press, 2004. 390 p.
ISBN : 0-521-54036-4. £ 18,99

> « La théorie des probabilités n'est en fin de compte que sens commun réduit à calcul mathématique ; elle nous permet de saisir avec exactitude ce que des esprits subtils ressentent avec une sorte d'instinct qu'ils sont souvent incapables d'expliquer... Elle apprend à se garantir des illusions qui souvent nous égarent. »

Cette citation attribuée à Laplace et que Henk Tijms insère dans l'introduction de son *Understanding Probability*, résume bien l'ambition de ce livre : amener un lecteur novice en probabilité, de la description de simples phénomènes aléatoires, qu'on côtoie quotidiennement, à une première formalisation mathématique des objets probabilistes, pour ensuite lui permettre d'affronter des situations de plus en plus complexes tout en démasquant les pièges dans lesquels nous font souvent tomber les raccourcis de notre intuition.

Il s'agit d'un ouvrage à mi-chemin entre le livre de vulgarisation et le manuel scolaire. La première partie est écrite dans une prose ample, qui évite les formalismes et est, en revanche, riche d'exemples, et s'adresse à quiconque n'est pas effrayé par quelques formules. Elle requiert seulement quelques connaissances de mathématique élémentaire (les outils les plus sophistiqués employés étant la série géométrique et les exponentielles), mais elle donne un vaste aperçu de la théorie classique des probabilités, ainsi qu'une idée de ses nombreuses applications. La formalisation précise de ces concepts est renvoyée à la deuxième partie, plus courte et mathématiquement dense, qui est en effet un manuel sur l'essentiel de la théorie des probabilités.

Pour introduire le lecteur au monde de l'aléatoire, l'auteur utilise, dans son premier chapitre, les jeux de hasard, qui offrent une source privilégiée d'exemples à la fois simples et concrets. On introduit ainsi tout naturellement la notion mathématique d'événements élémentaires comme les résultats possibles d'un jeu et celle de variable aléatoire comme le gain qui s'en suit. La loi des grands nombres est utilisée dès les premières pages, pour permettre d'interpréter la probabilité d'un événement à l'aide de la notion plus intuitive de fréquence de réalisation de ce même événement dans une suite d'expériences successives. On présente au lecteur, de façon très descriptive, des nombreuses propriétés des processus aléatoires obtenus par la répétition d'expériences indépendantes, c'est-à-dire ce qui se produit lorsqu'on joue souvent à la roulette. On voit ainsi, entre autres, comment les systèmes censés augmenter les chances de gain sont, sur le long terme, voués à l'échec et que le seul moyen de tirer profit des jeux de hasard est d'ouvrir un casino.

Henk Tijms, conformément à sa spécialisation en recherche opérative, utilise avec insistance les résultats de simulations obtenues par ordinateur pour aider le lecteur à visualiser les phénomènes qu'il décrit, ainsi que pour soutenir certaines affirmations. Il prend aussi soin, après une brève introduction aux nombres pseudo-aléatoires, de décrire avec précision les algorithmes informatiques utilisés pour mimer les situations étudiées. Cette approche « expérimentale » des probabilités lui permet de présenter un panorama de la théorie des probabilités d'une ampleur qu'on trouve rarement même dans des cours pour spécialistes.

Cette dichotomie d'approche, basée à la fois sur la théorie et sur la simulation, continue dans la suite du livre où d'autres problèmes plus ou moins classiques tirés de la vie quotidienne donnent l'occasion de réfléchir sur notre capacité à évaluer les probabilités et de se familiariser avec des manières plus rigoureuses de les calculer. C'est, par exemple, le cas du classique problème de l'anniversaire (Quelle est la probabilité dans un groupe de personnes qu'au moins deux fêtent leur anniversaire le même jour ?) qui permet de développer un intéressant discours sur les coïncidences d'événements rares.

On trouve aussi l'analyse d'événements historiquement vérifiés, comme celui de la loterie que les forces armées américaines avaient utilisée en 1970 pour désigner les réservistes destinés à partir pour la guerre du Viêt-nam. Le résultat de cette loterie avait fait crier au scandale, car les heureux gagnants étaient, en grande partie, nés dans les premiers mois de l'année ; la présence d'évidentes régularités dans une extraction en principe uniforme parmi tous les réservistes est en effet suspecte. Henk Tijms nous explique les raisons de tels résultats en analysant la mécanique de l'extraction et, plus en général, nous éclaircit sur la difficulté d'obtenir des générateurs vraiment aléatoires. Il en profite aussi pour donner une première introduction à la statistique et aux tests d'hypothèses : que signifie qu'une suite de résultats aléatoires ne corresponde pas à un modèle donné ? Comment peut-on mesurer et quantifier cet écart ?

Le chapitre suivant introduit les distributions de probabilités discrètes les plus importantes, en les plaçant dans des situations économiques et sociales. Ainsi, la distribution binomiale est illustrée, entre autres, par le problème de la surréservation chez les compagnies aériennes, c'est-à-dire comment déterminer la probabilité de laisser à terre des passagers lorsqu'on accepte plus de réservations que de places disponibles sur un vol. Les applications de la distribution de Poisson sont encore plus nombreuses ; en effet, elle peut servir de modèle au nombre d'incendies dans une ville, ainsi qu'à calculer les polices d'assurance. Mais on apprend aussi qu'en 1898, un des pères de ce modèle L. von Bortkiewcz l'utilisait pour compter les soldats de l'armée prussienne morts chaque année par un coup de pied de cheval. Enfin, la loi hypergéométrique permet de calculer exactement la probabilité de gagner au Loto (et déterminer ainsi combien l'État y gagne).

Le théorème de la limite centrale et quelques-unes de ses conséquences sont les protagonistes du chapitre V. La distribution normale est introduite comme limite de distributions binomiales, prenant bien soin de donner une interprétation intuitive de la notion d'intégrale et des distributions continues de probabilité. On s'attarde sur les applications statistiques, analysant par exemple la fiabilité des résultats d'une étude pour le vaccin contre la polio ou l'intervalle de confiance lors des sondages électoraux. Un petit, mais intéressant, paragraphe est aussi consacré à la vision bayésienne des statistiques. Un autre point fort du chapitre est l'introduction du mouvement brownien et de ses applications à la finance ; on explique en particulier la célèbre méthode de Black-Scholes pour calculer le prix d'une option, qui est le droit d'acheter dans un an à un prix fixé un certain produit financier dont le prix fluctue aléatoirement.

Un petit chapitre d'approfondissement sur la probabilité conditionnelle et la formule de Bayes conclut la partie de vulgarisation. On y présente, entre autres, le célèbre dilemme de Monty Hall, du nom du programme télévisé dont le jeu à prix, pourtant apparemment très simple, avait suscité un énorme débat, montrant que même la communauté scientifique n'est pas à l'abri de flagrantes erreurs. La solution rigoureuse du dilemme est présentée agrémentée de savoureuses anecdotes et d'une analyse des pièges psychologiques dans lesquels on tombe si facilement.

La deuxième partie de l'ouvrage est destinée à la démonstration rigoureuse d'une partie des résultats introduits auparavant, qui requièrent des connaissances mathématiques plus approfondies. On y trouve, traité de manière classique, l'essentiel de la théorie des probabilités : une introduction axiomatique aux mesures de probabilités, variables aléatoires à valeurs discrètes et continues, corrélation entre variables aléatoires et fonctions génératrices.

Le livre de Henk Tijms est sûrement un ouvrage captivant, mais il faut quand même signaler quelques points noirs. Premièrement, l'utilisation massive des simulations par ordinateur leur confère une aura injustifiée d'absolue fiabilité, tandis que leurs limites sont passées souvent sous silence. Certains mathématiciens de formation théorique risquent de se scandaliser par des affirmations du style « cette simulation démontre tel résultat » ou « explique tel phénomène », dont le livre pullule. En outre, quelquefois l'auteur fait preuve d'une certaine légèreté et tombe dans les pièges des raccourcis intellectuels qu'il essaye de démasquer. Il faut, par exemple, surveiller ces fascinants exemples, car, parfois, il arrive qu'une analyse plus profonde amène au contraire du résultat qu'on était censé obtenir (c'est par exemple le cas du problème légal de la question 6).

Mais, dans son ensemble, *Understanding Probability* reste un livre remarquable, qui grâce à son approche intuitive, saura séduire tous les lecteurs, qui, tous n'étant pas des professionnels des mathématiques, veulent s'initier aux probabilités de manière autonome. Henk Tijms, qui travaille à la Vrije Universiteit d'Amsterdam, suggère d'utiliser son livre comme manuel pour des cours universitaires dans les filières sociales ou techniques. Peut-être, cela n'est pas envisageable en France, où l'enseignement de probabilités est, en général, plus rigoureux et formel, mais cet ouvrage pourrait en tout cas être une bonne lecture complémentaire et aider les enseignants à rendre leurs cours plus accessibles et captivants.

Sara Brofferio,
Université Paris-Sud

Musique et acoustique : de l'instrument à l'ordinateur
Philippe Guillaume
Éditions Lavoisier, Paris, 2005. 190 p. ISBN : 2-7462-0999-3. 47,50 €

L'objet de cet ouvrage est quelque peu atypique, comme l'est d'ailleurs le parcours de son auteur Philippe Guillaume. En effet, après avoir été accordeur de piano pendant les premières années de sa vie professionnelle, P. Guillaume a entamé des études de mathématiques à l'université Paul Sabatier de Toulouse, études qu'il a menées jusqu'au bout en passant tous les diplômes universitaires (y compris agrégation et doctorats) ; il est actuellement professeur des universités à l'INSA de Toulouse. Son domaine d'activité de recherche en mathématiques appliquées est l'optimisation de formes ; parmi les enseignements qu'il dispense à l'INSA figure un cours dit d'ouverture sur l'acoustique musicale. Ceci nous amène à la matière traitée dans le livre en question. Comme cela est indiqué dans l'avant-propos, « *l'objectif du livre est de donner au lecteur un aperçu général sur la nature du son musical, depuis sa production par les instruments de mesure traditionnels jusqu'aux sons obtenus par synthèse numérique* », bref « *le son y est abordé d'un point de vue scientifique* ». Les six chapitres le composant sont :

1. les sons (45 pages) ;
2. les instruments de musique (47 pages) ;
3. les gammes et tempéraments (11 pages) ;
4. psychoacoustique (12 pages) ;
5. le son numérique (27 pages) ;
6. synthèse et effets sonores (20 pages) ; l'ouvrage se termine par une bibliographie comportant 29 références.

La nature du sujet d'étude fait qu'on aborde tout naturellement des notions d'acoustique comme la génération et la propagation des sons, de mathématiques comme l'analyse de Fourier, de psychoacoustique, de théorie du signal analogique et numérique, d'algorithmique et d'informatique comme le format MP3 de compression des sons, et bien entendu de musique.

Les connaissances scientifiques requises pour lire ce livre sont contenues dans celles qu'on aborde dans le segment L des formations mathématiques (sauf peut-être pour la physique et l'acoustique qui vont au-delà) ; quant aux connaissances musicales, reconnaissons qu'elles dépassent largement celles de l'amateur lambda (comme moi).

Cet ouvrage, original sous la plume d'un mathématicien, plaira à celles et ceux qui s'intéressent au son et à la musique et qui ont une culture scientifique de base : étudiants, enseignants-chercheurs, professionnels de tout genre dans les domaines scientifiques et techniques. On peut simplement regretter que le prix de vente soit exagéré (47,50 euros) ; un livre de 190 pages à couverture souple, pas trop spécialisé, doit pouvoir être disponible en France à moins de 25 euros.

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty,
Université Paul Sabatier de Toulouse

Le suffrage universel inachevé
Michel Balinski
Débats, Éditions Belin, 2004. 336 p. ISBN : 2-7011-3774-8. 20,50 €

Comme tout un chacun, je suis régulièrement convié à exprimer ma préférence ou faire mon choix en votant (élections politiques, universitaires, au sein de sociétés savantes comme la SMF). Pour les prochaines élections nationales politiques de 2007, puis les locales politiques décalées en 2008, le personnel politique décideur a estimé qu'il ne convenait pas de changer de règles ni de redécouper les circonscriptions élisant les députés ; tout le monde craint la « magouille » des gens en place... et bien désireux d'y rester. En abordant ce livre, je pensais naïvement être conforté dans l'idée que les modes opératoires actuels d'élection étaient équitables et peu contestables. Or il n'en est rien : j'ai pris ce que j'ai lu dans ce livre et les conclusions qu'en tire l'auteur comme un seau d'eau froide sur la tête...

L'auteur : après avoir été professeur dans plusieurs universités américaines, le mathématicien M. Balinski est installé en France depuis 1982 comme directeur de recherche au CNRS (Laboratoire d'économétrie de l'École polytechnique). Cela explique que les systèmes électoraux des deux pays, les États-Unis et la France, plus que d'autres, soient analysés à la loupe dans l'ouvrage en question. Les systèmes électoraux font partie depuis des années des sujets d'intérêt de M. Balinski, y compris dans son travail de chercheur professionnel ; entre 2001 et 2003, il avait déjà publié dans la revue mensuelle « *Pour la Science* », seul ou avec des coauteurs, une série d'articles sur les procédures de recrutement (analysant en passant celui des postes universitaires), le découpage électoral, les différents modes de répartition des sièges de députés ou sénateurs,... en particulier, au moment des élections d'avril 2002, un numéro spécial de « *Pour la Science* » avait été consacré au sujet.

Dans le copieux ouvrage dont nous rendons compte (336 pages, au prix modique de 20,50 euros), M. Balinski fait d'abord une étude *historique* détaillée de l'évolution du suffrage universel et de ses modes de représentation (comme déjà dit, essentiellement ceux des États-Unis et de France) ; *« l'Histoire, pour ainsi dire »* , explique-t-il au début, « porte *l'analyse rigoureuse jusqu'au moment où, les connaissances acquises, il devient facile et naturel d'aborder directement les problèmes actuels pour bâtir une théorie »* . L'auteur y présente ensuite *les systèmes électoraux divers et variés (en cours ou envisageables)* : on y apprend que le scrutin proportionnel avec plus fort reste (PFR, très utilisé dans le milieu universitaire) accumule à peu près tous les défauts possibles (pages 194–196), que le système du mathématicien Sainte-Laguë (1910) est très équitable mais pratiquement jamais utilisé, et, comme attendu, qu'en changeant de système de vote on peut modifier presque à souhait le résultat d'un vote. La première partie, intitulée « La longue marche du suffrage universel », comprend cinq chapitres couvrant au total 160 pages ; elle est essentiellement historique : Le droit de vote 1789-1848 ; le compte des voix 1848-1958 ; la V^{e} république 1958-2004 ; les leçons de l'Histoire. La deuxième partie, intitulée « La justice électorale » (environ 100 pages) est découpée en cinq chapitres également : l'Assemblée nationale et la « répartion équitable » ; le Parlement européen et la « biproportionnalité » ; le découpage des circonscriptions : France et États-Unis ; le Sénat et les autres conseils ; l'élection d'un président : France et États-Unis. En épilogue, l'auteur résume son analyse, je cite : *« Ce livre prétend démontrer deux vérités fondamentales. La première est que depuis les débuts de la démocratie représentative, les hommes politiques ne cessent de manipuler les règles du jeu qui les conduisent au pouvoir — c'est-à-dire, les systèmes électoraux et modes de scrutin qui les élisent — cherchant à asseoir plus solidement leur pouvoir. La seconde est que ces règles, pleines de subtilités et de finesses, riches de conséquences surprenantes sinon paradoxales, peuvent être analysées rigoureusement, car il existe une théorie les concernant : la science électorale, au service de la justice électorale ».* Le livre se termine avec quatre annexes ; la dernière (la D) présente un exemple d'élection entre cinq candidats où chacun gagne selon un mode de scrutin (à méditer en pensant au choix récent du site des jeux olympiques de 2012 ou...à un recrutement dans une commission de spécialistes).

Ne cachons pas que, par certains aspects, la lecture de l'ouvrage de M. Balinski n'est pas une détente : beaucoup de chiffres, de comparaisons, de tableaux... y sont présentés et analysés avec force détails. On en ressort aussi un peu énervé : un département ayant 23 000 habitants de plus qu'un autre, se voit attribuer deux députés de moins (il y a aujourd'hui 72 paires de départements où le plus peuplé a moins de députés) ; certains français pèsent à l'Assemblée nationale jusqu'à 5,5 fois plus que d'autres ; d'où la question : comment se fait-il que les équipes des candidats aux élections politiques (dont certains membres sont sérieux, formés à la rigueur scientifique, et soucieux de justice électorale) ne proposent pas de systèmes plus justes que ceux en cours actuellement ? J'ai donc interrogé l'auteur M. Balinski avec la question suivante : quelle a été la réaction des hommes politiques ou de leurs conseillers aux analyses et conclusions de son ouvrage ? Réponse : *« Les politiciens ne veulent pas que d'autres se mêlent des fonctions qui transforment les voix en élus : ils préfèrent continuer de les concevoir à leur gré. Néanmoins, j'ai eu quelques réactions : une lettre très positive d'un ancien président de la République, une autre d'un ancien président du RPR, un long entretien avec l'actuel président d'un des grands partis. Peut-être plus important, on m'a fait comprendre que le livre et un article dans la revue* « Commentaire » *(été 2005) ont eu une audience attentive au Conseil constitutionnel, car dans les pays où il y a eu des réformes, elles ont été forcées ou encouragées par les Cours de justice. Il est difficile de faire accepter l'importance d'une analyse rigoureuse de systèmes électoraux, par des hommes politiques, juristes, politologues ou journalistes. Mais la situation est dramatique : sans l'égalité des voix des électeurs, il n'y a point de démocratie. »* Il y a là matière à réflexion...

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty,
Université Paul Sabatier de Toulouse

Contrôle optimal : théorie et applications

EMMANUEL TRÉLAT

Mathématiques concrètes, Éditions Vuibert, Paris, 2005. 288 p.
ISBN : 2-7117-7175-X. 30 €(ou $)

Disons-le d'emblée : c'est un livre que j'aurais aimé écrire... Il concerne un domaine des mathématiques (et d'automatique) peu couvert en France, aussi bien en formation qu'en recherche, celui du contrôle optimal (que nous préférons appeler ici du nom plus français de *Commande optimale*) des systèmes gouvernés par des équations différentielles. S'il fut un sujet plus « chaud » en mathématiques appliquées dans les années soixante et soixante-dix, et s'il reste un domaine de recherche actif dans certains pays comme la Russie, les États-Unis et l'Angleterre, en France il a été laissé essentiellement aux automaticiens. On trouve néanmoins des groupes très actifs en recherche dans ce domaine dans des centres comme Toulouse (ENSEEIHT), université de Dijon, École des mines de Paris, INRIA-Rocquencourt, université de Lyon I, université de Paris I (en économie mathématique)... Pour ce qui est de la formation, on en trouve trace dans des options de deuxième année d'écoles d'ingénieurs (ENSEEIHT-Toulouse, École Centrale de Paris, École des mines de Paris, Supaéro de Toulouse,...), un peu dans des masters 1 de mathématiques (comme à l'université Paul Sabatier de Toulouse), dans des masters professionnels comme celui d'ingénierie mathématique et automatique de l'université de Paris-Sud à Orsay (où enseigne l'auteur du livre).

L'ouvrage proposé est dû à un jeune spécialiste du sujet, É. Trélat (maître de conférences à l'université de Paris-Sud à Orsay) ; pour les moins jeunes, il fait écho d'une certaine manière au « Cours d'automatique théorique » de R. Pallu de la Barrière (Éditions Dunod, 1966), il se situe dans le même esprit et objectif que l'ouvrage de M. Bergounioux (« Optimisation et contrôle des systèmes linéaires », Dunod 2001) ; les deux ouvrages (récents) en anglais qui s'en rapprochent le plus sont ceux de L. M. Hocking (« Optimal Control, an Introduction to the Theory with Applications », Oxford Series, 1991) et A. Locatelli (« An Introduction to Optimal Control », McGraw-Hill, 2001).

Le livre de É. Trélat débute avec un chapitre I d'introduction sur la commande optimale d'un ressort, exemple-modèle qui servira de fil rouge dans toute la suite. Cet exemple détaillé était déjà disponible sur le site web de la SMAI en 2002-2003 puisque « Optimisation et Commande optimale » figuraient cette année-là comme thèmes des projets TIPE en classes préparatoires aux écoles scientifiques. La première partie du livre, composée de trois chapitres traite de la commande optimale de systèmes *linéaires :* contrôlabilité (13 pages) ; temps-optimalité (6 pages) ; problèmes linéaires-quadratiques (15 pages). Disons que cette partie est plutôt classique ; elle utilise les outils et résultats d'algèbre linéaire et d'équations diférentielles linéaires qui sont rappelés en annexes du livre ; elle pourrait servir aussi bien dans un cours de mathématiques que d'automatique. Commencer par le monde linéaire est intéressant du point de vue pédagogique, et aussi parce que la linéarisation de modèles non-linéaires est utile par exemple dans les questions dites de stabilisation. Mais le monde est non-linéaire... too bad. L'auteur s'attaque donc en deuxième partie d'ouvrage à la commande optimale de systèmes *non-linéaires :* cinq chapitres y sont consacrés. Le chapitre V (11 pages) est dédié aux définitions et préliminaires : application entrée-sortie, notions de contrôlabilité, contrôles singuliers. Le chapitre VI (3 pages) donne l'occasion de présenter succinctement un théorème général d'existence de trajectoires optimales. Avec le chapitre VII (31 pages) on arrive à un point culminant : le principe du minimum (ou du maximum, ça dépend des formulations) de L. Pontryagin (PMP en abrégé). Le PMP (un énoncé général figure en page 103–104) est une condition nécessaire satisfaite par les solutions d'un problème de commande optimale ; elle est importante aussi bien pour des considérations théoriques qu'algorithmiques (les méthodes dites indirectes du chapitre IX par exemple). Avoir démontré le PMP (par les russes à la fin des années cinquante, motivés par des problèmes militaires ou du spatial) est, de mon point de vue, une des plus brillantes réalisations mathématiques de la deuxième moitié du XX^e^ siècle. L'histoire du processus de sa découverte est racontée dans deux articles, celui de R. Gamkrelidze (publié en 1999) que cite l'auteur, mais aussi celui plus polémique et non publié de V. Boltyanski (rapport de l'université technique de Munich, 1994) ; ce dernier montre les difficultés dans la démarche de création mathématique et aussi dans les relations entre collègues mathématiciens (quand il s'agit d'attribuer le crédit d'une idée ou d'une démonstration). Des exercices et problèmes d'illustration sont proposés, parfois avec des indications de solutions. Le chapitre se termine par le problème de la commande optimale et stabilisation d'une navette spatiale, projet du CNES-Toulouse sur lequel a eu à travailler l'auteur du livre. Le chapitre VIII (9 pages) traite de la théorie de Hamilton-Jacobi dans le contexte de la commande optimale : cette matière est plus classique et peut être trouvée dans d'autres ouvrages, y compris en français (celui de Barles en 1994 par exemple). Le chapitre IX (8 pages) est entièrement consacré aux méthodes numériques de résolution d'un problème de commande optimale : méthodes dites indirectes (méthodes de tir appliquées aux systèmes différentiels issus du PMP), méthodes directes (discrétisation directe du problème originel) ; on appréciera le tableau comparatif synthétique et les commentaires (pages 178–180) sur « Quelle méthode choisir ? ». L'ouvrage se termine avec une Annexe de cinq courts chapitres (45 pages au total) où sont rappelés les définitions et résultats essentiels d'algèbre linéaire, sur les équations différentiels linéaires, en commande-automatique linéaire.

L'ouvrage rendra service à ceux qui s'intéressent aux applications de la Commande optimale dans les systèmes gouvernés par des équations différentielles (elles sont nombreuses, à commencer par le domaine spatial et la robotique). Pour l'avoir expérimenté dans un petit bout de Master 1 de mathématiques, je sais aussi que le domaine est utile en formation : pour donner le goût du calcul variationnel moderne, pour l'apprentissage mathématique (analyse et synthèse d'un problème, déductions, tri parmi les solutions préconisées), etc.

On peut regretter quelques anglicismes (« temps-optimalité » pour *time optimality,* « preuve » systématiquement utilisé à la place de « démonstration » comme souvent en mathématiques d'ailleurs,...) ou fautes de français (« prémisses » au lieu de « prémices » en page 93 (peut-être est-ce voulu ?), « paramétriser » au lieu de « paramétrer » en page 131,...) ; mais ce ne sont que des broutilles dans un ensemble de très bonne facture que je recommande aux lecteurs de la *Gazette*.

Le livre de Trélat coûte 30 euros, c'est le premier d'une nouvelle collection chez Vuibert intitulée « Mathématiques concrètes ».

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty,
Université Paul Sabatier de Toulouse