

PROMENADES MATHÉMATIQUES

« Je n'y avais jamais pensé, c'est vraiment très bien, nous sommes vraiment contents de pouvoir vous accueillir... » Cette phrase, quiconque d'entre nous ayant eu une fois l'occasion de se rendre dans un établissement scolaire pour y présenter une conférence de mathématiques devant des élèves l'a forcément entendue avant même le début de son exposé. Il faut dire que, pour les enseignants de mathématiques, les possibilités concrètes de présenter la discipline à leurs élèves sous un jour moins scolaire sont peu nombreuses : rien d'étonnant, donc, à ce qu'ils soient ravis quand une occasion se présente.

C'est pour créer ces occasions que nous avons conçu les « promenades mathématiques ». Il s'agit d'un catalogue de conférences de vulgarisation des mathématiques, en ligne (<http://smf.emath.fr/MathGrandPublic/PromenadesMathematiques/>) depuis novembre 2005, destiné à faciliter l'organisation de conférences à toutes les périodes de l'année, dans toute la France, dans des établissements tels que collèges, lycées, universités, mais aussi médiathèques et comités d'entreprises. Initiées conjointement par la SMF et l'association Animath et avec le soutien du CNRS, les promenades mathématiques ont pour vocation de gérer l'offre et la demande de conférences, ainsi que de fédérer les différentes initiatives existantes au niveau local qui vont dans le même sens. Plus largement, les promenades mathématiques veulent impulser un mouvement de fond en faveur de la vulgarisation des mathématiques, notamment par le biais d'actions de formation à la vulgarisation, par exemple auprès des doctorants dans le cadre des CIES.

Nous lançons donc un appel à contributions, à la fois pour l'offre et pour la demande. Commençons par l'offre : une première vague de sollicitations nous a permis de disposer, en à peine quelques semaines, d'une banque d'une quarantaine de titres et de résumés de conférences. Cela a rendu très rapidement possible la mise en ligne d'un premier catalogue, et nous remercions tous les collègues sollicités d'avoir répondu si vite et en si grand nombre. Nous n'en avons pas moins besoin d'étoffer encore le catalogue. À vous tous qui savez l'importance de faire découvrir les mathématiques sous un jour moins scolaire, nous vous demandons de nous envoyer des propositions de conférences : un titre, un résumé, le niveau scolaire de la conférence, ainsi qu'éventuellement les besoins en matériel, une délimitation géographique (pour ceux souhaitant éviter de trop grands déplacements) et une référence bibliographique si la conférence est déjà publiée sous une forme ou sous une autre. Les conférences peuvent être conçues selon des angles très différents, allant du jeu à la perspective historique en passant par des manipulations physiques ou informatiques. Elles peuvent aussi prendre la forme d'un exposé plus classique au cours duquel le conférencier motive le sujet qu'il introduit et explique un certain nombre de résultats tout en faisant sentir au public l'importance de la question abordée. Celle-ci peut être théorique aussi bien qu'appliquée, intellectuelle

aussi bien que concrète. Les conférences ne se limitent pas nécessairement à des sujets purement mathématiques, elles peuvent aussi donner un point de vue de mathématicien sur certains domaines comme la physique, la biologie, l'économie, les sciences humaines, l'art ou la littérature, entre autres.

Second point, la demande : établissements scolaires et universitaires, rectorats, écoles d'ingénieurs, maisons des sciences ou de la culture, médiathèques, comités d'entreprises, clubs de mathématiques, journaux, magazines, revues spécialisées, sont autant de structures à informer, la médiatisation des promenades mathématiques étant une condition de leur succès. Aidez-nous à faire connaître le catalogue un peu partout, parlez-en autour de vous. C'est ainsi qu'ensemble nous contribuerons à diffuser davantage la culture mathématique auprès du plus grand nombre.

* * *

Le texte qui suit développe l'une des conférences du catalogue des « Promenades mathématiques », adaptée pour la *Gazette*. Il est pour partie constitué d'extraits de l'ouvrage *Le Fabuleux destin de $\sqrt{2}$* (éditions Le Pommier, parution mars 2006).

Le Fabuleux destin de $\sqrt{2}$

Benoît Rittaud¹

Au Panthéon des nombres

Il était une fois le Panthéon des nombres. . .

En son centre trône le nombre π , qui attire la plupart des regards. À la droite du maître on aperçoit le nombre d'or, $(1 + \sqrt{5})/2$, réputé plus accessible. Viennent ensuite d'autres figures d'inégale importance : la base des logarithmes népériens (e), la constante d'Euler (γ), la constante d'Apéry ($\zeta(3)$). . .

Dans ce tableau, c'est tout juste si l'on remarque la présence de la racine carrée de 2. Oh, bien sûr, tout visiteur régulier du Panthéon vous dira que, en tant que rapport de la diagonale du carré à son côté, $\sqrt{2}$ est une constante fondamentale de la géométrie. Souvent, il ajoutera doctement que c'est aussi le tout premier nombre dont l'irrationalité a été démontrée, par Pythagore en personne.

Si vous insistez encore, il éclairera votre lanterne en ces termes : « si $\sqrt{2}$ était rationnelle, alors on pourrait l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible de la forme p/q , donc on aurait $p^2 = 2q^2$, donc p^2 serait pair, donc p aussi et s'écrirait donc $2p'$, d'où $q^2 = 2p'^2$ et par le même raisonnement on obtiendrait que q serait pair, donc p et q seraient tous deux pairs contredisant l'hypothèse initiale que p/q est irréductible, d'où l'irrationalité de $\sqrt{2}$. »

En général, une fois que vous aurez accepté de dire que cette démonstration est élégante, vous serez prié de circuler pour aller voir ce qui se passe du côté

¹ Université Paris XIII

des nombres transcendants ou des équations résolubles par radicaux. Aurions-nous donc fait le tour de ce qu'il y a à dire sur la racine carrée de 2 ? On en est loin : la liste de toutes ses propriétés est d'une variété presque infinie. Peut-être est-ce précisément parce qu'elle constitue le pain quotidien des mathématiciens que ceux-ci en oublient de la regarder avec les mêmes yeux curieux qui leur font admirer les merveilles cachées et inattendues d'autres nombres.

La chasse aux décimales

De toutes les constantes mathématiques fondamentales, la racine carrée de 2 est probablement celle qui est connue depuis le plus longtemps. Quatre mille ans d'histoire nous séparent d'une tablette babylonienne, YBC 7289 (*Yale Babylonian Collection*), sur laquelle un scribe a dessiné un carré et ses diagonales, ainsi que la longueur du côté, celle de la diagonale et, surtout, le rapport entre les deux, évalué à 1;24,51,10 en notation sexagésimale, soit environ 1,4142129 (au lieu de 1,414213562...).



*Mathematical exercise
to find diagonal of square,
using the square root of 2 (YBC 7289)*

Une telle précision indique non seulement que les Babyloniens savaient que le rapport de la diagonale au côté est « un nombre qui, multiplié par lui-même, donne 2 », mais aussi qu'ils en connaissaient un algorithme de calcul. Ils ont ainsi fait de la racine carrée de 2 le nombre connu le plus précisément pendant plus de deux millénaires. Le nombre π , quant à lui, a dû attendre la fin du V^e siècle pour être connu avec une précision comparable, grâce au Chinois Tsu Ch'ung-Chih qui découvre l'approximation 355/113.

Sans être aussi énorme que celui associé aux décimales de π , le palmarès des chasseurs de décimales de $\sqrt{2}$ est tout de même très fourni, même s'il est à peu près inconnu. Le prestige des noms qui figurent sur ce palmarès, de Marcus Boorman (520 décimales en 1887, dont 315 exactes), à Horace Uhler (1542 décimales en 1951, toutes exactes) en passant par René Coutsal (1032 décimales en 1950, toutes exactes) n'est en rien comparable à celui d'Archimède, d'Al-Kashi, de Ludolph Van Ceulen ou de William Shanks, qui doivent tous au moins une partie de leur célébrité

à leur calcul de nouvelles décimales de π . Et la gloire mathématique de François Viète ne doit guère aux 48 décimales de $\sqrt{2}$ qu'il a calculées. . .

Après le nombre π , la racine carrée de 2 est aujourd'hui le nombre connu avec le plus de précision, et ce pour une raison assez inattendue : le calcul de π est lié à celui de $\sqrt{2}$ dans beaucoup de formules. La méthode d'Archimède déjà permet de lier les deux constantes. Rappelons que cette méthode consiste à approcher la circonférence du cercle par les périmètres de polygones inscrits et circonscrits ; les formules d'Archimède lient les périmètres des polygones à n côtés à ceux des polygones à $2n$ côtés : en itérant les formules d'Archimède, on s'approche de la circonférence du cercle, et donc de π . Pour initialiser la récurrence, Archimède était parti d'hexagones, impliquant la racine carrée. . . de 3, mais certains chasseurs de décimales ont préféré partir du carré et de la racine carrée de 2 (c'est notamment le cas pour le célèbre record de Ludolph Van Ceulen). Depuis une trentaine d'années, après quelques siècles d'utilisation de séries entières, les records de décimales de π utilisent le plus souvent l'algorithme de Brent-Salamin (voir [10]) ou des formules dues à Jonathan et Peter Borwein. Toutes ces techniques font intervenir $\sqrt{2}$, « obligeant » ainsi les chasseurs de décimales de π à battre simultanément un record de décimales de $\sqrt{2}$!

L'irrationnelle

Bien sûr, l'histoire de $\sqrt{2}$ ne se réduit pas au calcul de ses décimales. Bien plus intéressant est le fait que la racine carrée de 2 est l'un des premiers nombres à avoir été repéré comme irrationnel. Contrairement à ce qu'on lit souvent, il n'y a toutefois aucune certitude définitive sur le fait que $\sqrt{2}$ aurait été « le tout premier nombre irrationnel », et encore moins que Pythagore serait l'auteur de la première démonstration (même si la découverte est l'œuvre de l'école pythagoricienne). Quant à savoir la méthode de démonstration employée, le flou est tout aussi total. Des variantes autour d'une même idée de base aux démonstrations radicalement différentes, on parvient sans peine à une liste de plus d'une vingtaine de façons élémentaires de se persuader du résultat. Voici par exemple ce qui est peut-être la plus belle démonstration arithmétique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, publiée par Richard Beigel (voir [4]) mais dont l'argument-clé se trouve déjà chez Euclide (*Éléments*, livre VII, proposition 29) : si p et q n'ont pas de facteur commun, alors p^2 et q^2 n'en ont pas non plus. En conséquence, si p/q est irréductible, alors p^2/q^2 l'est aussi, donc l'égalité $p^2/q^2 = 2$ impose $q = 1$, donc $p^2 = 2$, ce qui n'est clairement pas possible.

Se demander si $\sqrt{2}$ est ou non rationnelle n'a d'ailleurs rien de très naturel ; plus généralement, la distinction rationnel/irrationnel a parfois des relents d'arbitraire, parce qu'on écrit rarement, hors d'une pratique purement mathématicienne, les nombres sous forme d'une fraction. Le plus souvent, on utilise l'écriture décimale. Plutôt que de se demander si $\sqrt{2}$ est rationnel, on peut ainsi se demander si elle est décimale. La démonstration de ce que $\sqrt{2}$ ne s'écrit pas avec une quantité finie de chiffres après la virgule est certainement beaucoup plus simple et éclairante sur la notion de raisonnement par l'absurde que la démonstration habituelle de l'irrationalité : notons u le dernier chiffre d'un éventuel nombre décimal x égal à $\sqrt{2}$; en posant la multiplication de x par x , on voit que le dernier chiffre du résultat

est égal au dernier chiffre de u^2 ; puisque $x^2 = 2$, le dernier chiffre de u^2 devrait être nul, alors qu'aucun nombre entre 1 et 9 n'a pour carré un nombre dont le dernier chiffre est 0.²

L'art diagonal

L'intérêt de la racine carrée de 2 déborde de loin ces considérations purement mathématiques. Se plonger dans le sujet montre que, sans exagération, la racine carrée de 2 est le nombre irrationnel dont l'utilité pratique est la plus importante de tous, ou au moins la plus variée. La liste des domaines extra-mathématiques dans lesquels la racine carrée de 2 a été, ou est encore, utilisée va de la musique à la philosophie et de la photographie à la théologie, en passant par la géométrie des ornements dans l'art islamique.

Une discipline qui en a été tout particulièrement friande est l'architecture. Vitruve déjà, au I^{er} siècle de notre ère, s'y intéresse dans le souci pratique de construire un carré d'aire double d'un carré donné. Ce problème, qui fait l'objet d'un célèbre passage d'un dialogue de Platon (*Ménon*), se résout en prenant la diagonale du carré initial. La nature géométrique de la solution s'impose à l'architecte puisque « l'on ne peut venir à bout [du problème] par multiplication, ni par aucune voie de nombres » ([15], livre IX, chapitre premier).

Vitruve attribue également à la racine carrée de 2, ou plus exactement au rapport $\sqrt{2}$, une valeur esthétique : pour lui, l'atrium d'une villa romaine se doit d'être rectangulaire, dans un rapport longueur/largeur qui ne peut prendre que trois valeurs : les deux premières sont $5/3$ et $3/2$, et « la troisième est, quand d'icelle largeur se fait un carré parfait, puis qu'il se coupe d'une ligne Diagonale, dont l'étendue en est baillée pour longueur ». (Même si la phrase a un délicieux parfum suranné, la façon moderne consistant à écrire « longueur/largeur = $\sqrt{2}$ » est quand même plus directe !)

Cette esthétique prêtée par Vitruve à la racine carrée de 2 inspire ensuite les architectes de la Renaissance, à la fois parce que, précisément, ils redécouvrent Vitruve, mais aussi parce qu'ils ont à cette époque le désir de faire en sorte que l'architecture soit considérée comme un art « noble », ce qui à l'époque n'est guère le cas. C'est en partie dans ce but qu'ils importent un vocabulaire issu de cet autre art noble qu'est la musique, science par excellence de l'harmonie des proportions. On sait depuis les pythagoriciens que les intervalles musicaux agréables à l'oreille se font à partir de sons dont les rapports des fréquences sont simples : $2/1$ pour l'octave, $3/2$ pour la quinte, desquels dérivent la gamme « de Pythagore ». À l'époque, donc, l'harmonie des proportions s'exprime systématiquement par des rapports rationnels³. La seule exception attestée concerne la racine carrée de 2, principalement en raison de sa présence dans le carré et pour sa propriété d'être

² Ce raisonnement se généralise à toute base entière b , fournissant ainsi une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ apparemment inédite. Notons tout de même que le cas de la base 10 est particulier ; le raisonnement général est plus long, car les choses se compliquent lorsque la base b possède des carrés parfaits comme diviseurs.

³ Aujourd'hui, les nombres irrationnels ont fait leur apparition, dans notre « gamme bien tempérée », dans laquelle le *demi-ton* (rapport des fréquences de deux notes consécutives) est constant. Cette gamme contient douze notes entre un *do* et le *do* suivant, pour coller au plus près de la gamme de Pythagore ; le ton est donc donné par le rapport $12\sqrt{2}$. L'intervalle de rapport $\sqrt{2}$ est celui entre le *do* et le *fa*♯.

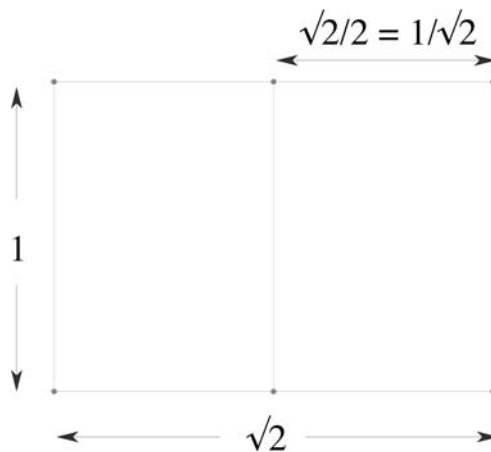
la moyenne géométrique de 1 et de 2 (c'est-à-dire que $\sqrt{2}$ est le nombre x tel que $1/x = x/2$). Ainsi, des architectes aussi éminents qu'Andrea Palladio, Leon Battista Alberti, Francesco Di Giorgio ou encore Sebastiano Serlio évoquent tous ce rapport.

Faisons ici une courte digression pour indiquer que, contrairement à ce qui est encore trop souvent propagé, le nombre d'or ne semble avoir jamais, quant à lui, été l'objet d'une attention quelconque de la part des architectes de cette époque, y compris après la publication du fameux ouvrage de Luca Pacioli, *De Divina proportione*, sans doute le premier ouvrage entièrement dédié à un simple nombre. Pour les architectes de la Renaissance, le nombre d'or avait sans doute contre lui d'être irrationnel, ce qui ne cadrait pas avec la vision de l'époque de l'idée d'harmonie.

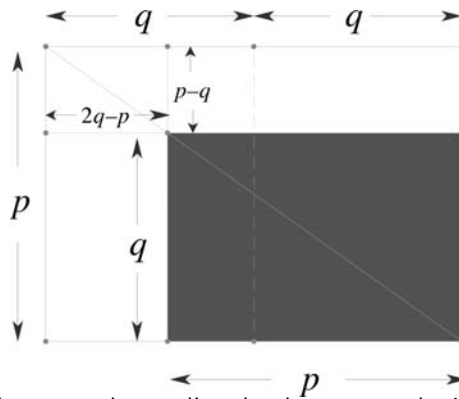
Ce point n'en rend que plus remarquable la présence si fréquente de $\sqrt{2}$ dans les écrits et les réalisations des architectes de la Renaissance. Selon l'historien Rudolf Wittkower (voir [16]), $\sqrt{2}$ est le seul irrationnel à avoir eu droit de cité dans l'architecture de l'époque. Par exemple, Palladio, dans ses *Quatre livres de l'architecture*, indique que pour dimensionner l'atrium du couvent de la charité, à Venise, il a « tâché de faire que cette maison fût semblable à celle des anciens » et que, pour cela, il y a construit « un avant-logis Corinthien, la longueur duquel a la diagonale de son carré » (livre II, chapitre VI). Cette « proportion diagonale », selon la dénomination de Serlio, se retrouve aussi bien dans le dimensionnement des colonnes doriques chez Alberti que dans la forme des lots de terre autour du Capitole dans les prescriptions du président américain Thomas Jefferson, grand amateur d'architecture ([9]).

Les formats de papier

Une utilisation plus proche de nous de la racine carrée de 2 concerne les formats de papier que nous utilisons quotidiennement. La propriété fondamentale d'une feuille de la série A (comme le A4, le plus courant, de 21 cm de large et de 29,7 cm de long) est qu'en la pliant en deux dans le sens de la longueur, on obtient un rectangle homothétique au premier.



C'est un exercice très simple que de montrer que le seul rapport longueur/largeur disposant de cette propriété est $\sqrt{2}$, la « proportion diagonale » de Serlio, que le peintre Paul Sérusier, au début du XX^e siècle, appelait quant à lui la « porte d'harmonie ». En particulier, donc, le rapport $29,7/21$ est une approximation de $\sqrt{2}$.⁴ En passant, cette propriété des « rectangles diagonaux » fournit une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (apparemment inédite dans sa version géométrique ci-dessous) : supposons $\sqrt{2} = p/q$ avec p et q les plus petits possibles et considérons deux rectangles identiques de longueur p et de largeur q , collés l'un à l'autre par l'un de leurs grands côtés. Parce que ces rectangles sont diagonaux, le grand rectangle qu'ils constituent ensemble, et qui a pour dimensions $2q$ et p , est lui aussi diagonal.



Faisons pivoter d'un quart de tour l'un des deux rectangles initiaux pour le placer au coin inférieur droit du grand rectangle, et intéressons-nous au petit rectangle qui apparaît en haut à gauche : puisque le rapport longueur/largeur est le même pour le grand rectangle et le rectangle pivoté, il est aussi le même pour ce petit rectangle (c'est le théorème de Thalès). Or les dimensions de ce petit rectangle sont entières ($2q - p$ et $p - q$) et inférieures à p et q , ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle p et q sont les plus petits possibles.

Historiquement, après une proposition sans lendemain de l'Allemand Georg Christoph Lichtenberg au XVIII^e siècle, c'est sous la révolution française qu'est légalisé pour la première fois cette norme pour les formats de feuilles de papier. La raison en était alors principalement fiscale : il s'agissait de fixer de façon équitable les taxes à appliquer à différents documents tels que les actes judiciaires. En effet, il semble raisonnable de fixer le prix du timbre (sous-entendu : fiscal) d'un acte en fonction de la taille de celui-ci, elle-même se définissant de façon objective par le format du papier sur lequel il est consigné. Les différents formats en vigueur à l'époque n'étant pas dans des rapports d'aires simples, les prix des différents timbres manquaient de cohérence. Avec des rectangles diagonaux, tout devenait plus simple. C'est le 13 brumaire de l'an VII de la République (3 novembre 1798) que le *Bulletin des Lois de la République* promulgue la « loi sur le timbre » qui définit les nouveaux formats, qui correspondent à nos formats A2, A3, B3, B4 et B5 (les formats de la série B sont dérivés de ceux de la série A et constituent eux aussi des rectangles diagonaux). Malheureusement, cette brillante modernisation

⁴ Les dimensions du format A0 sont choisies de sorte que l'aire du rectangle soit de 1 m^2 ; le A1 est un A0 plié en 2, et ainsi de suite.

n'a pas connu le même succès que ces autres innovations majeures qu'ont été le mètre ou le kilogramme, également élaborés sous la révolution française. C'est finalement en Allemagne que l'idée ressurgit, d'abord au XIX^e siècle chez le chimiste Wilhelm Ostwald, puis au début du XX^e sous l'impulsion de l'ingénieur berlinois Walter Porstmann. Les débats débouchent, en 1922, sur la norme dite DIN 476 (*Deutsches Institut für Normung*), devenue depuis la norme ISO 216, utilisée à peu près partout dans le monde, à la notable exception des pays d'Amérique du Nord.

L'avènement des machines à photocopier a conforté l'intérêt du rectangle diagonal comme format de référence, car il permet d'effectuer agrandissements et réductions d'un document initial sans affecter sa forme : les facteurs 141 % et 71 % que proposent aujourd'hui la plupart des photocopieuses ne sont pas autre chose que des approximations de $\sqrt{2}$ et de $1/\sqrt{2}$, destinées au passage du format A_n au format $A_{(n+1)}$ ou $A_{(n-1)}$.

Des décimales sans structure ?

Que ce soit pour l'architecture ou les formats de nos feuilles de papier, la connaissance de quelques décimales de $\sqrt{2}$ est suffisante. La question se pose donc de l'intérêt réel de calculer les décimales d'un tel nombre. Une réponse est donnée par le calcul de précision, dont un exemple historique frappant est celui des tables de logarithmes d'Henry Briggs, élaborées à partir d'extraction de racines carrées (le principe est que si $\log_{10}(x)$ est connu, alors $\log_{10}(\sqrt{x})$ s'en déduit, en divisant simplement $\log_{10}(x)$ par 2). Pour obtenir une bonne estimation de $\log_{10}(2)$, il extrait en 1624 pas moins de 47 fois la racine carrée de 2 (soit le nombre $2^{1/2^{47}}$) avec une précision de 32 chiffres après la virgule !

L'intérêt pour les décimales de $\sqrt{2}$ prend une nouvelle tournure mathématique en 1909, lorsqu'Émile Borel introduit la notion de normalité ([5]) : est « normal » tout nombre dont les décimales (en base 10 ou autre) possèdent les mêmes propriétés statistiques qu'une suite de chiffres tirés indépendamment et selon une loi uniforme. Il démontre que l'ensemble des nombres non-normaux est négligeable, mais ce n'est qu'en 1933 que David Champernowne ([7]) construit le premier exemple explicite de nombre normal.

On ignore toujours si les nombres « courants » comme \sqrt{n} , π ou e sont ou non normaux. À tout seigneur tout honneur : c'est le plus souvent π que l'on évoque comme exemple de nombre pour lequel la question de la normalité se pose de façon pressante. Mais finalement, le cas de la racine carrée de 2 est au moins aussi intrigant. En effet, contrairement à celles du nombre pi, les décimales de la racine carrée de 2 sont extrêmement simples à calculer ; selon Otto Neugebauer et Abraham Sachs, les Babyloniens déjà connaissaient probablement un algorithme d'extraction de racines carrées correspondant peu ou prou à la formule de Héron (I^{er} siècle de notre ère), elle-même cas particulier de la méthode de Newton. Pour $\sqrt{2}$, celle-ci consiste à définir la suite $u_0 = 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction $f(x) = x/2 + 1/x$.

Même si cette formule a été un rien améliorée depuis pour éviter la division par x (on utilise aujourd'hui plutôt la fonction $f(x) = 3x/2 - x^3$, qui fait converger la suite $(u_n)_n$ vers $\sqrt{2}/2$ - voir [14]), il est tout de même remarquable qu'un algorithme aussi ancien survive encore aujourd'hui. Il faut dire qu'il est à la fois très simple à mettre en œuvre et extrêmement rapide : à chaque étape, le nombre de décimales

exactes double. Le record actuel de décimales de $\sqrt{2}$, obtenu par Yasumasa Kanada et Daisuke Takahashi (137 milliards de décimales), a été obtenu avec 28 itérations seulement, en prenant pour u_0 une évaluation de $\sqrt{2}$ précise à quelques décimales. L'efficacité de la méthode est telle qu'on ne peut d'ailleurs que s'étonner de ce que, il y a quelques décennies à peine, les élèves se voyaient encore infliger l'apprentissage d'une méthode d'« extraction de racines carrées » aussi pénible d'emploi que lente à converger.

Deux progrès ont récemment été faits sur la question de la normalité des nombres comme $\sqrt{2}$. En 2004, David Bailey, Jonathan Borwein, Richard Crandall et Carl Pomerance ont montré que la quantité de 0 ainsi que celles de 1 qui figurent dans les k premiers chiffres du développement de $\sqrt{2}$ en base 2 est au moins de l'ordre de \sqrt{k} ([3]). En 2005, Boris Adamczewski, Yann Bugeaud et Florian Luca ont montré que, quelle que soit la base de numération entière b choisie, si l'on note $p(k)$ le nombre de séquences de chiffres différentes de longueur k apparaissant dans le développement de $\sqrt{2}$ en base b , alors le rapport $p(k)/k$ est non borné ([1]). On est donc encore bien loin de la normalité, et la racine carrée de 2 illustre ainsi de façon tout à fait frappante, bien mieux qu'un nombre comme π , le décalage profond entre les aspects quantitatif (la facilité du calcul des décimales) et qualitatif (la description statistique des décimales). En 1950, Borel lui-même disait : « le problème de savoir si les chiffres d'un nombre tel que $\sqrt{2}$ satisfont ou non à toutes les lois que l'on peut énoncer pour des chiffres choisis au hasard me paraît toujours être un des problèmes les plus importants qui se posent aux mathématiciens. » ([6]) Un demi-siècle plus tard, ces mots sont toujours d'actualité.

L'irrationnel extrême

Le fait qu'on ignore la répartition statistique des décimales de $\sqrt{2}$ peut s'exprimer à l'aide de la théorie de la distribution modulo 1. On dit qu'une suite $(u_n)_n$ de nombres est *uniformément répartie modulo 1* si la suite $(v_n)_n$ de ses parties fractionnaires vérifie que, quel que soit l'intervalle $I \subset [0, 1]$, si l'on désigne par $c_N(I)$ le nombre d'entiers $n < N$ tels que $v_n \in I$, alors la suite c_N/N converge vers la mesure de Lebesgue de I . En clair, la suite $(v_n)_n$ visite chaque région de l'intervalle $[0, 1]$ selon une fréquence directement donnée par la taille de cette région. Savoir si $\sqrt{2}$ est ou non un nombre normal en base b revient à savoir si la suite $(b^n \sqrt{2})_n$ est uniformément répartie modulo 1 ou non.

Autant nous sommes peu renseignés sur la répartition modulo 1 de cette suite, autant nous savons en revanche beaucoup sur une autre suite, la « suite de Kronecker » de $\sqrt{2}$, définie par $(n\sqrt{2})_n$. Un résultat classique, démontré vers 1910 indépendamment par divers auteurs (Bohl, Sierpinski, et surtout Weyl, le fondateur de la théorie), affirme que quel que soit l'irrationnel α , la suite $(n\alpha)_n$ est uniformément répartie modulo 1 (voir [11]).

De ce point de vue, donc, tous les irrationnels se valent. Une façon de les distinguer consiste alors à s'interroger sur la vitesse à laquelle les suites se répartissent dans l'intervalle $[0, 1]$. Un outil classique pour quantifier la vitesse de répartition modulo 1 est la *discrépance**, notée D_N^* et définie comme le *supremum* sur tous les intervalles $[0, a]$ des écarts entre la fréquence de passage dans $I = [0, a]$ des N

premiers termes et la mesure de I (qui correspond à la fréquence asymptotique). Autrement dit, pour tout N , on pose :

$$D_N^* := \sup_{a \leq 1} \left(\left| \frac{c_N([0, a])}{N} - a \right| \right).$$

Un résultat de base de la théorie de l'équirépartition modulo 1 indique qu'une suite est uniformément répartie si, et seulement si, la suite D_N^* tend vers zéro. Pour une suite de la forme $(n\alpha)_n$, on sait dire bien davantage : en substance, la vitesse à laquelle la discrédance-* tend vers zéro ne dépend que de la qualité des approximations de α par des rationnels. En gros, l'idée est que plus l'approximation de α par un rationnel p/q est précise, plus les suites $(n\alpha)_n$ et $(np/q)_n$ restent proches l'une de l'autre ; comme la suite $(np/q)_n$ n'est évidemment pas uniformément répartie modulo 1, la discrédance-* de $(n\alpha)_n$ « prend du retard » si les deux suites restent proches trop longtemps.

On s'attendrait donc à ce que l'irrationnel α dont la discrédance-* tend le plus vite vers zéro soit celui qui est le moins bien approché par les rationnels, qui n'est autre que le nombre d'or (dont le développement en fraction continue a les plus petits quotients partiels). Yves Dupain et Vera Sòs, qui ont résolu la question, n'ont pas été les moins surpris de la réponse : « on sait que la discrédance d'une suite [de la forme] $\{n\alpha\}$ dépend des quotients partiels [de α]. Elle est « petite » ou « grande » selon que sont « petits » ou « grands » [ces quotients partiels] (...) On pourrait donc s'attendre à ce qu'elle prenne la plus petite valeur pour [le nombre d'or, dont tous les quotients partiels valent 1]. Il est tout à fait surprenant que tel ne soit pas le cas. » ([8]).

Quel est donc le nombre qui ravit, de ce point de vue, le titre d'« irrationnel extrême » au nombre d'or ? C'est la racine carrée de 2.

Plusieurs spécialistes sont toutefois d'avis que cette conclusion quelque peu étrange n'est que le reflet de ce que la discrédance-* n'est pas le meilleur moyen de quantifier la vitesse de répartition, et que le « vrai » irrationnel extrême est celui qui maximise la vitesse de convergence vers zéro de la *discrédance*, qui ne diffère de la discrédance-* que par la fait que le *supremum* est pris sur tous les intervalles inclus dans $[0, 1]$, et non seulement sur ceux de la forme $[0, a]$. Et l'on s'attend à ce que le nouveau vainqueur soit le nombre d'or. Mais pour l'instant, personne ne s'est donné la peine de le démontrer, laissant ainsi un sursis à la racine carrée de 2.

Un intérêt pratique de trouver des suites dont la discrédance est faible est notamment donné par une inégalité due à Koksma, qui indique que l'écart entre l'intégrale d'une fonction f entre 0 et 1 et la moyenne des valeurs de f prises en des points $x_1 \dots x_N$ est inférieur au produit de la variation totale de f par la discrédance des x_n . Plus cette discrédance est faible, donc, plus l'approximation de l'intégrale par la moyenne $(1/N) \sum_{n \leq N} f(x_n)$ a des chances d'être précise.

Qu'il s'agisse du calcul d'intégrales ou de l'esthétique d'un atrium, dans tous les cas, la présence de la racine carrée de 2 marque que, pour citer Alberti, « la pratique se tire des secrets de mathématique. »

Références

- [1] Boris ADAMCZEWSKI, Yann BUGEAUD & Florian LUCA, "Sur la complexité des nombres algébriques", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Mathématiques*, 339, no1, pp. 11-14, 2004.
- [2] Leon Battista ALBERTI, *L'Architecture et art de bien bastir*, Kerver, 1553.
- [3] David BAILEY, Jonathan BORWEIN, Roichard CRANDALL & Carl POMERANCE, "On the binary expansions of algebraic numbers", *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, vol. 16, no3, pp. 487-518, 2004.
- [4] Richard BEIGEL, "Irrationality without number theory", *The American Mathematical Monthly*, vol. 98, no4, pp. 332-335, 1991.
- [5] Émile BOREL, "Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques", *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, t. 27, pp. 247-270, 1909.
- [6] Émile BOREL, "Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaîne", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. 230, pp. 591-593, 1950.
- [7] David CHAMPERNOWNE, "The construction of decimals normal in the scale of ten", *Journal of the London Mathematical Society*, 8, pp. 254-260, 1933.
- [8] Yves DUPAIN & Vera SÒS, "On the discrepancy of $(n\alpha)$ sequences", *Colloquia mathematica societatis János Bolyai, 34. Topics in classical number theory, Budapest (Hungary), 1981*, vol. 1, pp. 355-387, 1984.
- [9] Rachel FLETCHER, "An American Vision of Harmony : Geometric Proportions in Thomas Jefferson's Rotunda at the University of Virginia", *Nexus Network Journal*, vol. 5, no 2, 2003.
- [10] Boris GOURÉVITCH, "La quête des décimales de π ", *Gazette des Mathématiciens*, no 102, pp. 29-52, 2004.
- [11] Lauwerens KUIPERS & Harald NIEDERREITER, *Uniform distribution of sequences*, Wiley-Interscience, 1974.
- [12] André PALLADIO, *Les Quatre livres de l'architecture*, Edme Martin, 1650.
- [13] Benoît RITTAUD, *Le Fabuleux destin de $\sqrt{2}$* , Le Pommier, 2006.
- [14] Daisuke TAKAHASHI, *Fast multiple-precision arithmetic on distributed memory parallel computers and its applications*, thèse de l'université de Tokyo, 1998.
- [15] Marc VITRUVÉ, *Architecture, ou art de bien bastir*, Jean de Tournes, 1618.
- [16] Rudolf WITTKOWER, *Les Principes de l'architecture à la Renaissance*, Passion, 1996.

for John McAlpine

Block Design for Piano

Tom Johnson

$\text{♩} = 72 - 80$

The musical score is written in 3/4 time with a tempo of 72-80 beats per minute. It begins with a piano (*p*) dynamic. The piece consists of 22 measures, each numbered in a small box above the staff. Measure 11 features a note with a fermata and the word "long" written above it. The score is arranged in a grand staff with a treble clef on the upper staff and a bass clef on the lower staff. The key signature has one sharp (F#).

© 2005 by Tom Johnson