

- [26] G. Strang, *The dimension of piecewise polynomial spaces, and one-sided approximation*, in *Conference on the Numerical Solution of Differential Equations (Univ. Dundee, Dundee, 1987)*, Lectures Notes in Math. **363**, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1974, 144–152.
- [27] J. J. Sylvester, *On a Theory of Syzygetic Relations of Two Rational Integral Functions, Comprising an Application of the Theory of Sturm's Functions, and that of the Greatest Algebraic Common Measure*, Philos. Trans. Roy. Soc. London **143** (1853), 407-548.
- [28] D. Wang, *Elimination Theory*, Springer-Verlag, Wien New York, 2001.
- [29] F. Winkler, *Polynomial Algorithms in Computer Algebra*, Springer-Verlag, Wien New York, 1996.

---

## De l'espace des triangles au problème des trois corps

Alain Chenciner

---

« Le texte qui suit n'était pas destiné à la Gazette. À la correction près de quelques coquilles, c'est celui qui accompagnait une conférence donnée le 19 mai 2004 à Tours pour la Journée mathématique de l'Académie d'Orléans-Tours. Merci aux organisateurs de la journée, et en particulier à Pierre Damphousse, d'avoir autorisé cette publication. »

Contrairement à un segment, un triangle a une « forme », indépendante de sa taille et de sa position : il peut être isocèle, rectangle, général... Au cours d'un mouvement de trois points matériels soumis à l'attraction newtonienne, la forme du triangle qu'ils définissent varie et c'est précisément dans cette variation que réside la grande difficulté du « problème des trois corps », parangon des systèmes « noncomplètement intégrables » de la mécanique classique. Notamment, les seules solutions « explicites » — celles décrites par Euler et Lagrange au 18<sup>e</sup> siècle — sont les « mouvements homographiques » au cours desquels la forme ne change pas, chaque corps décrivant une orbite képlérienne de foyer le centre de gravité du système. De même, les classiques « inégalités de Sundman » sont obtenues en négligeant la contribution à l'énergie cinétique des variations de la forme. C'est dans une courte note de 1896 qu'Henri Poincaré se propose de chercher des solutions périodiques du problème des trois corps dans le plan qui soient « les plus simples » satisfaisant certaines contraintes sur l'évolution de la forme du triangle, la complexité d'une solution étant mesurée par son « action lagrangienne ». Il ne peut cependant réaliser son programme qu'au prix du remplacement du potentiel newtonien en  $1/r$  par un potentiel de « force forte » en  $1/r^2$ . Des travaux récents ont montré que la difficulté rencontrée par Poincaré — la possibilité de « collisions » entre les corps — disparaît si l'on s'intéresse à des solutions ayant certaines symétries spatio-temporelles. Il en est résulté la découverte d'une floraison de nouvelles solutions « simples », en particulier les « chorégraphies », telles le « huit », dans lesquelles les corps se poursuivent sur une même courbe fermée à intervalles

de temps égaux. L'exposé montrera comment la compréhension de ces nouvelles solutions est liée à celle de la géométrie de l'« espace des triangles ».

Une autre présentation générale se trouve dans l'article

R. MONTGOMERY *A New Solution to the Three-Body Problem*, Notices of the A.M.S. **48**, n°5, may 2001 ; voir également les animations de <http://www.ams.org/new-in-math/cover/orbits1.html>

Pour des présentations plus techniques et des références, voir :

A. CHENCINER *Action minimizing periodic orbits in the Newtonian  $n$ -body problem*, in "Celestial Mechanics, Dedicated to Don Saari for his 60th Birthday", A. Chenciner, R. Cushman, C. Robinson, Z.J. Xia editors, Contemporary Mathematics **292**, AMS, p. 71–90, (2002)

A. CHENCINER *Action minimizing solutions of the  $n$ -body problem : from homology to symmetry*, Proceedings du Congrès international des mathématiciens (ICM), Pékin, août 2002, vol. III, p. 279-294.

A. CHENCINER *Symmetries and "simple" solutions of the  $n$ -body problem*, Proceedings du Congrès international de physique mathématique (ICMP), Lisbonne 2003, à paraître chez World Scientific.

A. CHENCINER *La forme de  $n$  corps*, à paraître dans « Mélanges Gilles Chatelet », collection « Pensée des sciences », éditions Rue d'Ulm

On trouvera les preprints de ces articles dans [http://www.imcce.fr/Equipes/ASD/person/chenciner/chen\\_preprint.html](http://www.imcce.fr/Equipes/ASD/person/chenciner/chen_preprint.html)

## Prologue

### Héron d'Alexandrie

On trouve dans les *Metrica* ( $\sim -124$ ) une expression remarquable, peut-être due à Archimède, de l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses côtés. Notons  $a, b, c$  les carrés des longueurs des côtés du triangle et fixons la taille du triangle en imposant à ceux-ci de vérifier la relation  $a + b + c = 3$  (cela revient à fixer à 1 le moment d'inertie par rapport à leur centre de gravité de trois masses unité placées aux sommets du triangle). La formule de Héron est  $S^2 = s(s - \sqrt{a})(s - \sqrt{b})(s - \sqrt{c})$ , où  $2s = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$  est le périmètre, mais je préfère l'écrire

$$S^2 = \frac{1}{16}(2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2).$$

Trois réels  $a, b, c \geq 0$  sont les carrés des longueurs des côtés d'un vrai triangle si et seulement si la formule ci-dessus définit un nombre positif  $S^2$ . Dans ces variables, l'espace des triangles apparaît donc comme un disque dont le bord, formé des triangles aplatis ( $S = 0$ ) contient trois points de collision  $C_1(a = 0)$ ,  $C_2(b = 0)$  et  $C_3(c = 0)$ . Considérer les formes de triangles orientés conduit à recoller deux tels disques par leur bord. On obtient ainsi une sphère dans laquelle l'équateur, formé des triangles aplatis, contient les trois points de collision. Ainsi, l'évolution de la forme du triangle orienté que définissent trois points qui se meuvent sans collision dans un plan est représentée par une courbe dans la sphère privée des trois points

$C_1, C_2, C_3$  (figure 1). Notons la riche topologie d'un tel espace, due à la possibilité de « tourner » autour des points  $C_i$ .

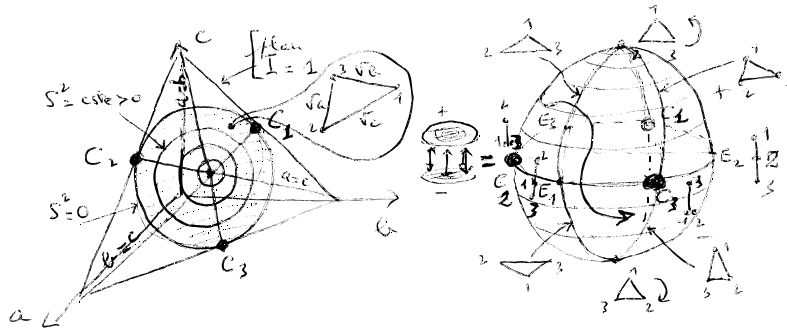


Fig. 1

**Remarque.** — Une construction plus conceptuelle de la sphère des triangles orientés (*shape sphere* en anglais) à partir de l'espace  $(\mathbb{R}^2)^3 = \mathbb{R}^6$  des triplets ordonnés de points dans  $\mathbb{R}^2$  est obtenue en passant au quotient successivement par les translations, les rotations et les homothéties :

- le premier quotient, qui transforme  $\mathbb{R}^6$  en  $\mathbb{R}^4$ , est obtenu en ne retenant des trois points que deux vecteurs, par exemple celui qui joint le sommet 1 au sommet 2 et celui qui joint le milieu du côté 1 – 2 au sommet 3 (*coordonnées de Jacobi*);
- le deuxième est réalisé par l'*application de Hopf* de  $\mathbb{R}^4$  sur  $\mathbb{R}^3$  définie après identification de  $\mathbb{R}^4$  à  $\mathbb{C}^2$  et de  $\mathbb{R}^3$  à  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$  par  $(z_1, z_2) \mapsto (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2\bar{z}_1 z_2)$ ;
- le troisième est la fixation de  $a + b + c$ .

Si on enlève les collisions, on obtient successivement  $\mathbb{R}^4$  privé de 3 plans,  $\mathbb{R}^3$  privé de trois demi-droites puis la sphère privée de trois points.

## Premier acte

### Kepler

Les mouvements des planètes autour du soleil sont décrits dans l'*Astronomia nova* (1609) et l'*Harmonice mundi* (1619). Chaque planète décrit une ellipse dont le soleil est le foyer. Un tel mouvement est caractérisé par la *ligne des nœuds*, intersection du plan qui le contient avec un plan de référence (l'écliptique), par l'*inclinaison* de ce plan (angle avec le plan de référence), par la direction du *périhélie* (point le plus proche du foyer) de l'ellipse dans ce plan, par la longueur  $a$  du *demi-grand axe* de l'ellipse (qui détermine la *période*  $T$  du mouvement) et enfin par l'*excentricité*  $e$  de l'ellipse ( $e = 0$  pour un mouvement circulaire,  $e = 1$  pour un mouvement colinéaire se terminant en collision). Le mouvement a lieu sur l'ellipse suivant la *loi des aires* : des aires égales sont balayées en des temps égaux par le segment joignant le soleil à la planète.

Notons l'importance des *symétries* du problème : changer l'origine du mouvement sur l'ellipse ou l'orientation de l'ellipse dans l'espace donnerait encore un mouvement acceptable : on parle aujourd'hui d'*invariance par translation temporelle* et d'*invariance par rotation spatiale*. La première est responsable de la constance du demi-grand axe  $a$  au cours du temps (conservation de l'*énergie*), la deuxième de la constance de l'excentricité  $e$  au cours du temps une fois  $a$  fixé (conservation du *moment cinétique*). Le symétrique (image dans un miroir) d'un mouvement par rapport à un plan contenant le soleil est également un mouvement acceptable et c'est une façon d'expliquer le fait que chaque mouvement ait lieu dans un plan. L'homothétique d'une ellipse est une ellipse de même excentricité et si l'on modifie la vitesse par une homothétie de rapport bien choisi, on obtient encore un mouvement acceptable. Plus précisément, la troisième loi de Kepler affirme la proportionnalité du carré  $T^2$  de la *période*  $T$  du mouvement au cube  $a^3$  du demi-grand axe : si  $\vec{r}(t)$  est un mouvement, il en est donc de même de  $\vec{r}_\lambda(t) = \lambda^{-\frac{2}{3}}\vec{r}(\lambda t)$  quel que soit  $\lambda > 0$ .

Pour faire le lien avec ce qui va nous intéresser, il est préférable de rapporter à la fois le mouvement du soleil et celui de la planète à leur centre de gravité  $G$ . Chaque *corps* paraît alors se mouvoir sur une ellipse de foyer  $G$ . La masse du soleil étant de l'ordre de 1 000 fois celle de la plus grosse planète (Jupiter), le changement n'est pas très spectaculaire car  $G$  se trouve à l'intérieur du soleil et l'ellipse décrite par le soleil est très petite. Mais si par la pensée nous considérons deux masses du même ordre, on obtient la situation représentée sur la figure 2. Si de plus les deux masses sont les mêmes et le mouvement circulaire, les deux corps se poursuivent indéfiniment sur un même cercle. C'est le premier exemple d'une *chorégraphie*.

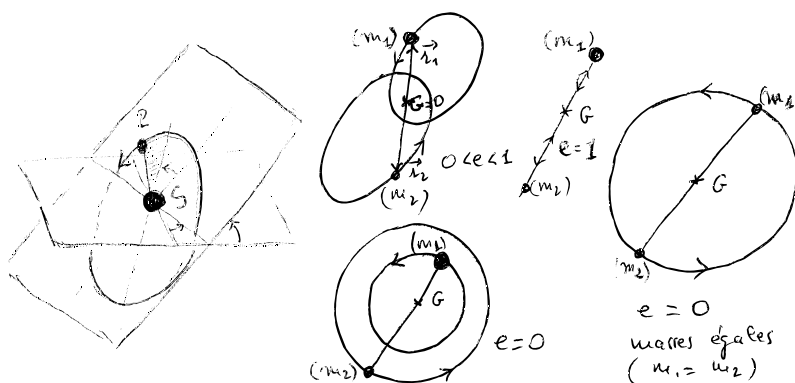


Fig. 2

## Newton

Le principe de l'attraction universelle avec une force en l'inverse du carré de la distance est énoncé dans les *Principia* (1687) mais il se passera de nombreuses

années avant que les équations du mouvement soient écrites sous la forme qu'on leur connaît aujourd'hui et que je rappelle maintenant.

Notons  $E$  l'espace euclidien dans lequel se meuvent les corps et repérons le  $i^{\text{ème}}$  corps, de masse  $m_i > 0$ , par le vecteur  $\vec{r}_i \in E$ . J'adopte la convention des mécaniciens en notant par un point au-dessus d'un vecteur dépendant du temps la dérivée temporelle de celui-ci. Les mouvements causés par l'attraction newtonienne sont régis par les équations

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (*)$$

En additionnant ces équations, on obtient  $\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0$ , qui exprime que le centre de gravité  $\vec{r}_G = (\sum_{i=1}^n m_i)^{-1} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$  a un mouvement rectiligne uniforme :  $\ddot{\vec{r}}_G = \vec{0}$ . On choisira un repère galiléen dans lequel  $\vec{r}_G \equiv \vec{0}$ .

*L'espace des configurations et l'espace des phases* : le premier est l'espace des  $n$ -uples de positions des corps :

$$\mathcal{X} = \left\{ x = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \in E^n; \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \vec{0} \right\},$$

ou plutôt l'ensemble  $\hat{\mathcal{X}}$  des configurations sans collision ( $\vec{r}_i \neq \vec{r}_j$  si  $i \neq j$ ).

Le second est l'ensemble  $\hat{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}$  des couples  $(x, y)$  d'un  $n$ -uple de positions  $x = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$  et d'un  $n$ -uple de vitesses  $y = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ , qui vérifient chacun  $\sum m_i \vec{r}_i = \vec{0}$  et  $\sum m_i \vec{v}_i = \vec{0}$ .

*Le produit scalaire des masses (ou de l'énergie cinétique)* : c'est un produit scalaire sur l'espace  $\mathcal{X}$ , défini à partir du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$  sur  $E$ , dont l'introduction simplifie l'écriture des équations.

$$\text{Si } x = (\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_n), y = (\vec{r}''_1, \dots, \vec{r}''_n), \quad \text{on définit } x' \cdot x'' = \sum_{i=1}^n m_i \langle \vec{r}'_i, \vec{r}''_i \rangle_E.$$

Les fonctions sur l'espace des phases (et même sur  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ ) définies par

$$I(x, y) = \|x\|^2 = x \cdot x = \sum_{i=1}^n m_i |\vec{r}_i|^2, \quad J(x, y) = x \cdot y, \quad K(x, y) = \|y\|^2 = y \cdot y,$$

sont respectivement le *moment d'inertie* de la configuration par rapport à son centre de gravité, la moitié de la dérivée temporelle de celui-ci et le double de l'*énergie cinétique*. Une identité classique qui remonte à Leibniz dit que, puisque  $\sum m_i \vec{r}_i = \vec{0}$ , on a

$$I = \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i} \sum_{i < j} m_i m_j |\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2.$$

La fonction potentiel  $U$  ( $-U =$  énergie potentielle), l'énergie totale (ou *Hamiltonien*)  $H$  et le *Lagrangien*  $L$  sont respectivement définis par

$$U = \sum_{i < j} m_i m_j \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^{-1}, \quad H = \frac{1}{2} K - U, \quad L = \frac{1}{2} K + U.$$

Dans ce langage, les équations (\*) deviennent simplement

$$\ddot{x} = \nabla U(x), \quad (**)$$

où le *gradient*  $\nabla$  de la fonction  $U$  est pris pour la métrique des masses.

*Rappelons que dans l'espace euclidien  $\mathcal{X}$ , le gradient  $\nabla U(x) \in \mathcal{X}$  de la fonction  $U$  au point  $x \in \mathcal{X}$  est définie à partir de la dérivée  $dU(x)$  par l'identité  $dU(x)\xi = \nabla U(x) \cdot \xi$  pour tout  $\xi \in \mathcal{X}$ . Le gradient d'une fonction en un point est orthogonal à l'hypersurface de niveau de la fonction contenant ce point.*

Les symétries évoquées précédemment à propos du problème de Kepler sont également des symétries du problème des  $n$  corps : translations spatio-temporelles, rotations, homothéties ( $\lambda^{-\frac{2}{3}}x(\lambda t)$  est solution pour tout  $\lambda > 0$  si  $x(t)$  est solution) et permutation de masses égales.

**Remarque.** — Le fait que toutes les solutions d'énergie négative du problème des deux corps soient périodiques est une propriété remarquable du potentiel newtonien. Parmi les potentiels en  $r^\alpha$ , seuls celui-ci ( $\alpha = -1$ ) et le potentiel harmonique ( $\alpha = 2$ ) la possèdent. Pour les autres valeurs de  $\alpha$  les orbites ont une *précession* (penser à la composition d'un mouvement elliptique avec une rotation régulière de l'ellipse autour de son foyer) qui fait qu'elles sont, suivant les valeurs de l'énergie, périodiques ou *quasi-périodiques*.

## Euler et Lagrange

Lorsque  $n$  est strictement supérieur à 2, une solution du problème des  $n$  corps présente en général une variation continue de la forme de la configuration. Je considère ici comme ayant la même forme deux configurations qui ne diffèrent l'une de l'autre que par une similitude. Cette différence majeure, l'existence d'une forme pouvant varier, explique la bien plus grande complexité du problème dès que  $n$  est supérieur à 2. Ainsi, il n'est pas étonnant que les seules solutions explicites du problème des trois corps soient les solutions *homographiques*, solutions « à forme constante » découvertes dès le 18<sup>e</sup> siècle par Euler (configurations colinéaires, 1765) et Lagrange (configuration équilatérale, 1772); pas étonnant non plus que, dans ces solutions, chaque corps ait un mouvement képlérien autour du centre de gravité, elliptique si l'énergie est négative (figure 3 dans le cas équilatéral).

Seules des formes très particulières, les *configurations centrales*, sont compatibles avec de telles solutions : en effet, ces configurations doivent en particulier s'effondrer homothétiquement sur leur centre de gravité si elles sont relâchées sans vitesse initiale (excentricité 1); autrement dit, la configuration des forces est proportionnelle à celle des corps :  $\nabla U(x) = kx$ , ce qui s'écrit encore  $\nabla U(x) = (k/2)\nabla I(x)$ .

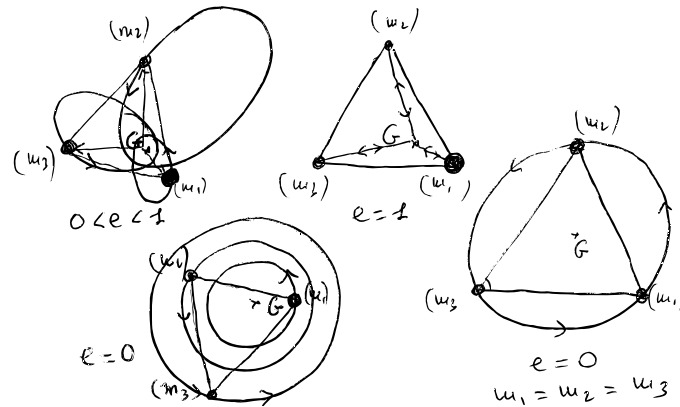


Fig. 3

Les configurations centrales sont donc les points critiques de la restriction de  $U$  aux sphères  $I = \text{constante}$  (voir la figure 7). Puisque les distances mutuelles ou mieux leurs carrés  $a, b, c$  caractérisent un triangle et sont indépendantes (voir le prologue), la condition équivaut à ce que

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{k}{2} \frac{\partial I}{\partial a}, \quad \frac{\partial U}{\partial b} = \frac{k}{2} \frac{\partial I}{\partial b}, \quad \frac{\partial U}{\partial c} = \frac{k}{2} \frac{\partial I}{\partial c}.$$

Mais,

$$U = m_2 m_3 a^{-\frac{1}{2}} + m_3 m_1 b^{-\frac{1}{2}} + m_1 m_2 c^{-\frac{1}{2}}, \quad I = \frac{1}{\sum m_i} (m_2 m_3 a + m_3 m_1 b + m_1 m_2 c)$$

et on en déduit ce résultat surprenant que, quelles que soient les masses, le triangle équilatéral est la seule configuration centrale non colinéaire de trois corps.

L'importance des configurations centrales tient en particulier à ce que les mouvements d'équilibre relatif ( $e = 0$ ) sont les singularités des équations réduites (i.e. des équations qui régissent les mouvements à isométrie près).

### Sundman

Les seules méthodes générales d'étude de l'évolution globale d'un système de plus de deux corps consistent en la comparaison avec des mouvements de type 2 corps. C'est en particulier le cas des *inégalités de Sundman* : une configuration  $x \in \hat{\mathcal{X}}$  étant fixée, l'espace des vitesses se décompose en la somme orthogonale (pour la métrique des masses) de trois sous-espaces, respectivement les vitesses homothétiques (proportionnelles à  $x$ ) qui correspondent aux purs changements de taille, les vitesses de rotation qui correspondent aux mouvements de corps solide et les vitesses de déformation :  $y = y_h + y_r + y_d$ . On montre facilement que  $\|y_h\|^2 = J^2/I$ ,  $\|y_r\|^2 \geq |C|^2/I$  (avec égalité si le mouvement a lieu dans un plan), où  $C = \sum_{i=1}^3 m_i \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{r}}_i$  est le *moment cinétique*, et enfin  $\|y_d\|^2 \geq 0$  qui traduit notre ignorance de ce qui concerne les changements de forme. Le résultat est l'*inégalité de Sundman*

$$IK - J^2 \geq |C|^2,$$

qui devient une égalité pour les mouvements homographiques, nécessairement plans (un résultat profond de Lagrange) et les seuls pour lesquels  $y_d = 0$ .

Aller plus loin exige donc que l'on tienne compte des variations de la forme (*i.e.* de la classe de similitude) de la figure que forment à chaque instant les  $n$  corps et en particulier, démarche souvent fructueuse, que l'on donne une structure à l'ensemble de toutes les formes possibles; dans le cas de trois corps, c'est exactement ce que nous avons fait dans le prologue.

### Poincaré

Les solutions de (\*\*) sont exactement les points critiques de l'action lagrangienne qui, à un chemin  $[0, T] \ni t \mapsto x(t) \in \hat{\mathcal{X}}$  fait correspondre l'intégrale

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \|\dot{x}(t)\|^2 + U(x(t)) \right] dt.$$

Cela signifie qu'un chemin  $x(t)$  dans  $\hat{\mathcal{X}}$  est une solution de (\*\*) si et seulement si la variation  $\mathcal{A}(x + \delta x) - \mathcal{A}(x)$  de l'action est « du second ordre » par rapport à la variation  $\delta x(t)$  du chemin  $x(t)$  : c'est le *Principe de moindre action*.

Dans une note aux C.R.A.S. d'à peine trois pages datée du 30 novembre 1896 et intitulée *Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action*, Poincaré se propose de trouver de nouvelles solutions périodiques relatives (*i.e.* dans un repère tournant, ou modulo rotation) du problème des trois corps dans le plan en imposant certaines contraintes aux variations de la forme du triangle. Plus précisément, il remarque qu'au bout d'une période, l'ensemble de la configuration ayant par définition tourné d'un certain angle autour du centre de gravité, le côté 1–2 aura tourné d'un angle total  $\alpha$ , le côté 2–3 d'un angle  $\alpha + k_1 2\pi$  et le côté 3–1 d'un angle  $\alpha + k_2 2\pi$ , où  $k_1$  et  $k_2$  sont des entiers relatifs. Fixant  $k_1$  et  $k_2$  et la période  $T$ , il cherche de telles solutions (dans un certain sens les plus simples) comme *minima* de l'action lagrangienne  $\int_0^T \left[ \frac{1}{2} \|\dot{x}(t)\|^2 + U(x(t)) \right] dt$  parmi les chemins  $x : [0, T] \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$  ayant ces propriétés.

Cette démarche, qui rend au Principe de *moindre action* son sens étymologique, est la même, au remplacement près de la longueur par l'action qui est une intégrale du même type, que celle par laquelle les géomètres cherchent une *géodésique* fermée d'un hyperboloïde à une nappe comme une courbe de longueur la plus petite possible parmi celles qui « font le tour » du trou (voir la figure 4).

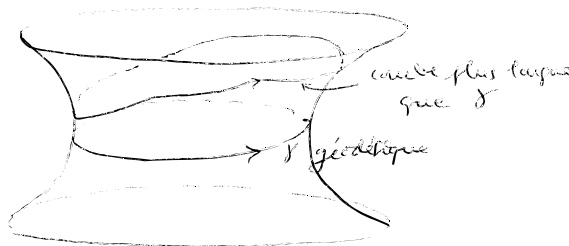


Fig. 4

Rappelons qu'une géodésique est une courbe  $\gamma$  tracée sur la surface ayant la propriété suivante : les segments suffisamment petits de  $\gamma$  ont une longueur inférieure ou égale à celle de tout segment de courbe tracée sur la surface et ayant les mêmes extrémités.

Dans le cas qui nous occupe, chercher un chemin  $x(t)$  d'action minimale n'est pas absurde puisque

(1) d'une part, le lagrangien étant positif, il en est de même de l'action qui est donc minorée;

(2) d'autre part, si  $k_1$  et  $k_2$  ne sont pas nuls, le minimum ne peut pas être atteint « à l'infini » car les contraintes obligeraient alors le chemin à être infiniment long et donc l'action, plus précisément, l'intégrale de l'énergie cinétique, à être infinie (on dit qu'il y a *coercivité*).

On peut même démontrer l'existence d'un minimum : ce sera fait par Tonelli aux alentours de 1925. Un problème majeur, celui des *collisions*, rend cependant difficile l'application de ce programme. Sundman montrera en 1913 que si un certain nombre de corps soumis à l'attraction newtonienne entrent en collision à l'instant  $t_0$ , leurs distances mutuelles sont de l'ordre de  $|t - t_0|^{\frac{2}{3}}$  et les dérivées temporelles de celles-ci de l'ordre de  $|t - t_0|^{-\frac{1}{3}}$ . Ces estimations sont des conséquences de la symétrie d'homothétie du problème des  $n$  corps. Elles rendent convergente l'intégrale d'action, ce qui permet seulement d'affirmer qu'un chemin minimisant cette intégrale est la concaténation d'un nombre peut-être infini de segments de solutions aboutissant à des collisions. Bien que ne connaissant pas et pour cause les travaux de Sundman, Poincaré connaît ces estimations dans le problème des deux corps. Il évite alors l'obstacle en remplaçant l'attraction newtonienne en  $1/r^2$  par une attraction « forte » en  $1/r^3$ . Une telle attraction, déjà étudiée par Newton, rend divergente l'intégrale d'action aux collisions et supprime donc le problème.

Interprétons maintenant les contraintes imposées par Poincaré : dans une solution périodique relative, la forme du triangle est la même après une période. À la solution est donc associé un lacet dans la sphère privée de trois points des formes de triangles orientés sans collision. Mais une sphère privée de trois points se déforme continûment sur un bouquet de deux cercles (deux cercles attachés par un point, ou encore une courbe en forme de huit : figure 5). Les entiers  $k_1$  et  $k_2$  représentent la *classe d'homologie* du lacet, c'est-à-dire le nombre algébrique de tours qu'après déformation, le lacet effectue sur chaque lobe du huit. Poincaré minimise donc l'action en fixant la classe d'homologie dans l'espace des triangles.

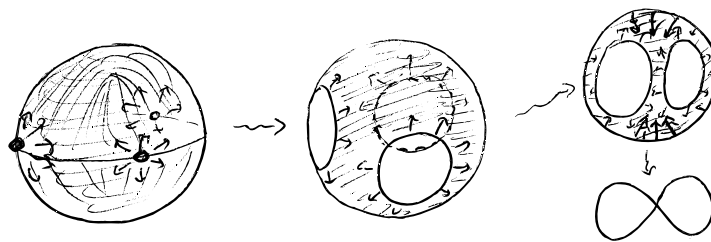


Fig. 5

## Deuxième acte

### Remplacer les contraintes homologiques par des contraintes de symétrie

Les difficultés rencontrées par Poincaré ne sont pas illusoires : il arrive en effet souvent que la minimisation sous contraintes d'homologie (ou d'homotopie) conduite à des minima qui ont des collisions. Ce phénomène a été analysé dans le cas de deux et trois corps respectivement par Gordon (1977) et Venturelli (2001). Dans le problème des trois corps dans le plan, mais cette fois pour les solutions périodiques absolues (i.e. celles qui au bout d'une période reviennent exactement au même état ; elles sont alors associées à trois entiers  $k_1, k_2, k_3$ , puisque chaque côté du triangle tourne d'un nombre entier de tours au cours d'une période), Andrea Venturelli a pu montrer que si  $(k_1, k_2, k_3) = \pm(1, 1, 1)$ , le minimum de l'action est réalisé par n'importe quelle solution homographique équilatérale. Mais si  $(k_1, k_2, k_3) \neq \pm(1, 1, 1)$  et si  $k_1, k_2, k_3$  sont chacun différent de 0, les seuls minima sont les solutions homothétiques équilatérales, qui commencent et se terminent en collision totale.

C'est le remplacement des contraintes topologiques par des contraintes de symétrie qui a donné à la méthode variationnelle toute sa pertinence pour le cas newtonien. *Dans ce qui suit, nous nous intéresserons surtout aux solutions périodiques absolues.* Soit  $\Lambda$  l'espace des lacets de période  $T$  dans l'espace de configuration  $\mathcal{X}$  du problème des  $n$  corps dans l'espace euclidien  $E$  (pour que l'intégrale d'action existe, on se limite aux lacets appartenant à l'espace de Sobolev  $H^1(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ , i.e. ceux dont la dérivée au sens des distributions est de carré intégrable). L'action  $\mathcal{A}$  est définie sur  $\Lambda$  et le groupe  $G = O(E) \times O(2) \times \Sigma$  agit sur  $\Lambda$  en la laissant invariante : le facteur  $O(E)$  représente les isométries de  $E$  agissant sur le triangle par rotation ou symétrie, le facteur  $O(2)$  celles du cercle  $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$  de longueur  $T$  agissant comme des translations ou des renversements du temps et  $\Sigma$  est le groupe fini qui permute les masses égales.

Plus précisément, le transformé du lacet  $t \mapsto x(t) = (\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_n(t))$  par l'élément  $(\rho, \tau, \pi) \in O(E) \times O(2) \times \Sigma$  est le lacet

$$t \mapsto \left( \rho \vec{r}_{\pi^{-1}(1)}(\tau^{-1}(t)), \dots, \rho \vec{r}_{\pi^{-1}(n)}(\tau^{-1}(t)) \right).$$

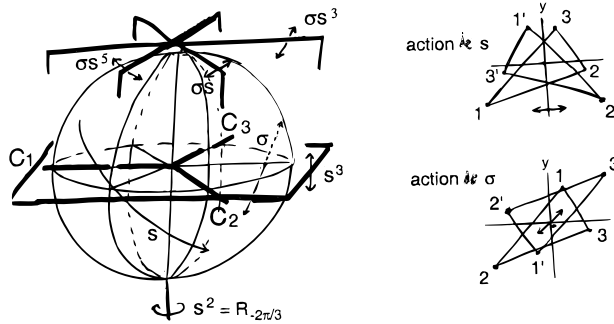
Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $G$  et  $\Lambda^\Gamma$  l'ensemble des lacets invariants par  $\Gamma$ . Un lemme classique de Palais montre qu'un point critique  $t \mapsto x(t)$  de la restriction de l'action à  $\Lambda^\Gamma$  est encore un point critique de l'action. L'idée est alors de choisir un sous-groupe fini  $\Gamma$  pour lequel les minima de l'action dans  $\Lambda^\Gamma$  n'aient jamais de collision. Que ceci se produise pour de nombreux choix de  $\Gamma$  se comprend aujourd'hui (après restriction à un domaine fondamental de l'action du groupe  $\Gamma$  sur le cercle du temps  $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ ) à la lumière du *Théorème de Marchal* qui affirme que *les chemins de configurations  $t \mapsto x(t)$  minimisant l'action à extrémités  $x(0)$  et  $x(T)$  fixées ne présentent jamais de collision dans l'intervalle ouvert  $]0, T[$ .*

Pour un exposé non technique de ce théorème, je renvoie à mon article *Solutions du problème des  $n$  corps joignant deux configurations : l'idée de Marchal et ce qui s'en suit* dans la *Gazette des mathématiciens de janvier 2004 (numéro 99)*.

Le reste de l'exposé, essentiellement des figures, est consacré à un exemple de minimisation sous contrainte de symétrie dans le cas du problème plan de trois corps de masses égales, exemple dans lequel le groupe  $\Gamma$  est le groupe des symétries de l'espace des triangles orientés.

**Le groupe diédral  $D_6$  ou les symétries de l'espace des triangles orientés**

Jointes à l'équateur (triangles aplatis), les trois méridiens formés par les triangles isocèles découpent la sphère des triangles orientés en 12 régions dont chacune est le domaine fondamental d'une action du groupe diédral  $D_6$ , groupe des symétries de l'hexagone régulier. La figure 6 définit cette action ainsi que son relèvement à  $\mathcal{X}$ . On a normalisé la taille en fixant la valeur de  $l$  correspondant à des masses égales, i.e.  $a + b + c = \text{constante}$ .



$$D_6 = \{s = s^6 = s^2, s, s^4, s^3, s^5, s^5, s^4, s^3, s^2 = s^2, s, s, s^2 = s^2, s, s^4 = s^4, s^3 = s^3, s^5 = s^5, s^6 = s^6\}$$

Fig. 6

L'action de  $D_6$  laisse invariante la restriction à  $l = 1$  de la fonction potentiel  $U$ , qui est naturellement définie sur la sphère des triangles orientés. La figure 7 indique, dans le cas de trois masses égales, les courbes de niveau de cette fonction. Les points critiques sont les configurations centrales introduites dans le paragraphe 3. Les deux pôles sont les triangles équilatéraux direct et rétrograde : ce sont des minima de  $U|_{l=1}$  ; Les trois configurations colinéaires d'Euler sont au contraire des cols.

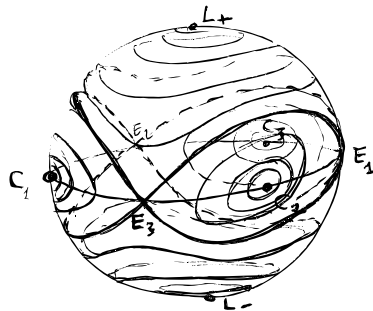


Fig. 7

### Relèvements à moment cinétique nul ou comment un chat se retourne en tombant

Chaque chemin dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  (= cône sur  $S^2$ , voir la remarque à la fin du prologue) des triangles orientés de taille quelconque se relève de façon unique (une fois choisi le relèvement de son origine) en un chemin  $x(t)$  dans l'espace de configuration  $\mathcal{X}$  dont la vitesse  $y(t) = \dot{x}(t)$  en chaque point a une composante de rotation  $y_r(t)$  (voir le début du paragraphe 3) égale à 0. Ceci équivaut à la condition que le moment cinétique

$$\mathcal{C}(t) = \sum m_i \vec{r}_i(t) \wedge \dot{\vec{r}}_i(t)$$

soit identiquement nul. Les géomètres interprètent ceci comme le *relèvement horizontal pour une connexion*. La *courbure* de cette connexion se traduit par l'existence d'*holonomie* : le relèvement d'un lacet n'est pas nécessairement un lacet. Plus précisément les configurations initiales et finales peuvent différer d'une rotation. Dans ce cas, un mouvement global de rotation a été obtenu sans qu'aucune vitesse de rotation soit présente, la déformation étant seule responsable. C'est un phénomène analogue qui explique la capacité qu'a un chat tombant d'un toit sans moment cinétique de se retourner durant la chute grâce à des déformations bien choisies de son corps.

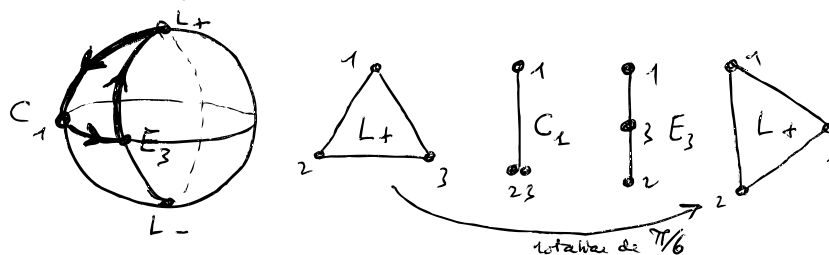


Fig. 8

Minimiser l'action parmi les chemins qui relèvent un lacet de l'espace des triangles orientés conduit en général à des solutions périodiques relatives et c'est bien ce que cherchait Poincaré. En effet, en introduisant une composante non triviale de rotation dans la vitesse  $\dot{x}(t)$  on ne fait qu'augmenter l'action ; un minimum sera donc le relèvement horizontal du lacet dans l'espace des formes et par suite il ne sera en général pas fermé.

### Le huit : une solution du problème des trois corps de même masse dans le plan qui possède toute la symétrie de l'espace des triangles orientés

Le groupe  $D_6$  agit sur l'espace des lacets de période  $T$  dans l'espace des triangles et même sur l'espace  $\Lambda$  des lacets de période  $T$  dans l'espace des configurations  $\mathcal{X}$  : on combine son action sur l'espace des triangles ou l'espace des configurations (ces actions sont définies sur la figure 6) avec l'action sur le temps définie comme suit :  $s$  agit par  $t \mapsto t + T/6$  et  $\sigma$  par  $t \mapsto -t$ .

Le relèvement horizontal (*i.e.* à moment cinétique nul) d'un lacet dans l'espace des triangles orientés (de taille quelconque) invariant sous l'action du groupe  $D_6$  de symétrie de cet espace se trouve être un lacet dans  $\mathcal{X}$  (c'est une conséquence des symétries). Ceci implique que, minimiser l'action parmi les chemins dans  $\mathcal{X}$

qui se projettent sur un lacet  $D_6$ -invariant dans l'espace des triangles orientés, revient à minimiser l'action dans le sous-espace  $\Lambda^{D_6}$  des lacets dans  $\mathcal{X}$  invariants par l'action de  $D_6$ . Un minimum  $x(t)$  possède toute la symétrie de l'espace des triangles orientés alors que les solutions équilatérales ne partagent pas cette propriété puisque l'orientation du triangle (qui reste équilatéral) ne change pas au cours du mouvement. Qu'un tel minimum soit dépourvu de collision a été prouvé à la fin de 1999 par l'auteur et R. Montgomery. La solution obtenue est une *chorégraphie* de moment cinétique nul : les corps se poursuivent indéfiniment à intervalles de temps égaux sur une courbe plane en forme de huit (figure 9).

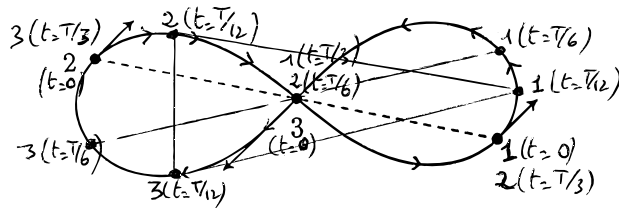


Fig. 9

Au bout d'un tiers de période, les corps sont revenus aux mêmes places avec les mêmes vitesses à une permutation circulaire près.

Au cours du mouvement, le moment d'inertie et le potentiel ne varient que peu. C'est d'ailleurs cette propriété qui est à la base de la première démonstration de l'absence de collisions en permettant la comparaison avec un lacet  $D_6$ -symétrique dans lequel  $I$  et  $U$  restent constants (et qui se projette donc sur la courbe de niveau singulière à trois lobes représentée sur la figure 7). Parmi les propriétés du huit, notons que la tresse qu'il définit dans l'espace temps est la tresse borroméenne dans laquelle trois cercles sont enlacés trois à trois mais non deux à deux (figure 10).

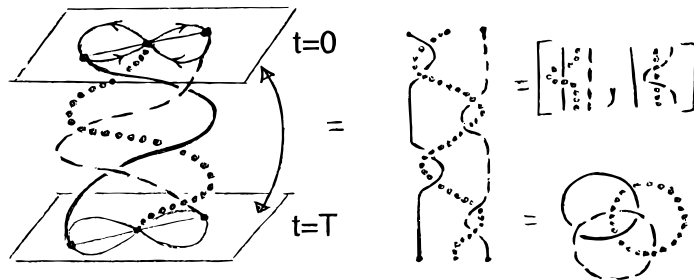


Fig. 10

Autrement dit, il s'agit vraiment d'une interaction triple pour laquelle la meilleure illustration semble être le jonglage.

**Remarques .**

(1) De très nombreuses *chorégraphies* de trois corps (et plus) de masses égales ont été découvertes numériquement depuis 4 ans, en particulier par Carles Simó (voir par exemple <http://www.maia.ub.es/dsg/3body.html>). On peut d'ailleurs montrer que, même en se limitant à trois corps, il y en a une infinité.

(2) Une famille remarquable de solutions périodiques *relatives dans l'espace*, la famille  $P_{12}$  découverte par Christian Marchal, relie le huit à l'équilibre relatif équilatéral de trois corps de masses égales (figure 3). Elle est décrite sur la figure 11 dans un *repère tournant* dont l'angle de rotation au cours d'une période varie de 0 pour le huit à  $-2\pi$  pour l'équilibre relatif (le triangle équilatéral parcourt deux fois le cercle dans le repère tournant). Notons que pour des raisons qui tiennent à la topologie de l'espace des triangles, une telle famille ne pourrait exister dans le plan. Elle définirait en effet une *homotopie* (i.e. une déformation continue à travers des lacets dans la sphère des triangles orientés privée des trois points  $C_1, C_2, C_3$ ) du lacet que définit le huit au lacet constamment égal à un triangle équilatéral (par exemple le triangle direct  $L_+$ ). Mais si une telle homotopie existait, la tresse définie par le huit serait triviale, or nous venons de voir qu'elle ne l'est pas (figure 10). Dans l'espace, par contre, l'orientation du triangle n'est plus définie et la sphère doit être remplacée par le disque de la figure 1, disque qui même privé des trois points  $C_1, C_2, C_3$  appartenant à son bord se déforme continuellement sur son centre, ce qui permet l'homotopie en question (figure 12). Il est intéressant de rappeler que le *groupe fondamental* d'un espace topologique, groupe dont les éléments sont les lacets « à homotopie près », avait été défini par Poincaré en 1895, soit un an avant la note que nous avons évoquée.

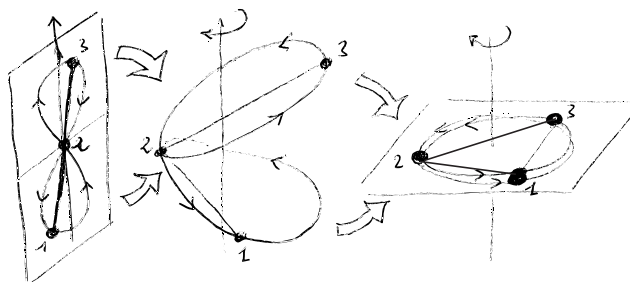
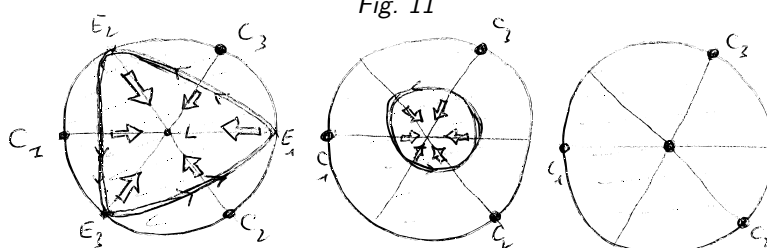


Fig. 11



Chaque étape correspond à une étape de la figure 11  
 Notez que chaque lacet est parcouru deux fois

Fig. 12

### En guise de conclusion : retour à la géométrie du triangle

Je ne sais si l'on apprend encore au collège les jolies propriétés d'intersection des droites remarquables d'un triangle. Des propriétés du même type ont été découvertes par Toshiaki Fujiwara et ses collaborateurs pour la famille de triangles décrite par trois corps parcourant le huit. Par exemple, que le moment cinétique du huit soit égal à 0 implique qu'à chaque instant les trois droites définies par les vitesses (*i.e.* les tangentes au huit aux positions à cet instant des trois corps) se coupent en un même point qui décrit au cours du temps une courbe en forme d'hyperbole. Pour le potentiel en  $1/r^2$  considéré par Poincaré, la géométrie de la solution en huit est d'une surprenante richesse : non seulement les trois tangentes se coupent mais aussi les trois normales (cela résulte de la constance de  $l$  qui est une propriété de toute solution périodique pour ce potentiel particulier).

Je renvoie à l'article *Synchronized Similar Triangles for Three-Body Orbit with Zero Angular momentum* par T. Fujiwara, H. Fukuda, A. Kameyama, H. Ozaki et M. Yamada pour d'autres surprises. La figure 13 en est extraite :

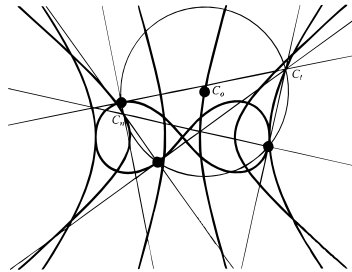


Fig. 13

On le trouve à <http://arxiv.org/abs/math-ph/0404056>

Enfin, on peut contempler de belles animations à l'adresse :  
<http://www.clas.kitasato-u.ac.jp/~fujiwara/nBody/IeqConstLeq0/centersGIF.html>

## Appendice 1.

ESSAI

SUR

## LE PROBLÈME DES TROIS CORPS.

Juvat integros accedere fontes.

LUCR.

---

 (Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris, tome IX, 1772.)
 

---

## AVERTISSEMENT.

Ces Recherches renferment une Méthode pour résoudre le Problème des trois Corps, différente de toutes celles qui ont été données jusqu'à présent. Elle consiste à n'employer dans la détermination de l'orbite de chaque Corps d'autres éléments que les distances entre les trois Corps, c'est-à-dire, le triangle formé par ces Corps à chaque instant. Pour cela, il faut d'abord trouver les équations qui déterminent ces mêmes distances par le temps; ensuite, en supposant les distances connues, il faut en déduire le mouvement relatif des Corps par rapport à un plan fixe quelconque. On verra, dans le premier Chapitre, comment je m'y suis pris pour remplir ces deux objets, dont le second surtout demande une analyse délicate et assez compliquée. A la fin de ce Chapitre, je ras-

*L'article de 1772 où Lagrange étudie pour la première fois le problème des trois corps en prenant comme variables les distances mutuelles.*

SMF - Gazette - 104, Avril 2005

## Appendice 2.

## SUR LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES ET LE PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

—————  
*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 123, p. 915-918 (30 novembre 1896).  
—————

La théorie des solutions périodiques peut, dans certains cas, se rattacher au principe de moindre action.

Supposons trois corps se mouvant dans un plan et s'attirant en raison inverse du cube des distances ou d'une puissance plus élevée de ces distances; j'appelle  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ces trois corps.

L'énergie cinétique  $T$  est essentiellement positive et il en est de même de la fonction des forces  $U$ , qui est égale à une somme de termes de la forme  $\frac{km m'}{r^n}$ , où  $k$  est une constante positive,  $m$  et  $m'$  les masses de deux des trois corps,  $r$  leur distance et  $n$  un exposant au moins égal à 2.

L'action hamiltonienne

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt$$

sera donc essentiellement positive.

Considérons une classe de trajectoires de nos trois corps  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; ce seront des trajectoires fictives, c'est-à-dire ne satisfaisant pas aux équations du mouvement; mais elles seront soumises aux conditions suivantes :

1° Au temps  $t_1$ , les distances des trois corps seront les mêmes qu'au temps  $t_0$ ; les vitesses seront les mêmes en grandeur et feront les mêmes angles avec les côtés du triangle des trois corps; en d'autres termes, la figure formée par les trois corps et par les droites qui représentent leurs vitesses aura repris à l'époque  $t_1$  la même forme qu'elle avait à l'époque  $t_0$ ; ou bien encore les

*La note aux C.R.A.S. de Poincaré (30 novembre 1896).*