

LIVRES

Approximation by algebraic numbers

YANN BUGEAUD

Cambridge Tracts in Mathematics, **160**, Cambridge University Press, 2004.
290 p. ISBN : 0-521-82329-3. £ 40)

Les nombres réels sont les limites de suites de Cauchy de nombres rationnels. Le corps \mathbb{Q} des nombres rationnels est donc par construction dense dans celui \mathbb{R} des nombres réels. Cette propriété peut être précisée de diverses façons. Un nombre réel étant donné, on peut s'intéresser au nombre minimal d'opérations « élémentaires » permettant d'obtenir une qualité d'approximation donnée; cela conduit à une notion de complexité pour le calcul numérique. La théorie de l'approximation diophantienne repose sur un autre point de vue : on étudie la qualité de l'approximation en fonction de la complexité de l'approximant. Si x est le réel donné et p/q l'approximation rationnelle, on compare $|x - p/q|$ avec $\max\{|p|, |q|\}$. Quand x est fixé il suffit de connaître q : pour avoir une approximation raisonnable on prend pour p l'entier le plus proche de qx (on notera $\|\xi\|$ la distance d'un nombre réel ξ à l'entier le plus proche). Quand il y a un seul paramètre, ici q , cela simplifie bien les choses.

Plusieurs manières d'appréhender une telle situation se présentent. On peut chercher des énoncés valables pour tout nombre réel x , ou au contraire se restreindre à des classes particulières de x (par exemple celle des nombres algébriques irrationnels).

Au début du XX^{ème} siècle Émile Borel posa les premières questions sur le comportement diophantien des nombres réels en dehors d'un ensemble de mesure nulle. Par exemple il étudia la croissance des quotients partiels du développement en fraction continue. Il introduisit aussi la notion de nombre *normal* dans une base (ceux dont la suite des chiffres du développement se comporte comme une suite aléatoire, en un sens qu'il faut bien entendu préciser). Il inaugura ainsi la *théorie métrique* de l'approximation diophantienne, qui a aussitôt été développée notamment par H. Weyl et A.Ya. Khintchine.

Quand une propriété est vraie pour presque tous les nombres réels au sens de la mesure de Lebesgue, on peut encore raffiner l'étude grâce à la mesure de Hausdorff.

Une fois précisée la classe des nombres dont on étudie l'approximation, il y a ici encore plusieurs options concernant les approximants. On peut s'interroger sur l'existence d'une infinité de nombres rationnels approchant les nombres considérés avec une qualité d'approximation contrôlée; on peut demander en plus que la suite des approximations ne soit pas trop lacunaire; on peut aussi restreindre, par exemple par des conditions arithmétiques, les nombres rationnels p/q qui doivent approcher x : on peut demander à q d'être premier, ou bien d'être sans facteurs carrés, ou encore d'appartenir à certaines classes de congruences.

Une option différente consiste à prendre, au contraire, des classes de nombres plus larges que les rationnels pour approcher x , par exemple celle des nombres algébriques. L'approximation de nombres réels (ou complexes) par des nombres algébriques est à elle seule l'objet de multiples variantes. On filtre l'ensemble des nombres algébriques par le degré et la « hauteur », la façon dont ces deux paramètres tendent vers l'infini crée de multiples situations. La nécessité d'utiliser deux paramètres complique la question : pour l'approximation rationnelle il n'y en a qu'un, la hauteur.

Parmi les notions de hauteur couramment utilisées, la plus élémentaire est celle qualifiée de « naïve » : pour un nombre algébrique c'est le maximum des valeurs absolues des coefficients du polynôme minimal (ces coefficients sont entiers). Cette hauteur naïve n'est pas la meilleure : on lui préfère de nos jours la *mesure de Mahler* qui possède l'avantage de pouvoir être définie de manière équivalente soit en termes des coefficients du polynôme minimal, soit par la moyenne du logarithme du module de ce polynôme minimal sur le cercle unité (la formule de Jensen permet de faire le lien), soit en faisant intervenir les différentes places du corps de nombres (c'est la *hauteur de Weil*). Quelle que soit la notion de hauteur utilisée, l'essentiel est que les nombres algébriques dont on borne le degré et la hauteur forment un ensemble fini.

L'approximation simultanée de nombres réels est un vaste sujet. Un outil remarquable provenant de la géométrie des nombres, le « principe de transfert », permet par exemple de relier l'étude de la qualité des approximations simultanées des nombres réels $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ par des nombres rationnels de même dénominateur, à savoir l'étude de la suite

$$\max_{1 \leq j \leq n} \|q\alpha_j\|, \quad (q \geq 1)$$

à celle des combinaisons linéaires données par la suite

$$\max\{\|q_1\alpha_1 + \dots + q_n\alpha_n\|; 0 < \max_{1 \leq j \leq n} |q_j| \leq q\}, \quad (q \geq 1).$$

On peut découper le thème de l'approximation simultanée en deux parties, comme le fait V.G. Sprindžuk avec les titres de ses deux chapitres de [13], intitulés respectivement « Approximation of independent quantities » et « Approximation of dependent quantities ». Dans le premier chapitre l'auteur étudie l'approximation rationnelle de points de \mathbb{R}^n en dehors d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, dans le second il se place dans une sous-variété ; un exemple simple est celui d'une courbe (x, x^2, \dots, x^n) , ce qui revient à étudier l'approximation polynomiale d'un nombre réel. Certaines variétés, appelées « extrémales », possèdent la propriété que, pour presque tous les points (au sens de la mesure de Lebesgue), le théorème de Dirichlet sur l'approximation diophantienne ne peut pas être amélioré (c'est le cas de la droite réelle). V.G. Sprindžuk, qui a étudié cette question dans les années 1960 (en même temps que W.M. Schmidt), conjectura que certaines variétés satisfaisant à des hypothèses arithmétiques et géométriques de non dégénérescence sont extrémales. D'importants progrès ont été accomplis depuis les travaux de S.G. Dani dans les années 1980 sur les orbites des flots géodésiques sur des espaces

homogènes, suivis par les contributions de G.A. Margulis (résolution d'une conjecture d'Oppenheim), puis de D. Kleinbock (résolution de conjectures de Sprindžuk et Baker dans un travail commun de Kleinbock et Margulis) notamment.

Pour compléter ce panorama on peut encore citer la théorie de l'équirépartition ou de l'équidistribution modulo 1 (voir [6] pour les débuts de la théorie), et aussi la théorie ergodique, dont les liens avec l'approximation diophantienne sont étroits. En liaison avec les travaux de Dani et Margulis on peut enfin mentionner ceux de S. Hersonsky et F. Paulin sur les géodésiques diophantiennes sur des variétés à courbure négative [5].

Toutes les questions qui viennent d'être suggérées, et bien d'autres, font l'objet d'études approfondies qui utilisent souvent des méthodes très élaborées.

Une des origines de la théorie de l'approximation diophantienne remonte aux très anciens calculs approchés du nombre π . Connaître une valeur approchée de ce nombre est indispensable pour de nombreuses applications concrètes, calculer plusieurs milliards de décimales répond à des objectifs de nature différente : l'analyse diophantienne a été élaborée au cours des siècles pour répondre à une curiosité naturelle, le plus souvent sans autre motivation que l'impérieux besoin de savoir. Cependant il se trouve que cette théorie connaît des applications fort diverses. Les problèmes que posent les engrenages sont certainement une autre source des plus anciens travaux sur les approximations diophantiennes. Les approximations rationnelles du nombre $\log_2 3$ interviennent naturellement dans les gammes classiques ; celles du nombre exact de tours que fait la terre sur elle-même quand elle accomplit une révolution complète autour du soleil jouent un rôle essentiel dans l'établissement d'un calendrier. Un autre exemple vient des systèmes dynamiques : les phénomènes de résonance dépendent de la rationalité de certains paramètres ; quand ces mêmes paramètres sont irrationnels mais sont très proches de nombres rationnels de dénominateurs pas trop grands, on observe des comportements physiques proches de la résonance. En astronomie l'étude de la stabilité du système solaire, les questions relatives aux périodes des orbites de Saturne (divisions de Cassini), le problème des N corps font intervenir l'approximation diophantienne. Le rôle des petits dénominateurs dans la théorie des systèmes dynamiques a été mis en évidence par H. Poincaré. Il est intéressant de noter que C.L. Siegel a contribué à l'établissement de résultats profonds à la fois en approximation diophantienne et en mécanique céleste. Des sujets aussi éloignés que les quasi-cristaux ou l'acoustique des salles de concert utilisent encore cette théorie. Pour toutes ces questions on pourra consulter [11], ainsi que le chapitre 7 de [2].

Le nom donné à cette partie de l'arithmétique vient du mathématicien grec Diophante d'Alexandrie, qui, il y a un peu moins de 20 siècles, considérait des problèmes de géométrie dont il donnait une solution. En termes modernes il ramenait ces questions à des équations polynomiales entre plusieurs inconnues et exhibait un point rationnel sur la variété associée. On appelle maintenant « équation diophantienne » une équation polynomiale reliant ces inconnues. Résoudre l'équation de Thue $F(x, y) = k$, où F est un polynôme homogène de degré au moins 3, disons irréductible, et k un entier non nul fixé, revient à étudier les approximations rationnelles des racines du polynôme $F(X, 1)$. Cette notion a été étendue progressivement ; une « équation diophantienne exponentielle » est une équation polynomiale dans laquelle certains exposants sont inconnus. Le théorème de Wiles qui répond

au problème de Fermat peut être énoncé comme un résultat sur l'équation diophantienne exponentielle $X^n + Y^n = Z^n$, où les inconnues sont les entiers X, Y, Z et n , avec $n \geq 3$. D'autres équations diophantiennes exponentielles célèbres sont celle de Catalan $X^p - Y^q = 1$, celle de Pillai $X^p - Y^q = k$ et celle de Beal $X^p + Y^q = Z^r$.

La géométrie diophantienne a pour objet, au moins au départ, d'étudier les équations diophantiennes en y adaptant les outils de la géométrie algébrique. L'étude arithmétique des hauteurs y joue un rôle clef. Cette notion de hauteur a été étendue des nombres aux sous-espaces [9], puis aux sous-variétés.

Déterminer si un nombre réel donné x est rationnel ou non est bien entendu un problème diophantien — il s'agit aussi de dire si l'équation $ax = b$ a une solution rationnelle (a, b) autre que $(0, 0)$. Plus généralement, déterminer si un nombre complexe est algébrique ou transcendant est encore un problème diophantien. Les outils permettant de résoudre de telles questions sont principalement ceux qui sont utilisés en approximation diophantienne.

Plusieurs ouvrages ont précédé celui de Yann Bugeaud, à commencer par H. Minkowski (1907), puis J.F. Koksma (1936), J.W.S. Cassels (1957), Th. Schneider (1957), I. Niven (1963), S. Lang (1966), V.G. Sprindžuk (1969), W.M. Schmidt (1972), A. Baker (1975), V.G. Sprindžuk (1979), W.M. Schmidt (1980 et 1991), G. Harman (1998), V. Bernik et M. Dodson (1999) notamment.

Avant de parler de [3], disons quelques mots sur les deux plus récents.

Comme son titre l'indique, le livre de G. Harman [4] concerne exclusivement la théorie métrique, c'est-à-dire l'étude des propriétés arithmétiques des nombres réels ou des éléments de \mathbb{R}^n d'un point de vue global en théorie de la mesure. Comme exemple d'énoncé voici le théorème de Sprindžuk qui répond à une conjecture de Mahler : [12]

pour presque tout nombre réel x , pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout entier n positif, il existe un nombre $H_0 = H_0(x, \varepsilon, n)$ tel que, pour tout $H \geq H_0$ et pour tout polynôme non nul de degré $\leq n$ et de hauteur naïve $\leq H$, on ait

$$|P(x)| \geq H^{-n(1+\varepsilon)}.$$

Si on remplace *réel* par *complexe*, le même énoncé est valable avec l'exposant $(n-1)/2 + \varepsilon$ au lieu de $n(1+\varepsilon)$.

Le livre [4] traite des nombres normaux, de la conjecture de Duffin-Schaeffer, de l'équirépartition modulo 1, des propriétés arithmétiques des suites, de la dimension de Hausdorff des ensembles exceptionnels.

Le sujet central du livre de V. Bernik et M. Dodson [2] est l'approximation diophantienne sur des variétés lisses plongées dans l'espace euclidien. Ils développent les méthodes de V.G. Sprindžuk ; ils mentionnent l'approche plus récente dont nous avons parlé qui trouve son origine dans les travaux de S.G. Dani dans les années 1980 mais sans utiliser cette méthode. L'essentiel du livre est consacré aux questions concernant la mesure de Hausdorff de sous-ensembles formés de points ayant un comportement donné pour l'approximation diophantienne.

Il est temps d'en venir à la dernière parution sur ce sujet, à savoir le livre de Y. Bugeaud [3] paru en 2004. Le thème central est celui de l'approximation de nombres réels par des nombres rationnels. Son objectif est donc plus vaste que celui des deux autres ouvrages récents dont nous venons de parler. L'essentiel du livre

est consacré aux nombres réels, à la fin sont mentionnés des résultats concernant d'autres corps, celui des nombres complexes, les corps p -adiques, ceux de séries formelles.

Le premier chapitre traite de l'approximation des nombres réels par des nombres rationnels, avec les théorèmes de Dirichlet, Liouville, Khintchine, la conjecture de Duffin-Schaeffer. La remarque suivante aurait mérité de figurer dans le livre : *aucun nombre réel ne se comporte, du point de vue de l'approximation rationnelle, comme presque tous les nombres réels*. Plus précisément, si \mathcal{F} est l'ensemble des fonctions croissantes f définies sur les entiers positifs à valeurs réelles positives possédant la propriété que pour presque tout x réel, l'inégalité

$$|x - p/q| < 1/f(q)$$

n'a qu'un nombre fini de solutions, alors pour tout x réel il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que l'inégalité

$$|x - p/q| < 1/f(q)$$

ait un nombre infini de solutions. Cela semble (à première vue seulement) un peu paradoxal, mais cela impose d'être prudent si on veut conjecturer, par exemple, que les nombres algébriques se comportent comme presque tous les nombres réels de ce point de vue.

Le second chapitre concerne l'approximation de nombres algébriques avec le théorème de Thue-Siegel-Roth pour l'approximation par des nombres rationnels ; la question de l'effectivité des énoncés est au centre de la discussion, les résultats que l'on obtient par les méthodes de Baker-Feldman et Bombieri sont énoncés. Une démonstration, due à E. Bombieri et J. Mueller, d'un théorème de Wirsing sur l'approximation d'un nombre algébrique par des nombres algébriques de degré plus petit y est reproduite. Un énoncé de H. Davenport et W.M. Schmidt sur l'approximation d'un nombre algébrique par des nombres algébriques de degré plus grand est raffiné grâce au critère d'Eisenstein, puis complété par un résultat nouveau montrant que ce théorème est optimal. On trouve aussi au chapitre 2 des applications à l'irrationalité et à la transcendance. Un traitement détaillé du théorème du sous-espace de Schmidt, formidable généralisation du théorème de Thue-Siegel-Roth dont les applications sont de plus en plus nombreuses ces temps-ci, aurait nécessité plus de place, mais il fait déjà l'objet de monographies [7], [8], [9].

Les chapitres qui suivent portent sur les classifications des nombres transcendants. Les deux premières, dues à K. Mahler et J.F. Koksma, ont fait l'objet de nombreux travaux. Le livre de Th. Schneider [10] (qui a été traduit de l'allemand en français par Pierre Eymard) reste une excellente référence sur ce sujet, même si de nombreux progrès ont été accomplis depuis, dont plusieurs sont dus à l'auteur. Le chapitre 3 présente des résultats profonds de H. Davenport et W.M. Schmidt en 1969 sur l'approximation des puissances d'un nombre réel par des entiers algébriques de degré borné, travaux qui ont fait l'objet d'études récentes par D. Roy notamment. L'auteur propose au chapitre 3 une extension, qu'il appelle « main problem », d'une conjecture bien connue due à E. Wirsing relative à l'approximation algébrique des nombres réels.

La conjecture de K. Mahler sur les S -nombres, qui a été résolue par V.G. Sprindžuk comme nous l'avons vu, fait l'objet du chapitre 4, avec le raffinement dû à A. Baker (on pourra aussi consulter le chapitre 9 de [1] pour

connaître l'état de ce sujet il y a 30 ans) et les travaux plus récents de V. Bernik. L'approche de Margulis et Kleinbock est citée mais n'est pas développée.

Le chapitre 5 traite de la dimension de Hausdorff des ensembles exceptionnels, avec les travaux de V. Jarník et A.S. Besicovitch complétés par le théorème de A. Baker et W.M. Schmidt. L'auteur traite la situation relative aussi bien à la classification de Mahler qu'à celle de Koksma.

Le sixième chapitre approfondit les énoncés du cinquième. Un des ingrédients principaux est un résultat de V. Beresnevich (1999) disant que les nombres algébriques de degré borné sont aussi bien répartis qu'il est possible de l'espérer. L'auteur prévient que peu de démonstrations complètes des résultats de ce chapitre sont données car elles sont extrêmement techniques. Des travaux de V. Bernik, M. Dodson, H. Dickinson, S.L. Velani et bien d'autres (y compris l'auteur) sont cités.

Les classes T et U de la classification de Mahler font l'objet du chapitre 7, où est fait le point sur les résultats connus en direction du principal problème ouvert du chapitre 3. Rappelons que l'existence de nombres de la classe T dans la classification de Mahler n'a été établie (par W.M. Schmidt) qu'en 1968.

Le chapitre 8 parle d'autres classifications de Sprindžuk et Mahler, de mesures de transcendance et de mesures d'approximation algébrique. On y trouve aussi, entre autres, une référence à la classification de P. Philippon qui introduit une distance locale utilisant de l'analyse non-standard.

Comme nous l'avons dit le chapitre 9 traite d'autres corps avec des valuations archimédiennes ou ultramétriques.

Le dernier chapitre rassemble des conjectures et des questions ouvertes. Certaines sont des conjectures bien connues — à commencer par celle de Littlewood (elle est tellement importante qu'elle est énoncée deux fois dans ce chapitre 10!) : *pour tout couple (x, y) de nombres réels et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier q tel que*

$$q \cdot \|qx\| \cdot \|qy\| \leq \varepsilon.$$

L'auteur en a collecté un certain nombre dans la littérature, posées par des spécialistes comme K. Mahler, W.M. Schmidt, P. Erdős, . . . Il en formule d'autres qui sont nouvelles et dont la résolution constituerait un progrès pour la théorie.

Ce livre contient donc les bases de la théorie qui se trouvent déjà dans plusieurs des autres ouvrages antérieurs, mais en plus il y a beaucoup d'autres informations, soit des références à des résultats très récents, soit des résultats originaux de l'auteur lui-même. Contrairement à ce que laisse penser la jaquette de la couverture, il ne faut pas compter y trouver toutes les démonstrations complètes : celles-ci nécessiteraient beaucoup plus de place. On l'a vu d'ailleurs avec [12] et [7], si on veut donner les détails de la démonstration d'un seul théorème il faut souvent un volume entier. Bugeaud a choisi de décrire les principaux résultats de la théorie de la façon la plus claire possible, en mettant quantité de notes et d'exercices permettant d'aller plus loin. Une grande place est consacrée aux questions relatives aux classifications de nombres transcendants, principalement celles de Mahler et de Koksma. Ce livre contient un grand nombre de références (617) particulièrement à des articles récents.

Les notes, les compléments de fins de chapitres et les exercices apportent énormément d'informations sur les développements les plus récents de la théorie,

contribuant à rendre ce livre indispensable pour les spécialistes, extrêmement utile pour tout mathématicien ayant besoin de résultats d'approximation diophantienne, et précieux pour tous ceux qui souhaitent découvrir le sujet, éventuellement pour y apporter de nouvelles contributions originales. L'accent mis sur les problèmes ouverts et les conjectures donne une perspective qui ne se limite pas aux résultats connus mais au contraire anticipe sur ce que devrait être le paysage futur. Les défis à relever ne manquent pas dans ce domaine. L'importance des contributions récentes montre qu'il s'agit d'un sujet en pleine vitalité.

Références

- [1] A. BAKER – *Transcendental number theory*, Cambridge University Press, London, 1975.
- [2] V. I. BERNIK & M. M. DODSON – *Metric Diophantine approximation on manifolds*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 137, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [3] Y. BUGEAUD – *Approximation by algebraic numbers.*, Cambridge Tracts in Mathematics 160. Cambridge : Cambridge University Press. xv + 274 p., 2004 (English).
- [4] G. HARMAN – *Metric number theory*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 18, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998.
- [5] S. HERSONSKY & F. PAULIN – « Hausdorff dimension of Diophantine geodesics in negatively curved manifolds », *J. Reine Angew. Math.* **539** (2001), p. 29–43.
- [6] J. F. KOKSMA – *Diophantische Approximationen*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [7] W. M. SCHMIDT – *Approximation to algebraic numbers*, Secrétariat de l'Enseignement Mathématique, Université de Genève, Geneva, 1972, Série des Conférences de l'Union Mathématique Internationale, n° 2, Monographie n° 19 de l'Enseignement Mathématique.
- [8] ———, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 785, Springer, Berlin, 1980.
- [9] ———, *Diophantine approximations and Diophantine equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1467, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [10] T. SCHNEIDER – *Introduction aux nombres transcendants*, Traduit de l'allemand par P. Eymard, Gauthier-Villars, Paris, 1959.
- [11] M. R. SCHROEDER – *Number theory in science and communication*, Springer Series in Information Sciences, vol. 7, Springer-Verlag, Berlin, 1999, With applications in cryptography, physics, digital information, computing, and self-similarity, Corrected reprint of the third (1997) edition.
- [12] V. G. SPRINDŽUK – *Mahler's problem in metric number theory*, Translated from the Russian by B. Volkmann. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 25, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.
- [13] V. G. SPRINDŽUK – *Metric theory of Diophantine approximations*, V. H. Winston & Sons, Washington, D.C., 1979, Translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman, With a foreword by Donald J. Newman, Scripta Series in Mathematics.

Michel Waldschmidt,
Laboratoire de théorie des nombres
Université P. et M. Curie (Paris VI)

The Mandelbrot Set, Theme and Variations

RECUEIL ÉDITÉ PAR TAN LEI

Lecture Notes Series, 274, Cambridge University Press, London Mathematical

Society, 2000. xx+385 p.

ISBN : 0-521-77476-4. 39 € paperback

Ce recueil regroupe 16 articles de divers auteurs, accompagnés d'une préface et d'une introduction, autour de l'ensemble de Mandelbrot mais pas seulement. Quatre articles sont en français, le reste est en anglais. Plusieurs n'ont jamais été publiés. Le livre intéressera aussi bien le chercheur que l'étudiant connaissant les bases de la dynamique holomorphe en une variable complexe.

L'ensemble de Mandelbrot M est une célèbre icône de ce domaine. Pour le définir brièvement, on introduit la famille de polynômes $f_c(z) = z^2 + c$, où $z, c \in \mathbb{C}$. Soit $A_c(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid f_c^n(z) \rightarrow \infty\}$ le bassin d'attraction de l'infini, où f_c^n désigne $f_c \circ \dots \circ f_c$. Soit $K_c = \mathbb{C} \setminus A_c$. On pose alors

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid K_c \text{ est connexe}\}.$$

Le critère $c \in M \iff 0 \in K_c$ donne une caractérisation de M particulièrement simple et adaptée aux dessins par ordinateur. L'étude de M a beaucoup avancé depuis son introduction, mais remarquons qu'une des principales conjectures, bien que formulée assez tôt, est toujours ouverte plus de 20 ans après.

Conjecture MLC : M est localement connexe.

Avant de décrire le contenu des articles, rappelons qu'un point périodique z d'une application holomorphe est dit *parabolique* quand son multiplicateur est une racine de l'unité ($\iff \exists k > 0$ tel que $f^k(z) = z$ et $(f^k)'(z) = 1$).

L'introduction par Tan Lei donne un très bon résumé du contenu du livre. Les articles y sont regroupés en quatre parties que nous énumérons plus loin. Suit une intéressante liste de techniques utilisées en dynamique complexe, et pour chacune la liste des articles qui la mettent en œuvre.

La préface par J.H. Hubbard raconte comment il a vécu et participé à la renaissance du domaine à la fin des années 1970, le rôle qu'ont joué les ordinateurs, certains mathématiciens, des outils et résultats clés, et quelques cafés parisiens. C'est un plaisir de lire ce compte rendu vivant, de partager l'enthousiasme de son auteur, et constater encore une fois le caractère expérimental de la recherche en mathématiques pures.

Partie I. L'universalité de l'ensemble de Mandelbrot

Dans *The Mandelbrot set is universal* (18 p.), McMullen démontre l'existence de copies arbitrairement petites et arbitrairement peu distordues de M , denses dans le lieu de bifurcation B de n'importe quelle famille analytique de fractions rationnelles, en trouvant une cascade de copies de M aux points de Miziurewicz. Il en déduit que la dimension de Hausdorff de B est maximale.

L'article *Baby Mandelbrot sets are born in Cauliflowers* (18 p.) de Douady, Buff, Devaney et Sentenac, s'intéresse à une autre suite de copies de M , que l'on découvre en observant des agrandissements aux points de rebroussement des copies primitives de M dans M . Elles apparaissent au centre de copies d'ensembles que les auteurs appellent choux-fleurs implorés, qui valent son titre à l'article. Le phénomène est illustré, expliqué et démontré.

Modulation dans l'ensemble de Mandelbrot (30 p.) de Haïssinsky démontre le théorème de modulation de Douady et Hubbard : il y a une copie de M associée à chaque composante hyperbolique de M . La modulation dans le plan des paramètres correspond à une modulation dans le plan dynamique, expliquée dans la deuxième partie. Des conséquences combinatoires en sont tirées.

Partie II. Ensembles de Julia quadratiques¹ et l'ensemble de Mandelbrot

Les articles de cette partie sont regroupés par thème :

– Sur la connexité locale de M

Local connectivity of Julia sets : expository lectures (50 p.) de Milnor démontre 3 résultats de Branner, Douady, Hubbard et Yoccoz. La méthode des puzzles et sa présentation par des tableaux est introduite et appliquée à la preuve de la locale connexité des ensembles de Julia quadratiques non renormalisables. La même méthode est utilisée pour l'étude des polynômes dont les points critiques s'échappent tous, sauf un : soit ils sont renormalisables, soit leur ensemble de Julia est un cantor de mesure nulle. Enfin, la modulation est utilisée pour construire des ensembles de Julia quadratiques infiniment renormalisables et non localement connexes.

Holomorphic motions and Puzzles (following M. Shishikura) (16 p.) de Roesch illustre les techniques de passage du plan dynamique au plan des paramètres en déduisant de l'article précédent la locale connexité de M aux paramètres non renormalisables sans point fixe indifférent.

Local properties of the Mandelbrot set at parabolic points (28 p.) de Tan Lei étudie la locale connexité de M aux racines c_0 des copies primitives. L'implosion parabolique² est reformulée en un lemme de transfert du plan dynamique au plan des paramètres au voisinage de c_0 . Des résultats analogues pour les copies non primitives, pour les points de Miziurewicz, et enfin des corollaires, sont rapidement donnés en appendice.

Convergence of rational rays in parameter spaces (12 p.) de Petersen et Ryd démontre le théorème de Douady et Hubbard d'aboutissement des rayons externes rationnels de l'ensemble de Mandelbrot, par une méthode qui évite d'utiliser toute la machinerie de l'implosion parabolique.

– Dynamique réelle

Dans *Bounded recurrence of critical points and Jakobson's Theorem* (38 p.), Luzzatto redémontre le théorème de Jakobson, donnant l'existence de nombreuses valeurs de $a \in [2 - \varepsilon, 2]$ telles que le polynôme $P_a(x) = x^2 - a : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ a

¹ l'ensemble de Julia d'un polynôme est l'ensemble $J = \partial K$, où K est le complémentaire du bassin de l'infini

² voir le dernier article du recueil

une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Il est obtenu comme conséquence d'une condition de récurrence du point critique (demandant que $\prod_{k=1}^n |P_a^k(0) - 0|$ décroisse au plus exponentiellement).

The Herman-Świątek Theorems with applications (16 p.) de Petersen part des inégalités de distorsion du birapport de Świątek et en déduit un théorème d'Herman de conjugaison quasi-symétrique de certains homéomorphismes du cercle. Il rappelle ensuite comment la chirurgie holomorphe de Ghys et al. en déduit, pour tout θ de type constant, que le polynôme $z \mapsto e^{i2\pi\theta}z + z^2$ a un disque de Siegel³ dont le bord est une courbe de Jordan contenant le point critique et dont l'ensemble de Julia est localement connexe. Enfin, sur une idée d'Herman, il démontre par perturbations l'existence de nombres θ de type *non* constant tels que ces résultats persistent.

– Perturbation de points fixes indifférents

L'article *Perturbation d'une fonction linéarisable* (26 p.) de Jellouli considère une famille \mathbb{R} -analytique de fonctions holomorphes $f_\theta(z) = e^{i2\pi\theta}z + \mathcal{O}(z^2)$, ayant pour $\theta = \alpha$ un point fixe linéarisable en 0. L'article donne des outils pour étudier ce qui se passe dans son disque de Siegel, quand on perturbe α par ses réduites p_n/q_n : premièrement un résultat de stabilité des $o(q_n q_{n+1})$ premières itérées de f_n , et deuxièmement, si θ est diophantien, un théorème de linéarisation de f_θ à $\mathcal{O}(|\theta - \alpha|^k)$ près.⁴ Il énonce la conjecture suivante : pour $P_\theta(z) = e^{i2\pi\theta}z + z^2$, l'aire des points du disque de Siegel de P_α qui ne sont pas dans le bassin parabolique de P_{p_n/q_n} tend vers 0. Enfin, il démontre que cette conjecture implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{mes}(K(P_{\theta_n}) \cap \overset{\circ}{K}(P_\theta)) = \text{mes}(\overset{\circ}{K}(P_\theta)),$$

où $K(\theta)$ est le complémentaire du bassin de l'infini pour P_θ .⁵

Dans *Indice holomorphe et multiplicateur* (12 p.), Jellouli utilise la formule de l'indice holomorphe pour le multiplicateur $m(\lambda)$ du cycle proche de 0 de période q que l'on obtient quand on perturbe le paramètre λ_0 du polynôme $P_{\lambda_0} = \lambda_0 z + z^2$ avec $\lambda_0 = e^{2i\pi p/q}$. Les première et deuxième dérivées de m sont calculées, en fonction de l'invariant formel A de P_{λ_0} . Des considérations dynamiques permettent alors d'encadrer la partie réelle de A . Une application au multiplicateur au bout des cylindres d'Écalle perturbés est également donnée.

Partie III. Ensemble de Julia des applications rationnelles

An alternative proof of Mañé's theorem on non-expanding Julia sets (16 p.) de Shishikura et Tan Lei. En utilisant les propriétés de la métrique de Poincaré des ouverts de \mathbb{C} , on contrôle les branches inverses d'une application rationnelle F quelconque, près des points de l'ensemble de Julia⁶ de F qui ne sont ni paraboliques, ni dans l'ensemble d'accumulation des orbites des points critiques récurrents. Cela permet de montrer des propriétés d'expansion de F . Comme application, l'orbite

³ domaine maximal de linéarisation

⁴ avec une conjugaison dépendant de θ

⁵ Cette conjecture a été démontrée depuis. C'est l'une des étapes du plan de Douady pour construire un θ tel que $K(\theta)$ soit d'intérieur vide et de mesure de Lebesgue > 0 .

⁶ défini comme l'ensemble des points qui n'ont pas de voisinage où les itérées de F forment une famille normale ; dans le cas des polynômes, on peut prouver que cette définition équivaut à la précédente

d'un point de Cremer ou le bord d'un disque de Siegel ou d'un anneau de Herman sont toujours contenus dans l'ensemble d'accumulation d'un point critique récurrent.

Geometry and dimension of Julia sets (8 p.) de Yin Y.-C. illustre une application du théorème précédent : l'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle dont tous les points critiques sont non récurrents est soit égal à toute la sphère de Riemann, soit poreux⁷. Dans la preuve, les points paraboliques requièrent une attention particulière.

On a theorem of M. Rees for the matings of polynomials (18 p.) de Shishikura. L'accouplement des polynômes construit une fraction rationnelle R à partir de deux polynômes P_1, P_2 de même degré et post-critiquement finis⁸ ; $J(R)$ est homéomorphe à l'union disjointe de $K(P_1)$ et $K(P_2)$ où l'on identifie les points de leurs bords en fonction de leur argument externe. L'accouplement n'est pas possible pour toutes les paires de polynômes. Les méthodes de Thurston sont utilisées dans cet article pour donner un critère suffisant (étendant le travail de M. Rees).

Partie IV. Résultats fondateurs

Le théorème d'intégrabilité des structures presque complexes (18 p.) de Douady (d'après des notes de Buff) démontre le théorème de Morrey-Bojarski-Ahlfors-Bers d'intégration des formes de Beltrami (avec paramètre). La preuve se fait dans les espaces L^2 uniquement⁹, avec l'aide de la transformation de Fourier.

Bifurcation of parabolic fixed points (40 p.) de Shishikura décrit la théorie de l'implosion parabolique à un pétale, c'est-à-dire ce qui persiste des pétales, des coordonnées de Fatou et des applications de cornes quand on perturbe une application holomorphe $f(z) = z + az^2 + \mathcal{O}(z^3)$ avec $a \neq 0$.

Arnaud Chéritat,
Laboratoire Émile Picard,
Université de Toulouse

⁷ et donc sa dimension de Hausdorff est < 2 , résultat prouvé auparavant par Urbanski

⁸ de tels polynômes ont un ensemble de Julia connexe et localement connexe, et donc tous les rayons externes aboutissent

⁹ d'autres preuves font intervenir les espaces L^p